数理解析研究所講究録
第96巻 1970年 14-29

有界正則函数の環について

茨城大 理　荷見 守助

複素平面$\mathbb{C}$上の単位開円板Δ上のすべての有界正則函数のなす環を$H^\infty(\Delta)$とし、その極大イデアル空間を$\mathfrak{M}(\Delta)$とする。$\mathbb{C}$上の座標函数をzと書くとき、$\pi(\phi)=\phi(z)$　($\phi\in\mathfrak{M}(\Delta)$)により$\mathfrak{M}(\Delta)$から$\bar{\Delta}$への連続写像$\pi$が得られる。$\lambda\in\bar{\Delta}$に対し$\mathfrak{M}_\lambda(\Delta)=\pi^{-1}(\lambda)$とおいて$\lambda$の上のファイバーと呼ぶ。ファイバーは$\lambda\in\Delta$に対しては唯一点からなるが、$\lambda\in\partial\Delta$に対しては甚だ複雑である。このファイバーの構造はHoffman [8] が詳しく調べてゐるが、一般の領域の場合にはあまり分ってゐないやうであるので、Gamelin [4] と Gamelin-Garnett [5] に従てこの辺の事を少し紹介したい。

Dをリーマン球面$\mathbb{C}^*$の開集合、$H^\infty(D)$をD上の一価有界正則函数の全体とし、$H^\infty(D)$は定数以外の函数を含むものとする。$H^\infty(D)$はsupノルムについてバナッハ代数である。$H^\infty(D)$の極大イデアル空間を$\mathfrak{M}(D)$（又は単に$\mathfrak{M}$）と書く。我々の目的は

$\mathfrak{M}$のファイバーを定義し、その性質を調べることである。

§1. 準備.

準備として所謂Vitushkinの作用素の一つの応用を述べる。この作用素については、Vitushkin [9] の他にGamelin [3], Zalcman [10] などを参照されたい。[7] にも記述されてゐる。

さて、中心 $z\in\mathbb{C}$, 半径 r の開円板を $\Delta(z;r)$ と書く。$\lambda\in\mathbb{C}$ を固定したとき、$\delta>0$ に対し g_δ を $\Delta(\lambda;\delta)$ に台を持つ C^∞ 級函数で、$\Delta(\lambda;\frac{\delta}{2})$ 上では 1, $\mathbb{C}$ 全体では $|g_\delta|\leqq 1$ 且つ $\left|\frac{\partial g_\delta}{\partial \bar{z}}\right| \leqq \frac{4}{\delta}$ なるものとする。$\mathbb{C}$ 上の有界可測函数 f に対し

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad G(\zeta) = (T_{g_\delta} f)(\zeta) &= \frac{1}{\pi}\iint \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\,\frac{\partial g_\delta}{\partial \bar{z}}\,dx\,dy \\
&= f(\zeta)g_\delta(\zeta) + \frac{1}{\pi}\iint \frac{f(z)}{z-\zeta}\,\frac{\partial g_\delta}{\partial \bar{z}}\,dx\,dy
\end{aligned}
$$

とおく。$T_{g_\delta}: f \longmapsto G$ がVitushkinの作用素である。このとき次の諸性質が示される。(i) G は可測で、$\|G\|_\infty \leqq 8\sup\{|f(z)-f(\zeta)| : z,\zeta\in\Delta(\lambda;\delta)\} \leqq 16\sup\{|f(z)| : z\in\Delta(\lambda;\delta)\}$; (ii) G は g_δ の台の外(従て $\Delta(\lambda;\delta)$ の外)では正則で、$G(\infty)=0$; (iii) G は f の連続点で連続, f の正則点で正則である; (iv) $f-G$ は $g_\delta^{-1}(1)$ の内点で(従て $\Delta(\lambda;\frac{\delta}{2})$ で)正則である。

補題 1.1. $\lambda\in\partial D$, U を λ の開近傍, $f\in H^\infty(D\cap U)$ とするとき、$F\in H^\infty(D)$ で次の性質を持つものが存在する。(a) $F-f$ は λ の

近傍で正則な函数に延長出来て、$(F-f)(\lambda)=0$；(b) $\|F\|_D \leqq 24\|f\|_{D\cap U}$.（但し $\|F\|_D=\sup_{z\in D}|F(z)|$）

