数理解析研究所講究録
第 96 巻 1970 年 58-72

Banach function spaces について

岡山大理　越 昭三

序　(Ω, Σ, μ) を σ-finite measure space とし，その上の equivalent class は同一視して measurable function からなる Banach space L_ρ (ρ は norm) に関する表現定理と Szegő の定理について述べる。

§1 L_ρ　M^+ を非負可測関数の集合とし，その上で定義された $\bar{R}^+$ (non-negative extended real number) に値をとる ρ についてつぎの条件がみたされているものとする。

(1)　$0 \leqq \rho(f) \leqq +\infty$,　$\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$　$(f \in M^+)$

(2)　$\rho(\alpha f) = \alpha \rho(f)$　$(\alpha \geqq 0)$

(3)　$\rho(f+g) \leqq \rho(f) + \rho(g)$　$(f, g \in M^+)$

(4)　$f \leqq g \Rightarrow \rho(f) \leqq \rho(g)$

$L_\rho = L_\rho(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f \mid \rho(|f|) < \infty\}$ とし，ρ は L_ρ の norm となる。complete になるための条件として，

(5)　$f_n \uparrow f$ $(f_n, f \in M^+)$, $\sup_n \rho(f_n) < +\infty \Rightarrow \rho(f) < +\infty$ (W. F. P.)

$(\tilde{5})$　$f_n \uparrow f$ $(f_n, f \in M^+) \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$　(S. F. P.)

なる ρ (function norm) を考える。以下 $(\hat{5})$ ((5) は $(\hat{5})$ より弱い) をみたすものとし，更に $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$ (disjoint 和) として，$X \subset \Omega_B$，$\mu(X) > 0$ ならば $\rho(\chi_X) = +\infty$ なる性質を Ω_B はもち，${}^{\exists}\Omega_n \uparrow \Omega$，$\rho(\chi_{\Omega_n}) < +\infty$ となる Ω_A を定めることが出来る。trivial case を除くため Ω_B (purely infinite part) は measure 0 という仮定をつけておく。 (5) をみたす ρ は $(\hat{5})$ をみたす function norm と equivalent になる。 ρ に対して

$$\rho'(f) = \sup\left\{ \int_\Omega |fg|\, d\mu \;\middle|\; \rho(g) \leqq 1 \right\}$$

と定義すれば，ρ' は $(\hat{5})$ をみたす function norm である。

Ω が ρ に関して purely infinite part をもたなければ ρ' に関してももたない。このとき，$\Omega_n \uparrow \Omega$，$\rho(\chi_{\Omega_n}) < +\infty$ となる可測集合列 Ω_n を ρ-admissible というが，ρ-admissible であると同時に ρ'-admissible な Ω_n がとれる。更に $(\hat{5})$ をみたせば

$$\rho(f) = \rho''(f)$$

であり，又つぎの Hörder の不等式が成立する。

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu = \| f \cdot g \|_1 \leqq \rho(f)\rho'(g)$$

一般に $L_{\rho'} \subset L_\rho^*$ (L_ρ の Banach space としての dual)

§2 $\mathbb{B}(X, L_\rho)$ の表現

Banach space X から Banach function space L_ρ への連続な linear operator の全体を $\mathbb{B}(X, L_\rho)$ としておく。この operator が抽象的な additive set function と考えられることをみよう。

X^*をXのBanach dualとする。$\Sigma_0 = \{ E \in \Sigma \mid \rho(\chi_E) < +\infty \}$, $\Sigma_0' = \{ E \in \Sigma \mid \rho'(\chi_E) < +\infty \}$ とする。$\mathfrak{E}$はΩの有限分割の一部とし,$\mathfrak{E}$のメンバーE_i（iは有限）については$E_i \in \Sigma_0$, かつ$\mu(E_i) < +\infty$としておく。更に$f \in L_\rho$に対して

$$f_{\mathfrak{E}} = \sum_{\mathfrak{E}} \left(\int_{E_i} |f| \, d\mu / \mu(E_i) \right) \chi_{E_i}$$

