

動的システムのモデル形成とその検定

東大 工学部 茅 陽一

ここでは可観測な動的システムの線形モデルの形成と、形成されたモデルが真に適合するものがあるかの検定の手法について、筆者の研究を中心に述べる。

§ 1. モデルの表現

nonparametric model と別とすれば、モデルは伝達関数モデル・状態方程式モデルの二種が考えられる。しかし、いづれの

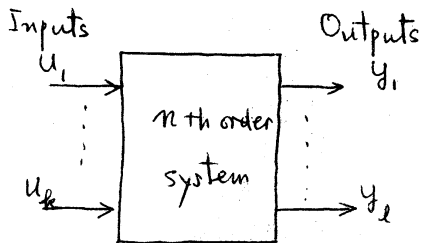


Fig. 1

の場合も、その表現に合致するパラメータ数は同一と考える。一見、Fig. 1 の y_j に与えられたのは、状態方程式モデルの方が絶

的だと取扱「易」いように思われるが、実はその逆である。

通常用いられる表現法として、Fig. 2 の形があるが、観

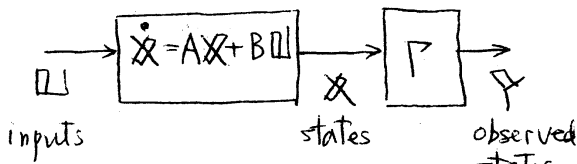


Fig. 2

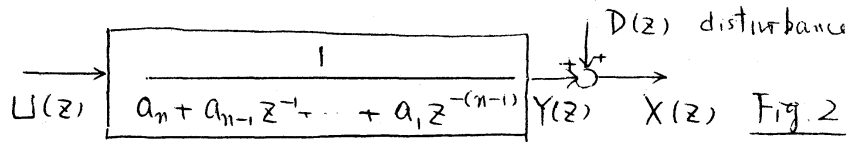
測される出力 Y は、実際には Fig. 2 の形にはおかないことである。おぼつか

$$Y = P_0 X + P_1 U + \dots + P_n U^{(n-1)}$$

$z = z^{-1}$ 以下 z^{-1} は伝達関数モデルを考へる。

§ 2. (伝達関数)モデル形成の方法

問題



$\{u_i, x_i; i=1, 2, \dots, N+n-1\}$ の $T \rightarrow \infty$ の $\{a_1, \dots, a_n\}$ を推定せよ。ただし $\{d_i; i=1, \dots, N+n-1\}$ は $\{u_i\}$ と無相場の平均値は零の弱定常不規則過程とする。

基本式。 \Rightarrow 場合分け式が成立。

$$V_N(x) \cdot a = V_N^m(u) + V_N(d) \cdot a \quad (1)$$

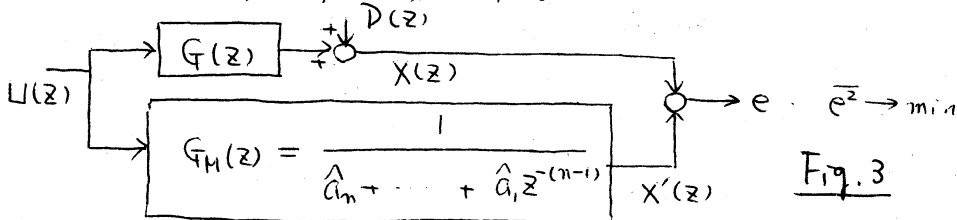
$$T \in \mathbb{R} \quad V_N(x) = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_2 & \dots & x_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_N & & x_{N+n-1} \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} V_N^m(\cdot) \text{ は} \\ V_N(\cdot) \text{ の 逆行列} \end{array} \quad (2)$$

推定方法の分類と指定の式。

A. 実誤差最小形 (線形/同形) ^{(1)~(3)}

$$\hat{a} = (V_N^T(x) V_N(x))^{-1} V_N^T(x) V_N^m(u) \quad (3)$$

B. 実誤差最小形 (非線形/同形) ^{(4)~(6)}



特1 = Gauss-Newton法より逐次的に解を求めるとは

$$\delta \hat{\alpha} = (V_N^T(w) V_N(w))^{-1} V_N^T(w) V_N^n(w) \quad (4)$$

⇒ Z'WはX'を原に -G_M(Z) とおくと出力をあらわす。

C. 補助変数行列 (Instrumental Variable Matrix) の活用。⁽⁷⁾⁽⁸⁾

$$\hat{\alpha} = (Z_N^T V_N(z))^{-1} Z_N^T V_N^n(z) \quad (5)$$

Z_N ∈ Z V_N(y) とするが最適。

各方式の特徴。

	式誤差最小形	実誤差最小形	補助変数行列の活用
評価基準 n 既知 m 未知	不明	実誤差 → $\bar{e}^2 \rightarrow \min$	MinMax $\ \hat{\alpha} - \alpha\ $ 不明
外乱の影響 on-line off-line	偏りをもつ "	偏りなし	偏りなし 一貫性も有る
解が得られ るか	必ずしも得られない	試行論理により 収束性もある	最適解への収束 性は保証されない
計算量	少	多	多