証明、$\lambda\in\mathbb{C}$, $U=\Delta(\lambda;\delta)$ $(\delta>0)$として一般性は失はれない。このとき、$\mathbb{C}^*\setminus D$上では $f=0$ とおき、(1)の記法で $F(\xi)=G(\xi)-\frac{1}{\pi}\iint\frac{f(z)}{z-\lambda}\frac{\partial g_\delta}{\partial\bar{z}}dxdy$ とおけばよい。

<u>補題 1.2.</u> $\lambda\in\partial D$, $f\in H^\infty(D)$ に対し，$f_n\in H^\infty(D)$ $(n=1,2,\cdots)$ で次の性質を持つものが存在する：(a) $\|f_n\|_D\leqq 17\|f\|_D$；(b) f_nはλの近傍まで正則；(c) 任意の $\varepsilon>0$ に対し，$D\cap\{z:|z-\lambda|\geqq\varepsilon\}$ 上では一様に $f_n\to f$. 更にもし fがλまで連続に延長出来るときは、D上で一様に $f_n\to f$.

証明. $\lambda\in\mathbb{C}$としてもよい、$\mathbb{C}^*\setminus D$ 上では $f=0$ とおき，(1)式で $\delta=\frac{1}{n}$ としたものを G_n と書き，$f_n=f-G_n$ とおけばよい.

§2. ファイバーの局所性

$\mathfrak{M}$ $(=\mathfrak{M}(D))$ のファイバーを定義するために先づ次を示す.

<u>補題 2.1.</u> $\mathfrak{M}$から$\bar{D}$上への写像πで次の性質を持つものが一つ且唯一つ存在する：$f\in H^\infty(D)$が$\lambda\in\bar{D}$で正則ならば，$\phi(f)=f(\lambda)$，但し $\phi\in\mathfrak{M}$ 且つ $\pi(\phi)=\lambda$.

証明. Dが有界のときは $\pi(\phi)=\phi(z)$とすればよいから、Dが有界でない場合を考へる. このときは球面$\mathbb{C}^*$を廻転するこ

とにより，$\infty\in D$と仮定することが出来る．さて$\phi\in\mathfrak{M}$は∞におけるevaluationとは異るとすれば、$h(\infty)=0$，$\phi(h)=1$なる$h\in H^\infty(D)$が存在する．このときは$zh\in H^\infty(D)$である．$\lambda=\phi(zh)$とおくと，$\phi\longmapsto\lambda$は求むるものである．詳細は省略する（[4]参照）．

さて、$\lambda\in\bar{D}$に対し$\mathfrak{M}_\lambda\ (=\mathfrak{M}_\lambda(D))=\pi^{-1}(\lambda)$とおいて、$\lambda$の上のファイバーと呼ぶ．標記のファイバーの局所性とは、ファイバー$\mathfrak{M}_\lambda(D)$がλの附近のDの形のみで決ることを指す．これは多分に新しいことではなく，Hoffman [8；§7]には有限開リーマン面の場合についてこれに相当することが述べられており、筆者もこれを利用した[6]．一般の場合に対しこの事を明確に述べるために先づ次に注意する．

<u>補題 2.2.</u> $\lambda\in\bar{D}$，$\phi\in\mathfrak{M}_\lambda(D)$とする．もし$f\in H^\infty(D)$が$\lambda$まで連続に延長出来るならば，$\phi(f)=f(\lambda)$．

証明．fがλで正則のときは，(2.1)によって命題は正しい．そこで(1.2)を用いれば一般の場合にも正しいことが分る．

$\lambda\in\bar{D}$を固定し、λの開近傍Uを任意にとって、制限写像$j: H^\infty(D)\longrightarrow H^\infty(D\cap U)$を考へる．$j$は環の準同型であるからその双対として極大イデアル空間の間の写像$j^*: \mathfrak{M}(D\cap U)\longrightarrow \mathfrak{M}(D)$が得られる．このとき、

<u>定理 2.3.</u> j^*の下で$\mathfrak{M}_\lambda(D\cap U)$と$\mathfrak{M}_\lambda(D)$は位相同型であり、

この写像により、$H^\infty(D)$ の $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ への制限は $H^\infty(D\cap U)$ の $\mathfrak{M}_\lambda(D\cap U)$ への制限と同型である。

