数理解析研究所講究録
第97巻1970年1-15

自由流の安定性

東大 宇宙研　神部 勉

はしがき

この小論の内容は線型安定論であって，次の3つに大別される．

I．非粘性，2次元流と軸対称流の安定性．

II．大域的な粘性解．

III．IIに相当する数値解．

縮まない流体に対して，線型安定論はNavier-Stokes方程式

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{R}\nabla^2\mathbf{V}$$

および連続の式

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0$$

の定常な解を主流とし，それに小さな攪乱を加えて，それが増大するか減衰するかを調べることにある．そしてそのときの主要な問題は小攪乱に対する線型方程式を解くことである

上の方程式は代表的な長さLおよび速度Uで無次元化して

あり，Rはレイノルズ数 UL/ν である．

I．非粘性，2次元流と軸対称流の安定性

ここでは粘性がないとして，2次元流および軸対称流の安定特性をいくつか比較しながら列挙してみる．

I－1．不安定のための必要条件

主として軸対称流の場合について述べ，後で2次元流に対して簡単に記す．

円柱座標系（x，r，ϕ）での主流の速度を（$U(r), 0, 0$）とし，流体の全速度を

$$\boldsymbol{V} = (U + u_x,\ u_r,\ u_\phi)$$

とする．ここで速度の微小撹乱 u_x, u_r, u_ϕ は

$$u_x, u_r, u_\phi \propto e^{in\phi + i\alpha(x-ct)} \qquad (c = c_r + ic_i)$$

という形で表わせると仮定する．α を正の実数とするとき，c_i の正，零，負に従って，撹乱は増大，中立，減衰を示すことになる．いま

$$u_r = G(r)\, e^{in\phi + i\alpha(x-ct)}$$

とおくと，$G(r)$ に対する方程式として

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{r}{n^2+\alpha^2 r^2}\frac{d}{dr}(rG)\right\} - G - \frac{rG}{U-c}Q' = 0\ , \qquad (1)$$

$$Q = \frac{rU'}{n^2+\alpha^2 r^2} \qquad (2)$$

を得る（$'$はrについての微分を表わす）.

$n=0$のときには，次のように式はもっと簡単になる，

$$\Delta_\alpha G - \frac{W}{U-c} G = 0, \tag{3}$$

$$W = \alpha^2 r Q'_{n=0} = U'' - \frac{1}{r}U', \tag{4}$$

$$\Delta_\alpha = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \alpha^2. \tag{5}$$

不安定のための必要条件を得るために，(1)にrG^*（$*$は複素共役の意味）をかけ，その虚部をとると

$$\frac{dS_a}{dr} = c_i Q' \left|\frac{rG}{U-c}\right|^2 \tag{6}$$

ただし

$$S_a = \frac{r}{n^2+\alpha^2 r^2} I_m(rG^* rG') \tag{7}$$

をうる．これをrについて0から∞まで積分すると境界条件のために左辺はゼロとなり，

$$c_i \int_0^\infty Q' \left|\frac{rG}{U-c}\right|^2 dr = 0 \tag{8}$$

がなりたつ．この式は$c_i=0$，あるいはQ'が領域のどこかで符号を変えなければならないことを意味している．あるいは言い換えると，不安定のための必要条件として，Q'が領域のどこか適当な所で符号を変えなければならないという結論に達する（Batchelor & Gill [1]）.

不安定のときには$Q'=0$がどこかでなりたつことになるが，その意味は$n=0$の場合にはわかりやすい．このとき

$$Q' = (U'' - \frac{1}{r}U')/\alpha^2 r.$$

いま主流を vortex ring の集合体と考えるとすると，vortex は強さ$U'(r)$で分布していることになる．もしr_0にあった vortex ring が$r_0+\Delta r$に移動したとすると，ring の伸びによって vorticity が変り，その変化は