C の手法の改良。 C の手法は、 $\bar{e}^2 \rightarrow \min$ の条件をみたすように、収束解が実誤差最小形に比し劣る性質をもつ。⇒ Z'W, 収束解が $\bar{e}^2 \rightarrow \min$ をみたすよう計算モードを変更する。可なり、長回目を試行して得られたモデルを $G_M^R(z)$

と 12, k 回 の 試行結果は

$$\hat{a}_k = (V_N^T(\tilde{y}) V_N(\hat{x}))^{-1} V_N^T(\tilde{y}) V_N^m(\tilde{u}) \quad (6)$$

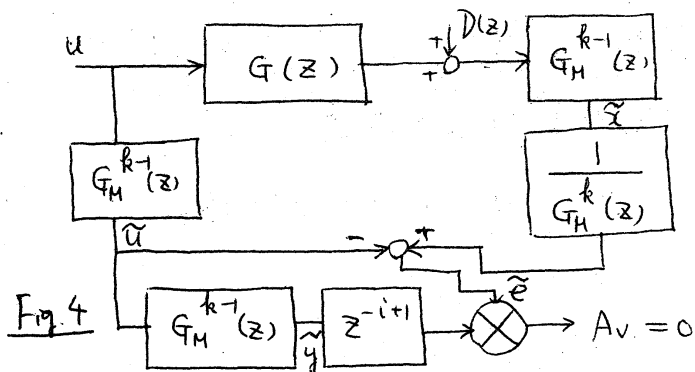


Fig. 4

→ 方法 B と, 12
 平解附近で \tilde{e} は実
 誤差と一致し.

$$e \frac{\partial e}{\partial \hat{a}} \rightarrow 0$$

→ 解が得られた。

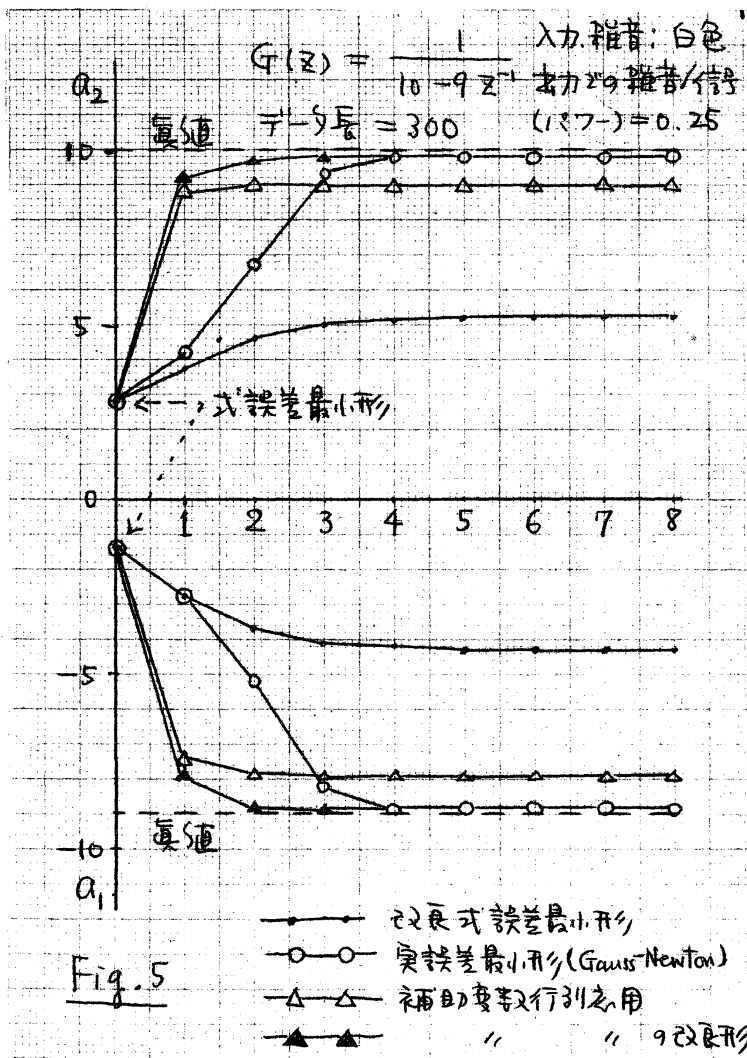


Fig. 5

手法改良 → 方向。

方法と 12 は B,
 C の改良形が今 + 2
 有効。しかし, 3 に
 う × - 1 → と 2 は収
 束性に問題があり,
 この点の改良が今後
 の問題となる。