証明。j^* が $\mathfrak{M}_\lambda(D\cap U)$ を $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ の中へ写すことは明かである。任意に $\phi\in\mathfrak{M}_\lambda(D)$ をとる。$f\in H^\infty(D\cap U)$ に対し (1.1) による $F\in H^\infty(D)$ を一つとって、$\tilde\phi(f)=\phi(F)$ とおけば、(2.2) により $\tilde\phi$ は確定する。このとき、$\tilde\phi\in\mathfrak{M}_\lambda(D\cap U)$ であって $j^*(\tilde\phi)=\phi$ なることは容易に分る。j^* は連続で一対一であるから位相同型である。次に写像 $\hat h|_{\mathfrak{M}_\lambda(D)} \longrightarrow \hat h\circ j^*|_{\mathfrak{M}_\lambda(D\cap U)}$ $(h\in H^\infty(D))$ は一対一である。任意の $f\in H^\infty(D\cap U)$ に対し上の F を考へれば、$\psi\in\mathfrak{M}_\lambda(D\cap U)$ に対し、$0=(j(F)-f)(\lambda)=\psi(j(F)-f)=\hat F\circ j^*(\psi)-\hat f(\psi)$ となるから、上の写像は全射である。代数演算を保つことは明かであるから定理が証明された。

<u>系 2.4.</u> 前定理の対応により $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ と $\mathfrak{M}_\lambda(D\cap U)$ を同一視すれば、D の $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ 内の極限点は $D\cap U$ の $\mathfrak{M}_\lambda(D\cap U)$ 内の極限点と一致する。

これによれば、所謂コロナ問題の解は D の局所的な形のみによることが分る。更に詳しい議論は [4] を参照されたい。

(2.3) の応用として次のやうな事も分る。

<u>定理 2.5.</u> $f\in H^\infty(D)$ の $\lambda\in\bar D$ における集積値の集合は f の $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ 上での値の集合に等しい。

証明。w が f の λ での集積値ならば、$z_n\in D$ を $z_n\longrightarrow\lambda$ 且

つ $f(z_n) \to w$ と選ぶことが出来る. $\{z_n\}$ の $\mathfrak{M}(D)$ での極限点の一つを ϕ とすれば, $\phi \in \mathfrak{M}_\lambda(D)$ であって $\phi(f) = w$.

次に w が f の λ での集積値でないならば, λ の開近傍 U と $\varepsilon > 0$ を適当にとって, $z \in D \cap U$ なる限り $|f(z) - w| \geqq \varepsilon$ のやうに出来る. $f - w$ は $H^\infty(D \cap U)$ で可逆だから, $\mathfrak{M}_\lambda(D \cap U)$ 上で 0 になることはない. こゝで (2.3) を使へば, $f - w$ は $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ 上でも 0 になることはない. 即ち f は $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ 上で値 w をとることがない.

系 2.6. $\lambda \in \partial D$, $f \in H^\infty(D)$ とすれば

$$\sup\{|\phi(f)| : \phi \in \mathfrak{M}_\lambda(D)\} = \limsup_{z \in D,\, z \to \lambda} |f(z)|.$$

§3. ファイバーが尖集合になる條件.

単位円周 $\partial\Delta$ 上の各点はディスク環の尖点になってゐるから, $\lambda \in \partial\Delta$ 上のファイバー $\mathfrak{M}_\lambda(\Delta)$ は $H^\infty(\Delta)$ の尖集合であることが分るが, 一般の場合には次の定理がある.

定理 3.1. $\lambda \in \mathbb{C}$ を $\bar{D}$ 上の点とし, $0 < a < 1$ とする. $E_n = \{z \in \mathbb{C} : a^{n+1} \leqq |z - \lambda| \leqq a^n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくならば, $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ が $H^\infty(D)$ の尖集合になるための條件は, $\sum_{n=1}^\infty a^{-n} \gamma(E_n \setminus D) = +\infty$ である. 但し $S \subset \mathbb{C}$ に対し $\gamma(S)$ は S の解析的容量を表はす.

