数理解析研究所講究録
第96巻 1970年 73-80

位相空間上の測度について

東京女子大 雨宮一郎

一般の位相空間上のRadon測度については、[1]、[2]等で論ぜられている。こゝでは、少し條件を弱くしたPre-Radon測度を定義し、基本的な性質をしらべ、局所compact空間上の測度の概念の拡張として、ある意味でRadon測度より自然であることを示す。

§1. 一般の測度についての諸定義

集合X上の測度μとは、Xの部分集合の環$\mathcal{R}$上で定義された非負実数値をとる加法的函数で、條件

(1) $\mathcal{R} \ni B_n \uparrow_n B$, $\sup_n \mu(B_n) = \lambda < +\infty \Rightarrow B \in \mathcal{R}$, $\mu(B) = \lambda$.

(2) $\mathcal{R} \ni B$, $B \supset C$, $\mu(B) = 0 \Rightarrow C \in \mathcal{R}$

を満足するものとする。

集合族$\mathfrak{A}$で定義された函数ρに対し、$\mathcal{R} \supset \mathfrak{A}$で$\mathfrak{A}$上で$\mu$が$\rho$と一致するとき、$\mu$は$\rho$の拡大であるという。

μが、μの$\mathfrak{A}$への制限の最小拡大になっているとき、μは$\mathfrak{A}$で定義されるということにする。

Xの部分集合Aが、任意の$B\in\mathcal{B}$に対して、$A\cap B\in\mathcal{B}$となるとき、μで可測という。

Xが互いに共通点のない$B_\lambda\in\mathcal{B}$, $\lambda\in\Lambda$ に分割され、任意の$B\in\mathcal{B}$に対して、$\mu(B)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\mu(B_\lambda\cap B)$ となっている時μは分割可能であるという。

$\mathcal{B}$から$\mathcal{B}$の中への写像φで、(i) $\varphi(B)\subset B$, (ii) $B\supset C\Rightarrow\varphi(C)\sim\varphi(B)\cap C$ ($\sim$は零集合をのぞいて一致すること)を満足するものに対して、常に、μで可測なAが存在して、すべての$B\in\mathcal{B}$に対して、$\varphi(B)\sim B\cap A$ となっているとき、μは局所化可能であるという。

μの局所化可能性は、μに対してRadon-Nykodimの定理が成立することと同等であり、$L^1(\mu)$のdualが$L^\infty(\mu)$になることとも同等である。

Xの部分集合Aに対して、μで可測なCで、$C\supset A$, $C-A\supset B$, $B\in\mathcal{B}\Rightarrow\mu(B)=0$ となるものを、Aの極小可測被覆という。

μが分割可能ならば、局所化可能であり、局所化可能ならば、すべての部分集合に、極小可測被覆が存在する。

§2 Pre-Radon 測度

Xが位相空間であるとき、次の條件(1)–(3)を満足するX

この測度μを、Pre-Radon測度という。

(1) μはXの開集合の基によって定義されている。

(2) 開集合Uが有限可測な開集合の和集合になっていて、その中の有限個の和集合の測度の上限が有限のときは、Uも有限可測で、$\mu(U)$はその上限に等しい。

(3) 有限可測な開集合の測度は ~~有限のとき~~ その中にふくまれる開集合の測度の上限に等しい。

条件(3)はXが正則のときは、(1), (2)からの帰結である。
Pre-Radon測度は常に分割可能である。
X上のPre-Radon測度が次の条件(R)を満足するとき、Radon測度という。

(R) 有限可測の集合の測度はその中にふくまれるcompact集合の測度の上限である。

X上のPre-Radon測度の間に、順序と線形結合が自然に定義され、その全体は、条件付完備な線形束の正部分をなし、Radon測度の全体はその直和因子である。故に任意のPre-Radon測度は、Radon測度と、Radon測度に対して特異な測度との和であらはされる。後者はすべてのcompact集合で0となる測度である。

X上の開集合の基で定義される測度が、すべてPre-Radon(Radon)測度に拡大出来るとき、XをPre-Radon space (Radon space)という。(Radon spaceは[2]で定義されているが、そこでは

なお、Lindölef の性質を持つ Radon space のことを "fortement radonien" と呼んでいる。

pre-Radon でない Hausdorff space があるかどうか分らない。discrete の場合は Ulam の問題である。paracompact の場合も discrete の場合に帰着される。

Radon space であるかどうかは、Ulam の問題に関係するので、位相空間 X の class で條件

(*) X 上のすべての pre-Radon 測度が Radon 測度である。

を満足するものを考へる方が意味があるであらう。局所 compact な空間、完備な距離空間はこの class に属する。

§3. 測度の制限と拡大

X 上の pre-Radon 測度 μ の X の部分集合 A への制限 μ_A を次のように定義することが出来る。

(1) A が μ で可測のとき、

通常の意味での μ の A への制限は一意的に A 上の pre-Radon 測度に拡大出来る。

(2) X が A の極小可測被覆であるとき、

X の有限可測な集合 B と A の共通部分に対して、

$$\mu_A(B \cap A) = \mu(B)$$

と定義すれば、μ_A は A 上の pre-Radon 測度である。

(3) 一般の場合.