ここでL_ρに関する性質（L）を導入する。

（L）　任意の$\mathfrak{E}$に対して　　$\rho(f_{\mathfrak{E}}) \leqq \rho(f)$

したがつて，分割$\mathfrak{E}$を細かくすると，$\rho(f_{\mathfrak{E}})$は increasing である。L_ρが（L）をもてば$\rho(\chi_E) \geqq \frac{\mu(E)}{\mu(E \cup F)} \rho(\chi_F)$（$E, F$は有限測度）であり，$0 < \mu(E) < \infty$ ならば $0 < \rho(\chi_E) < \infty$, 更に$\mu(E) < \infty$のとき$\mu(E) = \rho(\chi_E)\rho'(\chi_E)$. そこで$\Sigma_F = \{E \mid E \in \Sigma, \mu(E) < \infty\}$としたら$\rho$が（L）をもつとき

$$\Sigma_0 \cap \Sigma_F = \Sigma_0' \cap \Sigma_F$$

更にρが(L)をもてばρ'もまた(L)をもつ。

さて，additive set function $x^*(\cdot) : \Sigma_0' \to X^*$ を考える。$x^*(\cdot)$のvariationをつぎのように定義する。

$$V_\rho(x^*(\cdot)) = \sup_{\|x\| \leqq 1} \sup_{\mathfrak{E}} \rho\left(\sum_{\mathfrak{E}} [x^*(E_i)x / \mu(E_i)] \chi_{E_i} \right)$$

そこで$\mathbb{V}_\rho = \{ x^*(\cdot) \mid x^*(\cdot) : \Sigma_0' \to X^*,\ x^*(\cdot)x$ countably additive かつ $\mu(E) \to 0$ ならば $x^*(E) \cdot x \to 0$ かつ $V_\rho(x^*(\cdot)) < \infty \}$ とおくと，$\mathbb{V}_\rho$はV_ρをnormとするnormed linear spaceになる。

定理１　L_ρ が $(\tilde{5})$ をみたし，purely infinite part をもたないとき，性質（L）をもつならば

$$\mathbb{V}_\rho \cong \mathbb{B}(X, L_\rho)$$

証明　$T \in \mathbb{B}(X, L_\rho)$ とする。$x^*(\cdot)$ をつぎのように定義する。

$$x^*(E)x = \int_E (Tx)(\omega)\, d\mu(\omega) \qquad E \in \Sigma_0'$$

このとき，$x^*(\cdot) \in \mathbb{V}_\rho$ である。まず $x^*(\cdot)$ が定義できることは $|x^*(E)x| = |\int_E (Tx(\omega))\, d\mu(\omega)| \leqq \rho(Tx)\rho'(\chi_E) < \infty$ $(E \in \Sigma_0')$ から分る。更に $\|x^*(E)\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leqq 1} |x^*(E)x|$ $\leqq \sup_{\|x\| \leqq 1} \rho(Tx)\rho'(\chi_E) = \|T\| \cdot \rho'(\chi_E) < \infty$ から $x^*(E) \in X^*$.
$x^*(\cdot)x$ は countably additive で μ-continuous である。$\mathfrak{E}$ を分割としたとき，$\rho''((Tx)_{\mathfrak{E}}) = \rho''(\sum_{\mathfrak{E}} [x^*(E_i)x/\mu(E_i)]\chi_{E_i})$ $\leqq \rho''(Tx)$． 故に

$$\begin{aligned} V_\rho(x^*(\cdot)) &= \sup_{\|x\| \leqq 1} \sup_{\mathfrak{E}} \rho(\sum_{\mathfrak{E}} [x^*(E_i)x/\mu(E_i)]\chi_{E_i}) \leqq \sup_{\|x\| \leqq 1} \rho(Tx) \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

つぎに逆を証明する。$x^*(\cdot) \in \mathbb{V}_\rho$ として Radon-Nykodym を使って $x^*(E)x = \int_E f\, d\mu$ (for all $E \in \Sigma_0'$) で表わす。この f を $dx^*(\cdot)x/d\mu$ で表わす。そこで

$$Tx = dx^*(\cdot)x/d\mu$$

とおくと $T \in \mathbb{B}(X, L_\rho)$ がつぎのようにして云える。T が linear であることは容易に分る。

$$\int_E Tx\, d\mu = \int_E (dx^*(\cdot)x/d\mu)\, d\mu = x^*(E)x \quad (E \in \Sigma_0')$$