証明. 先づ $\sum_{n=1}^\infty a^{-n} \gamma(E_n \setminus D) = +\infty$ と仮定する. Curtis [2]

の論法を応用すれば、次のやうな $f \in H^\infty(D)$ を作ることが出来る、(a) $\|f\|=1$；(b) f は λ で連続で $f(\lambda)=1$；(c) $\varepsilon>0$ ならば $D\cap\{z: |z-\lambda|\geqq\varepsilon\}$ 上で $|f(z)|\leqq\eta$ なる $\eta<1$ がある．そこで、f を $\mathfrak{M}(D)$ 上の連続函数と考へることにすれば、(2.2), (2.6) 及び上の性質から，$\phi\in\mathfrak{M}_\lambda(D)$ ならば $\phi(f)=1$，$\phi\in\mathfrak{M}(D)\setminus\mathfrak{M}_\lambda(D)$ ならば $|\phi(f)|<1$ なる事が分る．故に $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ は $H^\infty(D)$ の尖集合である．

次に $\sum_{n=1}^\infty a^{-n}\gamma(E_n\setminus D)<+\infty$ と仮定する．各 E_n の相対開集合 U_n を $E_n\setminus D\subset U_n$ 且つ $\gamma(U_n)\leqq\gamma(E_n\setminus D)+a^{2n}$ のやうにとる．必要ならば各 U_n を少しづつ変へることにより，$\bigcup_{n=1}^\infty U_n$ が開集合に出来るから，始めからさうであるとしておく．そこで

(2) $$K=\{\lambda\}\cup\bigcup_{n=1}^\infty(E_n\setminus U_n)$$

とおけば，K はコンパクトで，$K\subset D\cup\{\lambda\}$ 且つ $E_n\setminus K\subseteq U_n$ である．故に $\sum_{n=1}^\infty a^{-n}\gamma(E_n\setminus K)\leqq\sum_{n=1}^\infty a^{-n}\gamma(U_n)\leqq\sum_{n=1}^\infty a^{-n}(\gamma(E_n\setminus D)+a^{2n})=\sum_{n=1}^\infty a^{-n}\gamma(E_n\setminus D)+\sum_{n=1}^\infty a^n<+\infty$ となり、Melnikov の定理によって λ は $R(K)$ の尖集合ではないことが分る．従て $K\setminus\{\lambda\}\subset D$ 上の正測度で

(3) $$f(\lambda)=\int f\,d\sigma \qquad (f\in R(K))$$

を満足するものがある．$f\in H^\infty(D)$ が λ で正則ならば、$f\in R(K)$ でもあるから (3) を満足する．(1.2) によれば、(3) の右辺によって $H^\infty(D)$ 上の準同型が定義されることが分る．これを ϕ_λ と書け

ば、$\phi_\lambda \in \mathfrak{M}_\lambda(D)$であって$\sigma$は$\phi_\lambda$を表現する測度である．$\sigma$は$\mathfrak{M}_\lambda(D)$上に負量を持たないから，$\mathfrak{M}_\lambda(D)$は尖集合ではない．

§4. ϕ_λの諸性質．

(3.1)の後半で作った準同型ϕ_λを考察する．以下簡単のために．$\lambda \in \mathbb{C}$且つ$\lambda \in \partial D$と仮定する．

定理 4.1. $\mathfrak{M}_\lambda(D)$が$H^\infty(D)$の尖集合でないならば、$\mathfrak{M}_\lambda(D)$内の準同型でそれを表現する測度が$\mathfrak{M}_\lambda(D)$上に負量を持たぬやうに出来るものが一つ且つ唯一つ存在する．

証明．(3.1)の証明よりこのやうな準同型の存在が分る．いま$\phi, \psi \in \mathfrak{M}_\lambda(D)$をこのやうな準同型とする．もし$f \in H^\infty(D)$が$\lambda$で正則ならば、$\phi(f) = f(\lambda) = \psi(f)$である．次に任意の$f \in H^\infty(D)$に対し(1.2)によって$f_n$を作れば、$\mathfrak{M}(D) \setminus \mathfrak{M}_\lambda(D)$上では$f_n \to f$である．従て、$\phi, \psi$についての仮定とLebesgueの収斂定理とによって、$\phi(f) = \lim_n \phi(f_n) = \lim_n \psi(f_n) = \psi(f)$となる．故に$\phi = \psi$．

前定理によって決定される準同型ϕ_λを$\mathfrak{M}_\lambda(D)$の中の特殊準同型(distinguished homomorphism)と呼ぶ．これについて

定理 4.2. $\mathfrak{M}_\lambda(D)$が尖集合でないならば、$\lambda \in \partial D_0$であるやうなDの連結成分D_0が一つ且つ唯一つ存在する．ϕ_λはD_0と同じpartに含まれ，$\{\lambda\}$は$\mathbb{C} \setminus D_0$の一つの成分をなす．