$$\Delta\omega_1 = U'\Delta r/r_0$$

である．この移動が起る前の$r_0+\Delta r$とr_0における vorticity の強さの差は

$$\Delta\omega_2 = U'(r_0+\Delta r) - U'(r_0) = U''\Delta r,$$

vortex の移動の後も$r_0+\Delta r$での vorticity が変化ないとすると

$$\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2$$

$$\therefore\ Q'(r_0) = 0$$

を得る．いまr_0の近傍で，その前後の vortex ring を交換するような撹乱があったとすると，交換の後も vorticity の変化はない．これは中立撹乱に相当する．2次元流の場合によく知られているように，ある波数α_0で中立撹乱があるならば，その近傍にはふつう増大撹乱が存在する．2次元の場合のこれに関する詳しい議論は Lin [2] にある．

2次元流

微小撹乱の流れの関数を

$$\Psi(x,y) = \phi(y)\,e^{i\alpha(x-ct)}$$

とおくと
$$\Delta_2 \psi - \frac{U''}{U-c}\psi = 0 \tag{9}$$
$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \tag{10}$$

をうる．また(6)，(7)，(8)に対応して
$$\frac{dS_2}{dy} = c_i U'' \left|\frac{\psi}{U-c}\right|^2 \tag{11}$$
$$S_2 = I_m(\psi^* \psi) \tag{12}$$
$$c_i \int_{-\infty}^{\infty} U'' \left|\frac{\psi}{U-c}\right|^2 dy = 0 \tag{13}$$

となる．vartex filamentを交換してもvorticityに変化がない点y_0があるとすると，$U''(y_0) = 0$ となる．変曲点をもつ速度分布は不安定であるというのは周知の事実である．

I - 2. Howardの半円定理

この節では $c_i \neq 0$ とする．(9)において $\psi = (U-c)f$ とおくと
$$\frac{d}{dy}\left\{(U-c)^2 \frac{df}{dy}\right\} = \alpha^2 (U-c)^2 f \tag{14}$$

をうる．これにf^*をかけて積分すると
$$\int_{-\infty}^{\infty} (U-c)^2 \Phi \, dy = 0,$$
$$\Phi = |f'|^2 + \alpha^2 |f|^2.$$

これを実部と虚部にわけると
$$\int U \Phi \, dy = c_r \int \Phi \, dy,$$
$$\int U^2 \Phi \, dy = \int (2c_r U - c_r^2 + c_i^2) \Phi \, dy = (c_r^2 + c_i^2) \int \Phi \, dy.$$

$a \leqq U(y) \leqq b$ とすると

$$0 \geqq \int (U-a)(U-b)\Phi\, dy$$
$$= \left[\left\{c_r - \frac{1}{2}(a+b)\right\}^2 + c_i^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2\right]\int \Phi\, dy.$$

したがって

$$\left\{c_r - \frac{1}{2}(a+b)^2\right\}^2 + c_i^2 \leqq \left\{\frac{1}{2}(a-b)\right\}^2. \qquad (15)$$

すなわち，増大攪乱あるいは減衰攪乱に対しては，複素速度cは各々上式で与えられる円の上半分あるいは下半分の中になければならない．(15)の導き方からもわかるように$c_i=0$は除外されなければならない．Howard [3] は一般に$\frac{d\rho(y)}{dy}\leqq 0$を満たすばあいに対してこれを証明した．

軸対称のばあいは(14)の代りに

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{r}{n^2+\alpha^2 r^2}(U-c)^2\frac{dg}{dr}\right\} = \frac{1}{r}(U-c)^2 g \qquad (16)$$

$$g(r) = \frac{r}{U-c}G(r)$$

を使えば，あとは同様で，(15)とまったく同じ式を得る（Batchelor & Gill [1] p. 541）．

I－3． 中立解（$c_i=0$），2次元

$c_i \to 0$の極限としての$c_i=0$をみてみよう．(13)を次のように書き変えてみる，

$$\lim_{c_i\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_i}{(U-c_r)^2+c_i^2}U''|\psi|^2 dy = 0 \qquad (17)$$