故に $(Tx)\cdot\chi_E \in L_1$ (for all $E\in\Sigma_0'$) であって, $\|Tx\cdot\chi_E\| = |x^*(E)x|$.
g が simple function すなわち $g=\sum\alpha_i\chi_{E_i}$, $E_i\in\Sigma_0'$ のときは
$Tx\cdot g\in L_1$ で

$$\|Tx\cdot g\|_1 \leqq \int\sum_i|\alpha_i|\,(|x^*(E_i)x|/\mu(E_i))\chi_{E_i}\,d\mu$$
$$\leqq \rho'(g)\,\rho\Big(\sum_i(x^*(E_i)x/\mu(E_i))\chi_{E_i}\Big)\leqq \rho'(g)\,V_\rho(x^*(\cdot))\|x\|$$

したがつて $M_{\rho'}'=\overline{\{f\in L_{\rho'}\mid f \text{ simple function}\}}\ni g\Rightarrow Tx\cdot g\in L_1$
M_{ρ}' の性質から $Tx\cdot g\in L_1$ (for all $g\in L_\rho'$) が分り, $Tx\in L_\rho$.
つぎに T が bounded operator を見よう。

$$\int|g|\,|Tx|\,d\mu=\int|g|\lim_{\varepsilon}\sum_{\varepsilon}(|x^*(E_i)x|/\mu(E_i))\chi_{E_i}\,d\mu$$

とくに $g\in L_{\rho'}$ が simple function のときは

$$=\lim_{\varepsilon}\int|g||(Tx)_\varepsilon|\,d\mu.$$

$$\rho(Tx)=\rho''(Tx)=\rho''(\lim_{\varepsilon}(Tx)_\varepsilon)=\sup_{\rho'(g)\leqq 1,\ g\ \text{simple}}\int\lim_{\varepsilon}|g|\cdot|(Tx)_\varepsilon|\,d\mu$$
$$=\sup_{\rho'(g)\leqq 1}\lim_{\varepsilon}\int|g|\sum_{\varepsilon}(|x^*(E_i)x|/\mu(E_i))\chi_{E_i}\,d\mu$$

を用いて,

$$\rho''(Tx)\leqq\sup_{\varepsilon}\rho''\Big(\sum_{\varepsilon}(|x^*(E_i)x|/\mu(E_i))\chi_{E_i}\Big)$$

したがつて, $\|T\|=\sup_{\|x\|\leqq 1}\rho(Tx)\leqq V_\rho(x^*(\cdot))$ 　　以上

§3 $\mathbb{B}(L_\rho, X)$ の表現

一般の L_ρ についてはよく分らない。$M_\rho=\overline{\{f\in L_\rho\mid f \text{ simple}\}}$
は L_ρ の closed linear subspace である。 $L_\rho=M_\rho$ の場合を
考える。X-valued set function $x(\cdot)$ に対して ρ'-variation
をつぎのように定義する。

$$W_{p'}(x(\cdot)) = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \sup_{\mathcal{E}} \rho'\left(\sum_{\mathcal{E}} [x^* x(E)/\mu(E_i)]\, \chi_{E_i}\right)$$

を norm として，つぎの normed linear space を考える。

$$\overline{W}_{p'} = \{ x(\cdot) \mid x(\cdot) : \Sigma_0 \to X,\ x(\cdot) \text{ finitely additive},\ \mu(E)=0 \Rightarrow$$
$$x(E)=0,\ \overline{W}_{p'}(x(\cdot)) < \infty \}$$

$x(\cdot)$ に関する積分を定義しよう。

f を simple function すなわち $f = \sum_i \alpha_i \chi_{E_i}$ $(E_i \in \Sigma_0)$ のとき，$\int_E f\,dx = \int_E (\sum_i \alpha_i \chi_{E_i})\,dx = \sum_i \alpha_i\, x(E_i \cap E)$ と定める。

f を measurable function とし，つぎの性質をもつ simple function の列 f_n がみつかるとき f を $x(\cdot)$ integrable という。

(1) $f_n \to f$ in $x(\cdot)$ measure

(2) $\lambda_n(E) = \int_E f_n\,dx$ のとき，$\lambda_n(E)$ は uniformly absolutely continuous $(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \|x\|(E) < \delta \Rightarrow \|\lambda_n(E)\| < \varepsilon\ (n=1,2,\cdots))$

(3) $\lambda_n(E)$ は equi-continuous $(\forall \varepsilon > 0\ \exists E_\varepsilon \in \Sigma,\ \forall G \subset \Omega - E_\varepsilon,$
$G \in \Sigma,\ \|\lambda_n(G)\| < \varepsilon\ (n=1,2,\cdots))$

ただし，variation はつぎの形で入れる。

$$\|x\|(E) = \sup_{\mathcal{E}} \{ \|\sum_{\mathcal{E}} \alpha_i\, x(E_i)\| \mid |\alpha_i| \leq 1,\ E \supset E_i \text{ disjoint} \}$$

このとき，$\lambda_n(E) \to \lambda(E)$ (X の norm 位相で) がいえるので $\lambda(E) = \int_E f\,dx$ と表わし，f の $x(\cdot)$ による積分という。

定理２ $f \in M_p$，$x(\cdot) \in \overline{W}_{p'}$ のとき，f は $x(\cdot)$ integrable.