Fig. 5 は, 一次系
 の伝達関数推定の一
 例である。

§3. モデル検定問題

問題と12は次の二種があげられる。

- A. 対象システムの線形性の検定
- B. 線形システムの伝達関数次数の検定

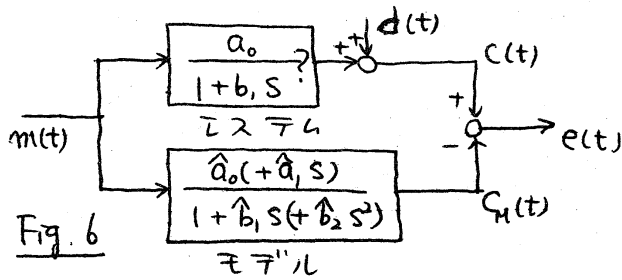
これらの研究は数多い。筆者はAについて112を検訂し12113が、ここからはBについて112述べる。

これに例1215、次の手順が考へられた。

- (1) 外乱が白色とわかるとし、システムのモデルの出力差の白色性を検定する方法。(Aström⁽⁹⁾)
- (2) 式(3)(4)の $V_N^T(x)V_N(x)$ や $V_N^T(w)V_N(w)$ の singularity を検定する方法。(Lee⁽³⁾)
- (3) 評価基準の変更に対するモデルパラメータ変化を検定する方法。(筆者⁽⁶⁾)
- (4) モデルの附加高次パラメータに関する評価基準の差分が零となるかどうかを検定する方法。(筆者)

検定の確実性・計算量・検定に必要なデータの長さ等の諸条件を考慮したとせば、(4)がもっとも秀れた方法と思われる。これについて以下説明する。

§4. パラメータに対する差分検出によるモデル検定
簡単のため、Fig. 6 の一次系と3のモデルとをとりあげる。



7原理。

$$I = \overline{e^2} = \frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt \quad (6)$$

エネ之Eとマ. T2T
4が一次ダ.

$$\hat{a}_0 = a_0, \hat{b}_1 = b_1 \quad (7)$$

2) ありたいだけ

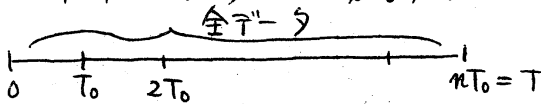
$$\left(\frac{\partial I}{\partial \hat{a}_1} \right)_0 = \left(\frac{\partial I}{\partial \hat{b}_2} \right)_0 = 0 ; \quad \left(\quad \right)_0 = \left(\quad \right) \hat{a}_1 = \hat{b}_2 = 0 \quad (8)$$

2) あり, T2T4が一次2T2T4だけ(8)は一般に成立しつゝ。

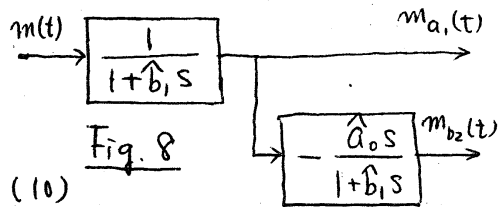
検定手順, 1) 5之54T2T-5, T2T4 (= a_hat_0 / (1 + b_hat_1 s))

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \hat{a}_1} \right)_0, \left(\frac{\partial I}{\partial \hat{b}_2} \right)_0 = -2 \left(\overline{m_{a_1} e}, \overline{m_{b_2} e} \right) \quad (9)$$

エ, T2T4に分割された各区間に求めよ。



T2T4, m_{a_1}, m_{b_2}は



エ45エ.

$$q_i = (q_{ai}, q_{bi}); \quad i=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

エ45。

2) T_0が有る程度短く長くしたい, {q_i}は, 3454独立に

正規不規則過程があるから。

$$t_a = \frac{\sqrt{n-1} \bar{q}_a}{\sigma_a}, \quad t_b = \frac{\sqrt{n-1} \bar{q}_b}{\sigma_b} \quad (11)$$