証明．(3.1)の証明の中で示したやうに，ϕ_λを表現する測度σでD上にのみ質量を持つものがある．Dの相異なる成分は$H^\infty(D)$の相異なるpartに属すること及び相異なるpartに属する準同型を表現する測度は互に特異であることを考へれば，σの質量はDの或成分D_0上に集中してゐることが分る．ϕ_λはこの成分D_0と同じpartに属し且つ$\lambda \in \partial D_0$である．

さて，σは$H^\infty(D_0)$上で乗法的であるから，$\mathfrak{M}_\lambda(D_0)$は$H^\infty(D_0)$の尖集合ではない．$\mathbb{C}^* \setminus D_0$の成分で$\lambda$を含むものを$E$とおく．もし$E$が少くとも二点を含むならば，$\mathbb{C}^* \setminus E$は単連結なるによりRiemannの写像定理でこれを単位開円板Δ上に等角に写すことが出来る．この函数をfとすれば，$f \in H^\infty(D_0)$であり，fのλにおける集積値の集合は単位円周に含まれる．(2.5)によりこの集合はfの$\mathfrak{M}_\lambda(D_0)$上における値の集合である．従て$\mathfrak{M}_\lambda(D_0)$のどの点も$H^\infty(D_0)$に関して$D_0$と同じpartに属することはない．これは矛盾であるから，$\{\lambda\}$は$\mathbb{C}^* \setminus D_0$の成分でなければならない．これから，$\lambda \in \partial D'$なる$D$の成分$D'$は$D_0$しかないことも分る．

次にϕ_λの積分表示を考へる．そのためρを$\mathfrak{M}(D)$上の擬双曲距離とする．即ち$\phi, \psi \in \mathfrak{M}(D)$に対し，$\rho(\phi, \psi) = \sup\{|\psi(f)| : f \in H^\infty(D), \|f\| \leqq 1, \phi(f) = 0\}$．このとき，$\rho(\phi, \psi) < 1$は$\mathfrak{M}(D)$上の同値関係で，その同値類がpartである．

定理 4.3. $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ は尖集合でなく. ϕ_λ を $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ の中の特殊準同型とし, $P_\varepsilon = \{z \in D : \rho(\phi_\lambda, z) < \varepsilon\}$ とおく. $\varepsilon > 0$ ならば.

$$\lim_{\delta \to 0} \mathrm{Area}(P_\varepsilon \cap \Delta(\lambda;\delta))/\pi\delta^2 = 1.$$

証明. K を (2)式で定義したものとし, ρ' を R(K)に関する K 上の擬双曲距離として. $Q_\varepsilon = \{z \in K \setminus \{\lambda\} : \rho'(z,\lambda) < \frac{\varepsilon}{34}\}$ とおく. このとき $Q_\varepsilon \subseteq P_\varepsilon$. λ は R(K)の尖点ではないから, Browder [1] の定理によって, $\mathrm{Area}(Q_\varepsilon \cap \Delta(\lambda;\delta))/\pi\delta^2 \to 1$. これから定理は明かである.

定理 4.4. $\delta > 0$, $f \in H^\infty(D)$ に対し ($\mathbb{C} \setminus D$ 上では $f = 0$ として)

$$(4) \qquad S_\delta(f) = \frac{1}{\pi\delta^2}\iint_{D \cap \Delta(\lambda;\delta)} f(z)\,dx\,dy, \quad L_\delta(f) = -\frac{1}{\pi}\iint \frac{f(z)}{z-\lambda}\frac{\partial g_\delta}{\partial \bar z}\,dx\,dy$$

とおく. $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ が尖集合でないときは、$\delta \to 0$ のとき $(H^\infty(D))^*$ のノルムの意味で、$S_\delta \to \phi_\lambda$ 且つ $L_\delta \to \phi_\lambda$.

証明. 先づ S_δ を考へる. (4.3)により $S_\delta(1) \longrightarrow 1 = \phi_\lambda(1)$. 従て $\sup\{|S_\delta(f)| : \|f\| \leqq 1, \phi_\lambda(f) = 0\} \longrightarrow 0$ を示せばよい. $\varepsilon > 0$ とすれば, $z \in P_\varepsilon$ に対しては, $\|f\| \leqq 1$, $\phi_\lambda(f) = 0$ より $|f(z)| < \varepsilon$ が得られる. 故にこのやうな f に対しては

$$|S_\delta(f)| \leqq \varepsilon + \frac{1}{\pi\delta^2}\mathrm{Area}(\Delta(\lambda;\delta) \setminus P_\varepsilon)$$

となるから求める結果が得られる.