証明　g が simple function のとき，つぎの不等式が成立する。

(A)　$\| \int_E g\, dx \| \leqq \rho(g \chi_E) W_{\rho'}(x(\cdot))$

(B)　$\| \int_E g\, dx \| \leqq \|x\|(E) \cdot \|g\|_\infty$

(C)　$\|x\|(E) \leqq W_{\rho'}(x(\cdot))\, \rho(\chi_E)$

$0 \leqq f \in M_\rho$ のとき $\exists f_n$ simple function $0 \leqq f_n \uparrow f,\ \rho(f - f_n) \to 0.$

$T_n^\alpha = \{\omega \mid f(\omega) - f_n(\omega) \geqq \alpha\}$ $(\alpha > 0)$ とおくと，

$\|x\|(T_n^\alpha) \downarrow$ であり，不等式(C) より

$\|x\|(T_n^\alpha) \leqq W_{\rho'}(x(\cdot))\, \rho(\chi_{T_n^\alpha}) \leqq W_{\rho'}(x(\cdot))\, \rho(\chi_{T_n^\alpha}) < +\infty$

から $\|x\|(T_n^\alpha)$ は有限値に収束する。これが 0 に収束すれば

$f_n \to f$ in $x(\cdot)$ measure である。$\lim\limits_{n\to\infty} \|x\|(T_n^\alpha) = S_\alpha > 0$ と

仮定すると，$\rho''(f_n - f) = \sup\{ \int |h||f - f_n| d\mu \mid \rho'(h) \leqq 1 \}$

$\geqq \int |f_n - f| \cdot | \sum [\alpha_i x^* x(E_i)/\mu(E_i)] \chi_{E_i} / W_{\rho'}(x(\cdot)) | d\mu$

ここに $|\alpha_i| \leqq 1$，E_i は T_n^α の partition で $S_\alpha + \varepsilon \geqslant \| \sum \alpha_i x(E_i) \| \geqslant S_\alpha$

$\geqq (\alpha / W_{\rho'}(x(\cdot))) \int | \sum (\alpha_i x^* x(E_i)) / \mu(E_i) \cdot \chi_{E_i} | d\mu \qquad \|x^*\| \leqq 1$

$= (\alpha / W_{\rho'}(x(\cdot))) \sum |\alpha_i x^* x(E_i)| \geqq (\alpha / W_{\rho'}(x(\cdot))) |x^*(\sum \alpha_i x(E_i))|$

$\exists x^*,\ \|x^*\| = 1 \quad |x^*(\sum_i \alpha_i x(E_i))| = \| \sum_i \alpha_i x(E_i) \|_X$ (Hahn-Banach)

故に n を十分大とすると上の不等式から

$\rho''(f - f_n) \geqq \alpha S_\alpha / W_{\rho'}(x(\cdot))$

一方　$\rho(f - f_n) = \rho''(f - f_n) \to 0$ から矛盾し，$S_\alpha = 0$ すなわち

$f_n \to f$ in $x(\cdot)$ measure が云える。

f_n に関する $\lambda_n(E)$ が uniformly absolutely continuous になる

ことは，前に述べた不等式 (A), (B) から見易い。

つぎに $\lambda_n(E)$ が equi-continuous になることを見るには $n \geqq N$ のとき $\rho(f-f_n) < \varepsilon / W_{\rho'}(x(\cdot))$ が成立する N について $f_1, f_2, \cdots, f_N$ の support の各々の union を E_ε とおくと，不等式 (A) をもちいて

$$\|\lambda_n(E_\varepsilon)\| \leqq \rho(f_n \chi_{E_\varepsilon}) W_{\rho'}(x(\cdot)) < +\infty$$