$U(y_c)=c_r$によってy_cを定義しよう．

① y_cが有限のとき

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=\pi\,\delta(x) \tag{18}$$

を使うと，(17) は

$$\pi\left(\frac{U''|\psi|^2}{U'}\right)_{y=y_c}=0 \tag{19}$$

となる．ここで $\psi(y_c)\neq 0$ である．というのは (14) を積分すると

$$(U-c)^2\frac{df}{dy}=\alpha^2\int_{-\infty}^{y}(U-c)^2 f\,dy. \tag{20}$$

$y\to-\infty$ のとき f が振動しなければ，$f>0$ ととれる．このとき (20) は f が増加関数であることを述べている．また $y=y_c$ の近くでは (14) は，$z=y-y_c$ として，

$$f\propto z^{-1} \text{ または } z^0$$

を与える．ところが (20) は前者の方を要求する（比例係数が負）．したがって，$y\to y_c$ のとき

$$\psi=(U-c)f\longrightarrow \mathrm{const}\ (\neq 0)$$

である．結局，中立撹乱の条件として，$U''(y_c)=0$ をうる

あるいは $U''(y_0)=0$ で y_0 を定義すれば，中立撹乱では

$$U(y_0)=c_r.$$

② $|y_c|=\infty$ のとき

(a) jet $U=\mathrm{sech}^2 y$

$c_r=U(y_c)=0$ となるから，$c=0$．このとき (20) は

$$f'=\frac{\alpha^2}{U^2}\int_{-\infty}^{y}U^2 f\,dy. \tag{21}$$

$y\to-\infty$ のとき，$U\approx e^{2y}$ であるから，$f\propto\exp\{(-2+\sqrt{4+\alpha^2})y\}$.
したがって一般性を失うことなく，$y\to-\infty$ で $f>0$ ととれる．このとき(21)より，f は全領域で単調増大関数である．しかし $y\to+\infty$ での漸近解は $f\propto\exp\{-(-2+\sqrt{4+\alpha^2})y\}$ を要求し，これは減少関数である．したがってこのときには条件をみたす解は存在しない．

(b) wake $\quad U=e^{-y^2}$

$c=0$ であるから，(9)は

$$\psi''-\alpha^2\psi=\frac{U''}{U}\psi=(4y^2-2)\psi.$$

これは厳密解として（$y=0$ で正則）

$$\psi=\begin{cases} e^{-y^2}F[\frac{\alpha^2}{8},\ \frac{1}{2}\ ;2y^2], \\ y e^{-y^2}F[\frac{\alpha^2}{8}+\frac{1}{2},\frac{3}{2}\ ;2y^2] \end{cases}$$

を与える，F は合流型超幾何関数である．しかし $|y|\to\infty$ のとき，$\alpha\neq0$ とすると，$F\sim e^{2y^2}$ であるから $\psi\sim e^{y^2}$ or ye^{y^2} となり，無限遠の条件をみたす解は存在しない．ただし，(a)(b)ともに，$\alpha=0$ のときに限り $\psi=U$ という解をもっている．これはよく知られているように，一般に $c\neq0$ のときにも方程式(9)が $\alpha=0$ で $\psi=U-c$ という解をもっていることからくる．

I－4．中立解，軸対称

① $0<r_c<\infty$ のとき，ただし $U(r_c)=c_r$

2次元の場合とまったく同じで，(8)より(19)に相当して

$$\pi\left(\frac{Q'\,|rG|^2}{U'}\right)_{r=r_c}=0 \qquad (22)$$

をうる．(16)を使って$G(r_c)\neq 0$を示せるのも前と同様である．したがって，$Q'(r_c)=0$，あるいは$Q'(r_0)=0$でr_0を定義すると$c_r=U(r_0)$が中立攪乱のための条件である．

② $r_c=\infty$

代表的な自由流，wake $(U=e^{-r^2})$ および jet $\left(U=\frac{1}{(1+r^2)^2}\right)$ に対しては，$c=0$となる．以下では$n=0$とする．(3)を書きなおすと

$$(rG')'=r\left(\alpha^2+\frac{1}{r^2}+\frac{W}{U}\right)G.$$

積分すると

$$\therefore\quad G'=\frac{1}{r}\int_0^r\left(\alpha^2+\frac{1}{r^2}+\frac{W}{U}\right)rG\,dr \qquad (23)$$