次に L_δ を考へる. 先づ $L_\delta(1) \longrightarrow 1$. 何となれば

$$|1 - L_\delta(1)| = \left|g_\delta(\lambda) + \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{1}{z-\lambda}\frac{\partial g_\delta}{\partial \bar z}\,dx\,dy\right| = \left|\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta(\lambda;\delta)\setminus D} \frac{1}{z-\lambda}\frac{\partial g_\delta}{\partial \bar z}\,dx\,dy\right|$$

$$\leqq \frac{4}{\pi\delta}\iint_{\Delta(\lambda;\delta)\setminus P_2}\frac{dx\,dy}{|z-\lambda|} \leqq \frac{4}{\pi\delta}\sqrt{4\pi\,\mathrm{Area}(\Delta(\lambda;\delta)\setminus P_2)} \longrightarrow 0,$$

$\varepsilon>0$ とし，$f\in H^\infty(D)$ を $\|f\|\leqq 1$，$\phi_\lambda(f)=0$ ととれば

$$|L_\delta(f)| \leqq \frac{4\varepsilon}{\pi\delta}\iint_{P_\varepsilon\cap\Delta(\lambda;\delta)}\frac{dx\,dy}{|z-\lambda|} + \frac{4}{\pi\delta}\iint_{\Delta(\lambda;\delta)\setminus P_\varepsilon}\frac{dx\,dy}{|z-\lambda|}$$

$$\leqq \frac{4\varepsilon}{\pi\delta}O(\pi\delta^2) + \frac{4}{\pi\delta}\sqrt{4\pi\, o(\pi\delta^2)}$$

となって，(4.3) より $\sup\{|L_\delta(f)| : \|f\|\leqq 1,\ \phi_\lambda(f)=0\}\longrightarrow 0$ を得る．故に $L_\delta\longrightarrow\phi_\lambda$．

実はこの逆も成立つ．即ち

<u>定理 4.5.</u> $\lambda\in\partial D$ とする．又 $f\in H^\infty(D)$ に対し $\mathbb{C}\setminus D$ 上では $f=0$ とする．このとき次は同値である．

(i) $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ は尖集合ではない．

(ii) $\lim_{\delta\to 0}S_\delta(f)$ はすべての $f\in H^\infty(D)$ に対して存在し，少くとも一つの f に対しては 0 ではない．

(iii) $\lim_{\delta\to 0}L_\delta(f)$ はすべての $f\in H^\infty(D)$ に対して存在し，少くとも一つの f に対しては 0 ではない．

(ii) と (iii) が (i) から出ることは既に見た．逆は次節の定理から分る．

§5. 内挿列．

点列 $\{z_1, z_2, \cdots\}\subset D$ が $H^\infty(D)$ の内挿列であるとは、任意の $s=(s_n)\in l^\infty$ に対し，$h\in H^\infty(D)$ で $h(z_n)=s_n,\ n=1,2,\cdots$ なる

ものが存在することを云ふが、これを次のやうに拡張する．

D上の測度の列$\{\mu_n\}$が内挿的であるとは、任意の$s=(s_n)\in \ell^\infty$に対し、$h\in H^\infty(D)$で$\mu_n(h)=\int h\,d\mu_n=s_n$, $n=1,2,\cdots$, なるものが存在することを云ふ．

補題 5.1. $\{\mu_n\}$をD上の測度の列とし、$0<a<1$且つ$M>0$とする．任意の$(s_n)\in\ell^\infty$, $\sup_n|s_n|\leqq 1$, に対し$f\in H^\infty(D)$で$\|f\|\leqq M$且つ$|\int f\,d\mu_n-s_n|\leqq a$, $n=1,2,\cdots$,なるものが存在すれば，$\{\mu_n\}$は$H^\infty(D)$に対し内挿的である．

これは逐次近似によって証明される．

定理 5.2. $\{\mu_n\}$はD上の測度の列であって、$\bar{D}$上の測度として$\lambda\in\partial D$におけるディラック測度に汎弱収斂するものとする．もし$\mathcal{M}_\lambda(D)$が尖集合ならば，$\{\mu_n\}$は$H^\infty(D)$に対する内挿列を部分列として含む．