であり，$G \in \Sigma_0$, $G \subseteq \Omega - E_\varepsilon$ ならば

$$\|\lambda_n(G)\| \leqq \rho(f_n \chi_G) \cdot W_{\rho'}(x(\cdot))$$

より，

$$\|\lambda_n(G)\| \leqq \rho((f-f_N)\chi_G) W_{\rho'}(x(\cdot)) < \varepsilon \quad (n=1, 2, \cdots)$$

を得る。したがつてこのとき，任意の M_ρ の要素 f は $x(\cdot)$ に関する積分が定義できる。

定理3 ρ が (L) をもてば $\mathbb{B}(M_\rho, X)$ と $\overline{W}_{\rho'}$ とは対応

$$Tf = \int f \, dx$$

で isomorph になる。また $\|T\| = W_{\rho'}(x(\cdot))$

証明 $x(\cdot) \in \overline{W}_{\rho'}$ のとき，$Tf = \int f \, dx$ とおけば T は linear operator になることは明白である。h が simple function のとき，

$$\left\|\int h \, dx\right\| \leqq \rho(h) W_{\rho'}(x(\cdot)).$$

$$\|T\| = \sup\{\|Th\| \mid \rho(h) \leqq 1, \ h \text{ simple function}\}$$

$$= \sup\left\{\left\|\int h \, dx\right\| \mid \rho(h) \leqq 1, \ h \text{ simple function}\right\} \leqq W_{\rho'}(x(\cdot))$$

逆に $T \in \mathbb{B}(M_\rho, X)$ のとき $x(\cdot): \Sigma_0 \to X$ をつぎのように定める。 $x(E) = T(\chi_E)$

$\mathcal{E}$ を分割とし, $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$ のとき, $h = \sum_j \beta_j \chi_{F_j}$ (simple) としたとき,

$$\int |h| \sum_{\mathcal{E}} (|x^* x(E_i)|/\mu(E_i)) \chi_{E_i} d\mu = \sum_i \alpha_i \left[\sum_j (|\beta_j| \mu(E_i \cap F_j)/\mu(E_i)) x^* x(E_i) \right]$$

$$= x^* \left(\sum_i \alpha_i \left[\sum_j |\beta_j| \mu(E_i \cap F_j)/\mu(E_i) x(E_i) \right] \right) \leq \| \int g\, dx \|_X$$

ただし, $g = \sum_i \alpha_i \left(\int_{E_i} |h| d\mu / \mu(E_i) \right) \chi_{E_i}$, α_i は $|\alpha_i| = 1$, $\alpha_i x^* x(E_i) = |x^* x(E_i)|$ とする。 また $\rho(g) \leq \rho(h)$ である。

$$\rho' \left(\sum_{\mathcal{E}} (|x^* x(E_i)|/\mu(E_i)) \chi_{E_i} \right) = \sup \left\{ \int |h| \sum_{\mathcal{E}} (|x^* x(E_i)|/\mu(E_i)) \chi_{E_i} d\mu \right.$$

$$\left. \mid \rho(h) \leq 1,\ h \text{ simple function} \right\} \leq \sup \left\{ \| \int g\, dx \|_X \mid \rho(g) \leq 1,\ g \text{ simple} \right\}$$

$$= \| T \|$$

故に, $W_{\rho'}(x(\cdot)) \leq \| T \|$

§4 L_ρ^* の表現

$$\tilde{L}_\rho = \{ f \mid f = \bigcup_{i=1}^n f_i,\ f_i \geq 0,\ \rho(f_i) \leq 1 \text{ for some } n \}$$

とおき, $N_\rho = L_\rho / M_\rho$ とおき, canonical map を $\lambda : L_\rho \to N_\rho$ として, つぎの条件を考えよう。

(I) $\lambda(\tilde{L}_\rho)$ は N_ρ の closed unit ball に入る。

ρ が条件(I) をみたしているとき, N_ρ^* は abstract L-space になり, このとき $Z^* \in N_\rho^*$, $Z^* \geq 0$ に対する norm は

$$\| Z^* \| = \sup \{ | Z^*(\lambda(f)) | \mid f \in \tilde{L}_\rho \}$$

で与えられる。

N_p^*の表現を考える。$B(\Omega, \Sigma, \mu)$ を bounded additive set function on Σ (μ-null set で 0 になる) の全体を表わす。$\nu \in B(\Omega, \Sigma, \mu)$に対して $\|\nu\| = \sup\{ \sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| \mid \{E_i\} \subset \Sigma$, 互に disjoint $\}$ で normを定義する。また $0 \leqq \psi \leqq |\nu|$で ψ が countably additive なら $\psi = 0$ となる ν の全体を $PB(\Omega, \Sigma, \mu)$で表わす。実は N_p^* が $PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ の closed linear subspace になる。$Z^* \in N_p^*$ とし