をうる．また$W/U=4r^2$ (wake)，$24r^2/(1+r^2)^4$ (jet) であるから，$W/U\geqq 0$が全領域でなりたつ．$r\to 0$のときGが regular であるとすると，(3)は$G\sim r\ (r\to 0)$を与える．一般性を失うことなく，rが小さいところで$G>0$ととれるから，(23)より$G'>0$．したがって全領域で$G'>0$となり，$r\to\infty$で$G\to 0$という条件をみたさない．

とくに，$U=e^{-r^2}$のときには，$r=0$で regular な(3)の解は

$$G=re^{-r^2}F\left[1+\frac{\alpha^2}{8},\ 2\ ;\ 2r^2\right]$$

で表わされる，Fは合流型超幾何関数である．$r\to\infty$とする

と，$G \sim re^{r^2}$ で，たしかに $G \to 0$ とはならない．

しかし，このばあいも，$\alpha = 0$ のとき，$c \neq 0$ であっても

(3) は

$$G = \frac{1}{r}(U - c)$$

という解をもつが，これは一般に $r = 0$ で singular である．

③ $r_c = 0$ （wake および jet では $c = 1$）

このときにも singular な解しか存在しない（Gill [4]）．

II．大域的な粘性解

II－1．2次元

レイノルズ数 R が有限の場合，ψ を支配するのは Orr－Sommerfeld の方程式

$$(U - c)\Delta_2 \psi - U''\psi = \frac{1}{i\alpha R}\Delta_2 \Delta_2 \psi \qquad (24)$$

である．αR が大きいときの漸近解としては，いわゆる粘性解と非粘性解（展開の第1項が非粘性方程式の解と同じ）がそれぞれ2コずつ知られている．粘性解の主な項は

$$\psi_{1,2} = (i\alpha RU + \beta^2)^{-\frac{5}{4}} \exp\left\{\pm \int^y \sqrt{i\alpha RU + \beta^2}\, dy\right\}$$

$$\beta^2 = \alpha^2 - i\alpha Rc$$

で表わされる．$y \to \infty$ のときには，$\psi_{1,2} \propto e^{\beta y}$ となる．† も

† $U = 0$ とすると (24) は $\left(\frac{d^2}{dy^2} - \beta^2\right)\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2\right)\psi = 0$ となり，$\psi = e^{\pm\beta y}$，$e^{\pm\alpha y}$ が解となる．$y \to \infty$ では $U \to 0$ とする．

しβが純虚数なら，すなわちpを実数として，$\beta = ip$とかけるなら，$\psi \sim e^{ipy}$となり，$|y| \to \infty$でも発散しない．このとき

$$\alpha^2 - i\alpha Rc = \beta^2 = -p^2$$

$$\begin{cases} c_i = -\dfrac{\alpha}{R} - \dfrac{p^2}{\alpha R} \\ c_r = 0 \end{cases}$$

$c_i < 0$となるから，この攪乱は減衰する．$R \to \infty$で$c_i \to 0$，したがって$c \to 0$であるが，I章でみたように，$R = \infty$では$c = 0$で$\alpha \neq 0$という場合にはregularな解は存在しない．この解は粘性の存在のために現れる解である．

またこの攪乱はz方向の有限な幅に対して無限大のエネルギを有する（$|y| \to \infty$でψが有限）が，ある初期にこの攪乱に対応する無限大のエネルギが与えられたとするとき，この攪乱は必ず減衰するというふうに解釈することは可能であろう．

$c_r \neq 0$のとき（ふつう考察の対象となるのはそういったばあいである），$\psi_{1,2}$は発散するので自由流のばあい粘性解は最初から除外される．

II－2．軸対称

$n = 0$とする．このときの方程式は

$$(U - c)\Delta_\alpha G - WG = \frac{1}{i\alpha R}\Delta_\alpha \Delta_\alpha G. \qquad (25)$$