証明．$\mathcal{M}_\lambda(D)$を最大値集合とする$h\in H^\infty(D)$（但し$\phi\in\mathcal{M}_\lambda(D)$に対し$\hat{h}(\phi)=1$）をとる．このとき先づ$\int h\,d\mu_n\to 1$である．次に正数$b>0$を固定し、$\{\mu_n\}$の部分列$\{\nu_j\}$, λを中心とし$\{\lambda\}$へ縮小する円板の列$\{\Delta_j\}$, hの巾から成る函列$\{h_j\}$を次のやうに選ぶ：(i) $|h_j(z)|\leqq 2^{-j}b$ $(z\in D\setminus\Delta_j)$, (ii) $|\int h_j\,d\nu_k|\leqq 2^{-j}b$ $(k\leqq j-1)$, (iii) $|1-h_j(z)|\leqq 2^{-j}b$ $(z\in\Delta_{j+1}\cap D)$, (iv) $|1-\int h_j\,d\nu_k|\leqq 2^{-j}b$ $(k\geqq j)$．そこで$g_j=h_j-h_{j+1}$ $(j=1,2,\cdots)$とおく．このときは、$z\in D\cap(\Delta_{k-1}\setminus\Delta_k)$且つ$j\neq k-1,k-2$

ならば $|g_j(z)| \leqq 2^{-j+1}\varepsilon$. 又 D 上では $|g_j| \leqq 2$ であるから、$\sum_{j=1}^{\infty}|g_j(z)| \leqq 4 + \sum 2^{-j+1}\varepsilon = 4(1+\varepsilon)$ が D 上で成立つ. 更に

$$\left|\int g_j\, d\nu_k\right| < 2^{-j+1}\varepsilon \ (j \neq k), \quad \left|1-\int g_k\, d\nu_k\right| < 2^{-k+1}\varepsilon.$$

さて、任意に $(s_j) \in l^{\infty}$ を $\sup_j |s_j| \leqq 1$ のやうにとるとき. $f = \sum_j s_j g_j$ とおけば, $f \in H^{\infty}(D)$ であって $\|f\| \leqq 4(1+\varepsilon)$ 且つ

$$\begin{aligned}\left|s_k - \int f\, d\nu_k\right| &\leqq |s_k|\left|1-\int g_k\, d\nu_k\right| + \sum_{j\neq k}\left|\int g_j\, d\nu_k\right| \\ &\leqq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j+1}\varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

よって, $\varepsilon < \frac{1}{2}$ として, $a = 2\varepsilon$, $M = 4(1+\varepsilon)$ とおけば、$\{\nu_j\}$ は (5.1)の條件を満足するから, $\{\nu_j\}$ は内插的である.

又、次の結果も証明される.

<u>定理 5.3.</u> $\{\mu_n\}$ は前定理の條件を満足するものとする. もし $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ が尖集合でないならば、$\{\mu_n\}$ は $(H^{\infty}(D))^*$ のノルムの意味で ϕ_λ に收斂するか、又は $\{\mu_n\}$ は内插的な部分列を含む.

§6. ファイバー環

$H^{\infty}(D)$ の $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ への制限を A_λ と書いてファイバー環と云ふ.

<u>定理 6.1.</u> A_λ は $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ 上の連続函数環の閉部分環で, その極大イデアル空間は $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ である.

証明. (1.1) と (2.6) により, 任意の $h \in A_\lambda$ に対し $f \in H^{\infty}(D)$ を, $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ 上では $f = h$, 且つ $\|f\|_D \leqq 48\|h\|$ なるやうに選ぶことが出来る. これから定理は明かである.

補題 6.2. Xをコンパクト空間, Bを$C(X)$の閉部分空間, EをXの閉部分集合とするとき, 次は同値である.

(i) $f \in B|_E$に対して, $M > 0$と$F_n \in B$ $(n = 1, 2, \cdots)$で次の性質を持つものが存在する: E上では$F_n = f$, $\|F_n\| \leqq M\|f\|_E$ 且つ $X \setminus E$の任意のコンパクト部分集合上では一様に$F_n \to 0$.

(ii) X上の測度μがBに直交すれば, $\mu|_E$もBに直交する.

(iii) $f \in B|_E$とし, pはX上の正値連続函数でE上では$|f| \leqq p$なるものとすれば, $F \in B$で次の性質を持つものが存在する: E上では$F = f$ 且つ X上では$|F| \leqq p$.

定理 6.3. $\mathfrak{M}_\lambda(D)$が尖集合でないとき, ϕ_λを$\mathfrak{M}_\lambda(D)$の中の特殊準同型とし, B_λをϕ_λの核とすれば, $B = B_\lambda$と$E = \mathfrak{M}_\lambda(D)$は(6.2)の諸性質を持つ.