A の極小可測被覆 C を考へ. (1) により μ_C を、(2) により、μ_C の A への制限を考へればよい。結果は C のとり方に依存しない。

X から位相空間 Y への連続な写像 f があるとき、Y 上の pre-Radon 測度 ν で、ν で有限可測な開集合 V に対して常に、

$$\nu(V) = \mu(f^{-1}(V))$$

が成立するものが存在すれば それは唯一つである。これを μ の f による像という。即ち、$\nu = f(\mu)$。

$f(\mu)$ が存在するための必要充分條件は、Y の任意の点 y にある近傍 V があって、$f^{-1}(V)$ が μ で有限可測となることである。

特に $X \subset Y$ のとき、including map を f とした時、上のような近傍 V が存在するような点 y の全体を Y_0 とすれば、Y_0 は Y の開集合で、X 上の測度 μ は Y_0 上の測度に拡大することが出来る。μ が有界のときは、常に $Y_0 = Y$ である。

Y_0 上に拡大された測度について、Y_0 は X の極小可測被覆でその X への制限が、μ になっている。

Radon 測度の像は常に Radon 測度であり、X 上の Radon

測度μの部分集合Aへの制限μ_AがRadon測度になるための必要充分条件はAがμで可測となることである。

Xが完全正則であるとき、Xをcompactな空間Yの部分集合と考へれば、X上のpre-Radon測度μはYの開集合Y_0まで拡大されるが、Y_0は局所compactであるから、その拡大はRadon測度で、μがRadon測度であるための必要充分条件は、XがY_0の中で、μの拡大によって可測となることである。

このことによって、Xが完全正則の場合、pre-RadonおよびRadon測度の定義とすることが出来る。

§4. 直積

二つの位相空間X, Y上にそれぞれpre-Radon測度、μ, νがある時、$X\times Y$上のμとνの直積測度はpre-Radon測度に一意的に拡大することが出来る。μ, νともにRadon測度である時に限って、その直積もRadon測度である。

X_λ $(\lambda\in\Lambda)$上に全測度1のpre-Radon測度μ_λが与へられたとき、μ_λの直積測度は、$\prod_\lambda X_\lambda$上のpre-Radon測度に一意的に拡大することが出来る。これがRadon測度になるための必要充分条件は、μ_λがすべてRadon測度で、可算個をのぞいた、すべてのλについて、μ_λの台がcompactになるこ

とである。

X_λ が皆完全正則であるときは、各 X_λ を compact 空間 Y_λ に埋込み、各 μ_λ を Y_λ 上の測度 $\bar{\mu}_\lambda$ に拡大したとき、$\prod_\lambda Y_\lambda$ 上の $\bar{\mu}_\lambda$ の直積を $\prod_\lambda X_\lambda$ に制限したものが μ_λ の直積である。この場合、$\prod_\lambda Y_\lambda$ は $\prod_\lambda X_\lambda$ の極小可測被覆になっている。

一例として、Λ が非可算で各 $X_\lambda=(0,1)$、μ_λ は $(0,1)$ 上の Lebesgue 測度としたとき、μ_λ の直積は、すべての compact 集合に対して、測度が 0 となり、Radon 測度に対して特異な pre-Radon 測度の例を与へている。

§5. 連続函数上の線形汎函数としての特徴付

X が完全正則であるとき、X 上の連続函数全体 $C(X)$ の線形束としての ideal で、任意の X の点で 0 でない函数を含むものを、order-dense な ideal と呼ぶことにする。

X 上の pre-Radon 測度 μ で、積分可能な連続函数全体 J_μ は、$C(X)$ の order-dense な ideal であり、対応

$$J_\mu \ni f \longrightarrow \int f\, d\mu$$

は順序で連続、即ち、$0 \leqq f_\lambda \ \lambda\in\Lambda \quad f_\lambda \downarrow_{\lambda\in\Lambda} 0$ ならば $\mu(f_\lambda)\downarrow_\lambda 0$ が成立する。

逆に $C(X)$ の order-dense な ideal J 上で順序連続な正の線形汎函数 φ に対し、$J_\mu \supset J$ となる pre-Radon 測度 μ で

$J \ni f$ に対し、

$$\int f \, d\mu = \varphi(f)$$

となるものが一意的に定まる。

J 上の順序連続な正線形汎函数の全体を $\mathfrak{M}_J$ とすれば、$\mathfrak{M}_J$ には、線形汎函数としての、条件付完備な線形束の正部分としての構造が入る。$J_1 \supset J_2$ のとき、$\mathfrak{M}_{J_1}$ から $\mathfrak{M}_{J_2}$ への制限による写像は一対一であるから、

$$\mathfrak{M}_{J_1} \subset \mathfrak{M}_{J_2}$$

と考へることが出来、X 上の pre-Radon 測度の全体は、

$$\mathfrak{M} = \bigcup_J \mathfrak{M}_J$$

と考へることが出来る。

$\mathfrak{M}$ も、$\mathfrak{M}_J$ の inductive limit として条件付完備な線形束の正部分と考へられ、この構造は §2 でのべたものと一致している。

X が局所 compact のときは、台が compact な連続函数の全体 J_0 は、$C(X)$ の最小な order-dense ideal であるから、

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{J_0}$$

となり、しかも Dini の定理によつて、J_0 上のすべての正の線形汎函数が順序連続になつている。

[1] L. Schwartz ; Les Mesures de Radon dans les espaces topologiques arbitraires. Paris 1964～65.

[2] N. Bourbaki ; Intégration, Chap. IX. 1969.