このばあいもやはり粘性解と非粘性解が２コずつあり，粘性解は$r \gg 1$のとき

$$G_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{r}}(i\alpha RU+\beta^2)^{-\frac{5}{4}}\exp\left\{\pm\int^r\sqrt{i\alpha RU+\beta^2}\,dr\right\}$$

と表わされる．$r=0$ が方程式の特異点になっているが，G_1 と G_2 の一次結合は $r=0$ で regular な解につながらなければならない．適当な matching の結果

$$G_0=G_1+e^{i\theta}G_2$$

が $r=0$ で regular な解とつながることが示される．ただし，$a=\sqrt{i(1-c)+\frac{\alpha^2}{\alpha R}}$ とするとき，$-\frac{\pi}{2}<\arg a<\frac{3}{2}\pi$ なら $\theta=\frac{3}{2}\pi$，$-\frac{3}{2}\pi<\arg a<\frac{1}{2}\pi$ なら $\theta=-\frac{3}{2}\pi$ である．

$r\to\infty$ とすると

$$G_0\propto\frac{e^{\beta r}+e^{-\beta r+i\theta}}{\sqrt{r}}\approx I_1(\beta r).$$

2次元のときと同様に，$\beta=ip$（pは実数）とおくと

$$G_0\approx J_1(pr)\quad,\quad r\to\infty.$$

このとき

$$\begin{cases}c_i=-\dfrac{\alpha}{R}-\dfrac{p^2}{\alpha R},\\ c_r=0.\end{cases}\qquad(26)$$

やはり $r\to\infty$ で発散せず，また時間的に減衰する粘性解が得られる．$c_r\neq0$ のとき G が発散することも前と同様である．

Ⅲ．Ⅱに相当する数値解

攪乱に対する線型方程式を数値的に解くために，未知関数を完全系をなす関数たちで展開し，それによって微分方程式を行列方程式に変換しよう．そうすると，問題はその得られ

た行列の固有値および固有ベクトルを求めることに帰着される（Dolph & Lewis [5]，Grosch & Salwen [6]）．そのあらましを簡単に述べてみる．

２次元あるいは軸対称のOrr-Sommerfeld方程式は一般に

$$\frac{\partial}{\partial t} L\psi = \mathcal{L}\psi \qquad (27)$$

とかける，ここでLおよび$\mathcal{L}$は空間変数yに関する微分演算子である．撹乱は$\Psi(t, x, y) = \psi(t, y)\, e^{i\alpha x}$と仮定しているが，tについての形はまだ指定してない．もし$\frac{\partial}{\partial t} = -i\alpha c$とおけばふつうのOrr-Sommerfeld方程式となる．いま完全系をなす関数列として$\{\varphi_n\}$をとり，

$$\psi(t, y) = \sum_n a_n(t)\, \varphi_n(y)$$

と展開する．これを(27)に代入し，両辺にφ_mをかけて積分すると

$$\sum_n \frac{da_n}{dt} \int \varphi_m L \varphi_n \, dy = \sum_n a_n \int \varphi_m \mathcal{L} \varphi_n \, dy$$

をうる．これは簡単に次のように書ける

$$\frac{dA}{dt} = P^{-1} Q A, \qquad \begin{aligned} &P = (P_{mn}), \quad Q = (Q_{mn}), \\ &P_{mn} = \int \varphi_m L \varphi_n \, dy, \\ &Q_{mn} = \int \varphi_m \mathcal{L} \varphi_n \, dy, \end{aligned}$$

P，Qは行列であり，Aは$(a_1, a_2, \cdots)$よりなるベクトルである．もし$\psi \propto e^{\sigma t} f(y)$という形で表わせるなら（I，IIでは$\sigma = -i\alpha c$であった），

$$\sigma A = P^{-1} Q A .$$

したがって σ は行列 $P^{-1}Q$ の固有値である．σ が知られると，

$$c = -\frac{\sigma}{i\alpha}$$

によって複素位相速度 c が知られる．（27）の形の方程式は主流 U が周期的に変動するばあいにも，その安定性を調べることを可能にする（Grosch & Salwen [6]）．