証明. (6.2)の(i)を示す. $h \in B_\lambda$に対し$f \in H^\infty(D)$を$\mathfrak{M}_\lambda(D)$上では$f = h$であるやうにとり, λの開近傍Uを$\|f\|_{D \cap U} \leqq 2\|h\|$のやうにとる. そこで$F_n = T_{g_{\frac{1}{n}}}(f) + L_{\frac{1}{n}}(f)$とおけば, nが充分に大きいときは, $\|F_n\|_D \leqq 24\|f\|_{D \cap U} \leqq 48\|h\|$である. 又$\zeta \to \lambda$のときは

$$F_n(\zeta) - f(\zeta) = f(\zeta)\left(g_{\frac{1}{n}}(\zeta) - 1\right) + \frac{1}{\pi}\iint f(z)\left(\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z-\lambda}\right)\frac{\partial g_{\frac{1}{n}}}{\partial \bar{z}}\,dx\,dy \longrightarrow 0$$

であるから, $\mathfrak{M}_\lambda(D)$上では$F_n = f = h$. 又, 任意の$d > 0$に対し, $D \cap \{z : |z - \lambda| \geqq d\}$上では一様に$T_{g_{\frac{1}{n}}}(f) \to 0$であり, 更に

$L_{\frac{1}{n}}(f) \longrightarrow \phi_\lambda(f) = \phi_\lambda(h) = 0$ であるから、$\mathfrak{M}(D)\setminus\mathfrak{M}_\lambda(D)$ の任意のコンパクト部分集合上では一様に $F_n \to 0$ である。

<u>定理 6.4.</u> $\lambda\in\partial D$, $h\in A_\lambda$ とすれば, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $f\in H^\infty(D)$ で $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ 上では $f=h$, 且つ $\|f\|_D \leqq \|h\|+\varepsilon$ なるものが存在する。

証明. $\|h\|<1$ と仮定しても一般性は失はれない。もし先づ $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ は $H^\infty(D)$ の尖集合であるとすれば、(6.2) の性質が $X=\mathfrak{M}(D)$, $B=H^\infty(D)$, $E=\mathfrak{M}_\lambda(D)$ にあるから、f の存在は明かである。

次にもし $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ が尖集合でないならば、$S(z)=\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ ($|\alpha|<1$) を $S(\phi_\lambda(h))=0$ となるやうに選ぶ。このとき、$g=S\circ h$ とおくと, $g\in A_\lambda$, $\phi_\lambda(g)=0$, 且つ $|g|<1$ である。(6.2) と (6.3) によって、$G\in H^\infty(D)$ を $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ 上では $G=g$, 且つ $\|G\|_D<1$ のやうにとることが出来る。そこで, $f=S^{-1}\circ G$ とおけば、f は h の $H^\infty(D)$ の元への延長であって、$\|f\|<1$.

<u>系 6.5.</u> A_λ に対する $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ 上の擬双曲距離を ρ_λ とすれば、$\phi, \psi\in\mathfrak{M}_\lambda(D)$ に対して $\rho(\phi,\psi)=\rho_\lambda(\phi,\psi)$. 従て、$A_\lambda$ の part は $H^\infty(D)$ の part と $\mathfrak{M}_\lambda(D)$ の共通部分として表はされる。

参考文献

[1] A. Browder, *Point derivations on function algebras*, J.

Functional Analysis 1 (1967), 22–27.

[2] P. C. Curtis, Peak points for algebras of analytic functions, J. Functional Analysis 3 (1969), 35–47.

[3] T. Gamelin, Uniform algebras, Prentice-Hall, 1969.

[4] ———, Localization of the corona problem, to appear.

[5] ——— and J. Garnett, Distinguished homomorphism and fiber algebras, to appear.

[6] M. Hasumi, A remark on interpolation on finite open Riemann surfaces, Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. no. 1 (1968), 1–2.

[7] ———, A remark on the localization theorem in rational approximation, ibid. no. 2-2 (1970), 5–17.

[8] K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason parts, Ann. of Math. 86 (1967), 74–111.

[9] A. G. Vitushkin, Analytic capacity of sets and problems in approximation theory, Uspehi Mat. Nauk 22 (1967), 141–199.

[10] L. Zalcman, Analytic capacity and rational approximation, Lecture Notes in Math. #50, Springer, 1968.