$Z^* \geqq 0$ のとき $\nu(E) = \| Z_E^* \|$, $Z_E^*(\lambda(f)) = Z^*(\lambda(f \cdot \chi_E))$

とすると $\nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ が分る。$0 \leqq \nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ と $0 \leqq f \in L_p$ に対して

$$I_\nu(f) = \inf\{ \sum_{i=1}^{n} \|\lambda(f \chi_{E_i})\| \nu(E_i) \mid \{E_i\} \text{ は } \Omega \text{ の partition} \}$$

と定義すると

$$I_\nu(\alpha f) = \alpha I_\nu(f)$$

$$0 \leqq f \leqq g \Rightarrow I_\nu(f) \leqq I_\nu(g)$$

$$0 \leqq I_\nu(f) \leqq \|\lambda(f)\| \nu(\Omega)$$

$$I_\nu(f+g) = I_\nu(f) + I_\nu(g)$$

$$I_{a\nu + b\varphi}(f) = a I_\nu(f) + b I_\varphi(f)$$

が成立する。このとき $\nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ に対して $Z^*(\lambda(f)) = I_\nu(f)$ とすれば $Z^* \in N_p^*$ となる。positive でない $Z^* \in N_p^*$のとき,

$$\nu(E) = \|(Z_E^*)^+\| - \|(Z_E^*)^-\|$$

とおけば $\nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$であって, このような ν の全体を $P_{p'}$ で表わすと, 今のべた議論から N_p^* と $P_{p'}$ とは isomorphic

になる。

定理4　ρが (L)と(I) とをみたすとき

$$L_\rho^* \cong \mathbb{W}_{\rho'} \times P_{\rho'}$$
（$\mathbb{W}_{\rho'}$ を定義する X を scalar とする。）

ここで norm は $\|(G, \nu)\| = W_{\rho'}(G) + |\nu|(\Omega)$ で定義する。

つぎに M_ρ^* について考えよう。

ν を set function として

$$\|\nu\| = \sup\{\, |\textstyle\int f\, d\nu| / \rho(f) \mid f \text{ simple} \in M_\rho \,\}$$

としたとき，

$$\mathbb{V} = \{\, \nu \mid \nu \text{ additive set function on } \Sigma_0,\ \mu\text{-null set で } 0,\ \|\nu\| < +\infty \,\}$$

とおく。$x^* \in M_\rho^*$ のとき Σ_0 上の additive set function が存在して $x^* f = \int_\Omega f\, d\nu$（Dunford-Schwarz の積分）が定義できる。そして $\mathbb{V} \cong M_\rho^*$ となる。

$\mathbb{V} \times P_{\rho'}$ 上の norm を

$$\|(\nu, \varphi)\| = \|\nu\| + |\varphi|(\Omega)$$

とおけば

定理5　ρが条件(I)をみたすとき $L_\rho^* \cong \mathbb{V} \times P_{\rho'}$

ここで $x^* \in L_\rho^*$ ならば

$$x^* f = \int f\, d\nu + I_\varphi(f)$$

と書くことができる。

一般的に云えば $L_p^* \cong M_p^\perp \oplus M_p^\perp$ の orthogonal complement で $M_p^\perp$ の orthogonal complement $\cong M_p^*$ である。

また countably additive set function の全体を C とすれば $C \cong L_{p'}$ であるが、C と $\mathbb{V}$ とは一般には異なる。

§5 Szegö の定理

ここで Ω は compact Hausdorff space とし、L_ρ が Orlicz 空間である場合を考える。Φ, Ψ を complementary Young 関数として、μ は regular Borel measure で $\mu(X)=1$ とする。

$$M_\Phi(f) = \int \Phi(|f|)\, d\mu$$

とし、$\|f\|_\rho = \inf\limits_{c>0} \dfrac{1+M_\Phi(cf)}{c}$, $\|f\|_{(\rho)} = \inf\limits_{c>0,\, M_\Phi(cf)\leqq 1} \dfrac{1}{c}$