具体的数値計算は軸対称 wake $U = e^{-r^2}$ に対して行なった．また $\{\varphi_n\}$ としては

$$\varphi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{n!(n+2)!}}\, r\, L_n^{(2)}(r)\, e^{-\frac{1}{2}r}$$

をとった．$L_n^{(2)}$ は Laguerre の多項式である．

図1によると固有値 c_i の最大値は曲線 $c_i = -\frac{\alpha}{R}$ の上にのっている．この結果は $\alpha R = 10$ に対するものであり，c_r は計算誤差の範囲でゼロである．これはⅡで議論した大域的粘性解の固有値（26）と一致している．

図2は $\alpha R = 19$，$\alpha = 0.5$ のばあいに対して，$\psi = e^{\sigma t} G(r)$ としたときの $G(r)$ の形を c_i の大きい順に3番目までが書いてある．

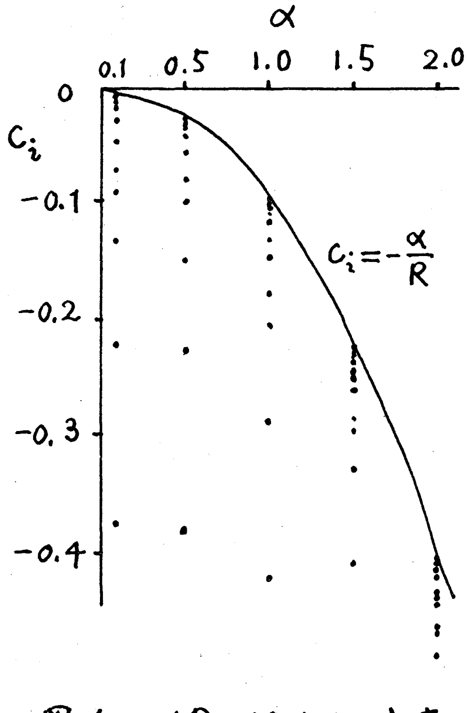

図1．$\alpha R = 10$ としたときの固有値 c_i（点・で表わされている）

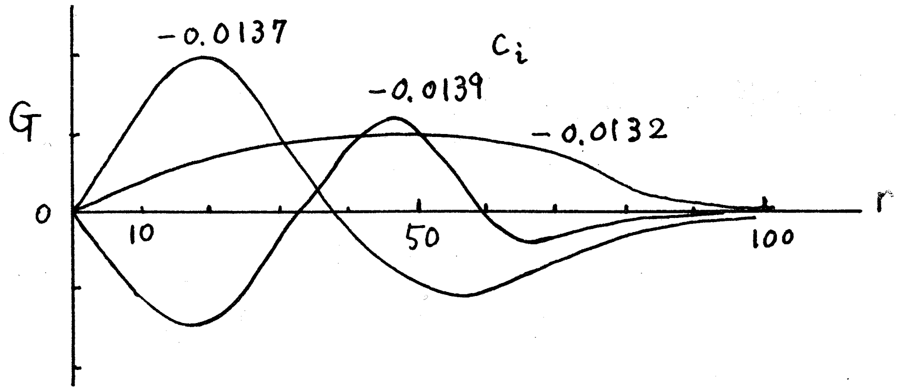

図 2. $\alpha R = 19$, $\alpha = 0.5$ の固有関数
(展開項の数は 20)

文献

[1] Batchelor, G. K. & Gill, A. E. 1962 J. Fluid Mech. 14, 529.

[2] Lin, C. C. 1945 Quart. Appl. Math. 3, 218.

[3] Howard, L. 1961 J. Fluid Mech. 10, 509.

[4] Gill, A. E. 1962 J. Fluid Mech. 14, 557.

[5] Dorph, C. L. & Lewis, D. C. 1958 Quart. Appl. Math. 16, 97.

[6] Grosch, C. E. & Salwen, H. 1968 J. Fluid Mech. 34, 177.