は自由度 n の t 分布を有する。ただし

$$\bar{g}_{a(b)} = \frac{1}{n} \sum g_{a(b)i}, \quad s_{a(b)} = \left[\frac{1}{n} \sum (g_{a(b)i} - \bar{g}_{a(b)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

よって、次の Student の検定法を用いる。

有意水準 γ とし

$$\begin{cases} |t_a| \leq t_{\frac{\gamma}{2}} \text{ かつ } |t_b| \leq t_{\frac{\gamma}{2}} & ; \text{モデルを採択する。} \\ |t_a| > t_{\frac{\gamma}{2}} \text{ または } |t_b| > t_{\frac{\gamma}{2}} & ; \text{モデルを棄却する。} \end{cases}$$

必要データと長さの例。上記手法の有効性を調べるため、

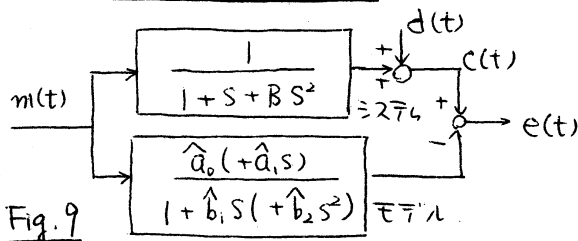


Fig. 9

Fig. 9 の場合にして、確率 95% の一次モデルを棄却する長さ T のデータと長さ T の二次係数 B の関数として理論的に求めた。この場合

$$m(t): \Phi_{mm}(\omega) = \frac{2\omega_m}{\omega^2 + \omega_m^2}$$

$$\omega_m = 10.$$

$$d(t): \Phi_{dd}(\omega) = 0.1 \times \frac{2\omega_n}{\omega^2 + \omega_n^2}$$

$$\omega_n \gg \omega_m.$$

$m(t), d(t)$ は共に正規定常不規則過程。

また、計算には t -分布を正規分布に近似して用いる。

結果を Fig. 10 に示す。

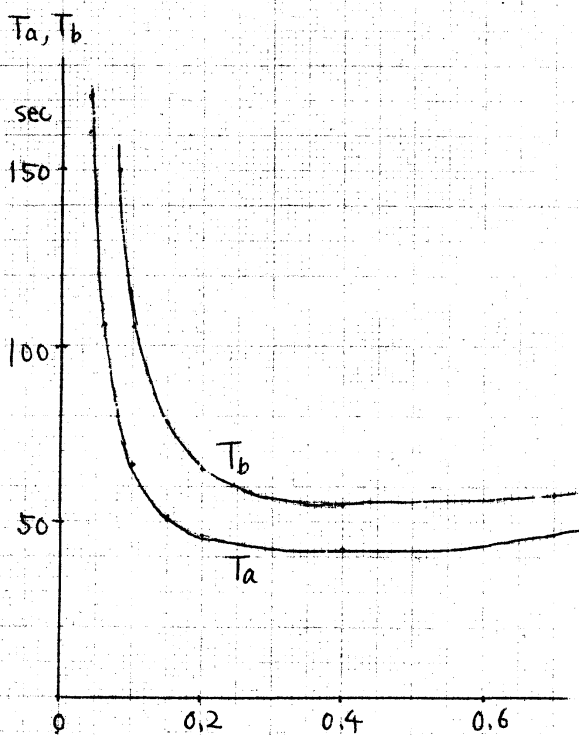


Fig. 10

たとえば $B = 0.2$ のときこのシステムの伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{1+s+0.2s^2} \approx \frac{1}{(1+0.78s)(1+0.22s)} \quad (13)$$

このときの必要デッド長は約 6.5 sec である。このようにデッド長がかなり短か（2倍の誤差を注意の要がある）。

検定の例。 Fig. 9 のシステムで、 $B = 0.390$ 、 $d(t)$ は

$$\overline{d^2(t)} = k_n^2 \quad (14)$$

の白色雑音、 $m(t)$ は振幅 1 のステップ関数で、これを 10 回くり返すものとす。モデルは

$$G_M(s) = \frac{1.00}{1+1.05s} \quad (15)$$

このステップのくり返し回数が無限大のときの最適解として得られる一次モデルである。

このときの各回の q_a, q_b , \bar{q}_a, \bar{q}_b , 分散 σ_a^2, σ_b^2 , t_a, t_b をノイズレベル k_n^2 が 1 と 0.16 の場合について表 1 に示す。また、システムと式 (15) のモデルのステップ応答は Fig. 11 のようである。