と function norm ($\|\cdot\|_\rho$ と $\|\cdot\|_{(\rho)}$ とは equivalent) を定める。

Ω 上の有界 Borel function の集まり B が log-set とは

(1) $cf \in B$ for $c \geqq 0$, $f \in B$

(2) uniform closure $\{\log|f| \mid f \in B\}$ は real-valued continuous function on Ω を含む。

今 Φ の derivative φ が連続であると仮定する。$u\varphi(u)$ $(u \geqq 0)$ の逆関数を M で表わすと

$$u\varphi(u) = \Phi(u) + \Psi(\varphi(u))$$

から μ-integrable $h \geqq 0$ に対して

$$(*) \quad \int_\Omega h\, d\mu = M_\Phi(M(h)) + M_\Psi(\varphi(M(h)))$$

が成立する。このとき $M(h) \in L_\rho$ であり $\varphi(M(h)) \in L_{\rho'}$ である。

さて測度 m が μ に関して absolutely continuous のとき,

$$M_{\Psi}(\varphi(M(\alpha_m \tfrac{dm}{d\mu}))) = 1$$

$$M_{\Psi}(M(\beta_m \tfrac{dm}{d\mu})) = 1$$

となる positive numbers α_m, β_m が (*) から存在する。

任意の log-set B に対してつぎの定理が成立する。

定理 6　m が μ に関して absolutely continuous のとき

$$\inf\{\|f\|_p \mid f \in B \cap D_m^+\} = \alpha_m \exp\left(-\int_\Omega \log M(\alpha_m \tfrac{dm}{d\mu})\,dm\right)$$

$$\inf\{\|f\|_{(p)} \mid f \in B \cap D_m^+\} = \exp\left(-\int_\Omega \log M(\beta_m \tfrac{dm}{d\mu})\,dm\right)$$

となり, m が μ に関して singular のときはそれぞれ 0 となる。

ここで $D_m^+ = \{f \mid \text{bounded Borel function}, \int_\Omega \log|f|\,dm \geqq 0\}$ である。

定理が成立する理由の一つは m が μ に関して absolutely continuous のとき, すべての $c \geqq 0$ に対して $\int_\Omega \log M(c\frac{dm}{d\mu})\,dm > -\infty$ が示されるからである。

A を uniformly closed subalgebra of $C(\Omega)$ とする。$A \ni 1$ と $\{\log|f|, f \text{ invertible in } A\}$ が real-valued continuous function の集合の中で dense とする。(uniform converge の位相で) m を regular Borel measure on Ω で multiplicative とする。すなわち $\int_\Omega fg\,dm = \int_\Omega f\,dm \cdot \int_\Omega g\,dm$ for $f, g \in A$.

このような A を logmodular algebra というが, logmodular algebra は log-set である。 $A_0=\{f \mid f\in A, \int_\Omega f\,dm=0\}$ とおく。

定理７　A を log-modular algebra で m を multiplicative measure on A とする。m が μ に関して absolutely continuous ならば

$$\inf\{\|1-f\|_p \mid f\in A_0\} = a_m \exp\left(-\int_\Omega \log M\left(a_m \frac{dm}{d\mu}\right) dm\right)$$

$$\inf\{\|1-f\|_{(p)} \mid f\in A_0\} = \exp\left(-\int_\Omega \log M\left(\beta_m \frac{dm}{d\mu}\right) dm\right)$$

m が μ に関して singular ならば、それぞれともに 0 になる。

以上は Szegő の定理を L_p（Orlicz ではあるが）で考えたものである。

references

1 T. Ando　Linear functionals on Orlicz spaces　Nieuw. Arch. Wisk 1–16 8 (1960)

2 R. G. Bartle　A general bilinear vector integral Studia Math. 15 (1956)

3 N. Dunford – J. T. Schwartz　Linear operators I

4 H. W. Ellis – I. Halperin　Function spaces determined by a levelling length function. Can. J. Math 5 (1953)

5 N. E. Gretsky　Representation theorems on Banach function spaces. Mem. Amer. Math. Soc. 84

6 K. Hoffman　Banach spaces of analytic functions 1962.

7 S. Koshi On semi-continuity of functionals I
Proc. Japan Acad. 34 (1958)

8 G. G. Lorenz - D. G. Wertheim Representation of linear functionals on Köthe spaces
Can. J. Math. 5 (1953)

9 W. A. J. Luxemburg Banach function spaces Delft. 1955

10 K. Urbanik Szegő's theorem for Orlicz spaces
Bull. Acad. Pol. Sci 14 (1966)