§5. 高次系の同定と制御

システムが高次なときは、これを適当に低次近似し、その上で制御を行おうのが実際的である。この場合は

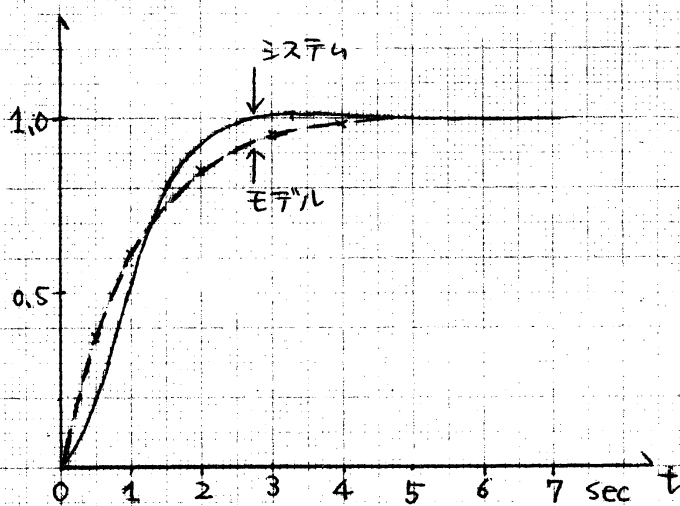


Fig. 11

試行回	$k_n^2 = 1.0$		$k_n^2 = 0.16$	
	\hat{a}_1	\hat{b}_2	\hat{a}_1	\hat{b}_2
1	+0.0204	-0.0060	$+0.446 \times 10^{-2}$	$+0.142 \times 10^{-2}$
2	-0.0178	+0.0178	-1.086	+1.092
3	-0.0296	+0.0284	-1.556	+1.516
4	-0.0056	-0.0024	-0.594	+0.284
5	-0.0154	+0.0074	-0.988	+0.672
6	+0.0018	+0.0026	-0.302	+0.486
7	-0.0050	+0.0026	-0.574	+0.484
8	-0.0184	+0.0054	-1.104	+0.602
9	-0.0110	+0.0092	-0.810	+0.746
10	+0.0014	-0.0028	-0.314	+0.262
\bar{q}	-0.0080	+0.0031	-0.688×10^{-2}	$+0.628 \times 10^{-2}$
σ^2	0.42×10^{-4}	0.22×10^{-4}	0.069×10^{-4}	0.039×10^{-4}
t	-1.81	+1.96	-3.91	+4.78
有意水準 90%	モデル棄却		モデル棄却	
有意水準 95%	モデル採択		モデル棄却	
備考	有意水準 90%		$t_{0.05} = 1.83$	
	" 95%		$t_{0.025} = 2.26$	

表 1

(1) システムモデルの決定

(2) (1)のモデルにたとく最適制御法則の決定

$n = 2$ の段階に与るが、

システムモデルは利

制御入力の関数と与る

ため、(1) → (2) → (1) →

... と試行を行なう

た収束解が与る意味

をもち得る解に与る。

この真は、システム

の状態推定 (Kalman

-Bucy filter) と与る

にたとく最適制御

を行なう問題とは本

質的に異なる真と有

る。(この場合両者

の10%の最適化が全

体の最適化を意味す

ることは既知の事実である⁽¹⁰⁾

この問題は、大規模システム最適化にまつたるものとして、計算量減少のため有効な一手段を示した点と思われすが、詳細はここには略す。

<参考文献>

1. Kalman, R.E. T. ASME, 80, 2, pp. 468-478 (1958)
2. Yamamura, S. and Kaya, Y. T. AIEE, pt II, 81, pp. 378-386 (1962)
3. Lee, R.C.K., Optimal Estimation, Identification, and Control, MIT Press (1964)
4. Narendra, K.S. et al. T. IEEE, AC-9, 1, pp. 31-38 (1964)
5. Rogers, A.E. and Steiglitz, K. IEEE, Nat. Conv. R. Pt. 3, pp. 65-73 (1967)
6. 茅. 計測と制御, 7, 3, pp. 151-161 (1968)
7. Wong, K.Y. et al. T. IEEE, AC-12, 6, pp. 707-718 (1967)
8. 茅. 志岐, 第11回自動制御連合講演会予稿 No. 176 (1968)
9. Aström K.J. et al, in 'Theory of Self-Adaptive Control Systems', Plenum Pub. Co. (1966)
10. Tou, J.T. et al. T. AIEE, pt II, 80, pp. 193-196 (1961)

<謝辞>

本研究は本学大学院生志岐紀天君の多大の協力を得た。
厚く謝意を表す。