数理解析研究所講究録
第 100 巻 1970 年 2-9

有限群の cohomology について

東京教育大 理　　服部 昭

G を有限群，M を G-加群とする．とくに断らなければ，$H^k(G, M)$ は modified cohomology を意味するものとする．従って $|G| = g$ とすれば $H^k(G, M)$ の各元 ξ は $g\xi = 0$ をみたす．もし M が有限生成ならば，$H^k(G, M)$ は有限群である．

もしあらゆる整数 k と G のあらゆる部分群 H について $H^k(H, M) = 0$ が成り立つならば，M は cohomologically trivial であるという．たとえば M において $x \longmapsto gx$ が自己同型をなせば，M は coh. trivial である．また $\{G, 1\}$-射影的加群 M，とくに G-射影的加群も coh. trivial である．しかし cohomological triviality の問題として研究がはじめられたのは，一部分の k や H についての $H^k(H, M) = 0$ から，すべての k, H についての $H^k(H, M) = 0$ を導き出すという問題であり，これは周知のように類体論の cohomology による記述に端を発したものであるが，その研究の過程においてMの射影性などのような intrinsic な性格との関連も明らかにされてきた．以下において既知の結果の解説を述べるが，ほとんど Serre [6], Uchida [5] によっている．従って証明も概略の説明に止める．

はじめに準備として，よく知られた次の3事項を挙げる：

(0.1) 次元操作：任意のMに対し，M', M'' でつぎをみたすものが存在する．

$$H^k(H, M) \cong H^{k+1}(H, M') \quad \forall k,\ \forall H \subset G,$$
$$H^k(H, M) \cong H^{k-1}(H, M'') \quad \forall k,\ \forall H \subset G.$$

(0.2) Hochschild-Serre の完全系列：$H \triangleleft G$ とする．もし $H^i(H, M) = 0$, $i = 1, \dots, k-1$ ならば，つぎの完全系列が成立する：

$$0 \longrightarrow H^k(G/H, M^H) \xrightarrow{infl} H^k(G, M) \xrightarrow{res} H^k(H, M)^G$$
$$\xrightarrow{tg} H^{k+1}(G/H, M^H) \xrightarrow{infl} H^{k+1}(G, M)$$

(0.3) Herbrand 商：巡回群Gの cohomology は周期2をもつ．G-加群Mについて

$$h(M) = H^0(G, M) \text{の位数} / H^1(G, M) \text{の位数}$$

とおくとき，つぎが成り立つ：

i) $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ (完全) $\Rightarrow h(M_2) = h(M_1)h(M_3)$.

ii) M 有限 $\Rightarrow h(M) = 1$.

§1　p-群

定理 1.1（[4], [5]）G を p-群，M を有限 G-加群とするとき，

$$\exists k : H^k(G, M) = 0 \Rightarrow M \text{ cohomologically trivial}$$

証明　位数についての帰納法．$|G| = p$ のときはよい．$k = 1$ としてよい（次元操作）．$H \lhd G$ で $H \neq G, \neq 1$ なるものをとる．まず $0 \longrightarrow H^1(G/H, M^H) \longrightarrow H^1(G, M) = 0$（完全）により $H^k(G/H, M^H) = 0\ (\forall k)$．つぎに

$$0 = H^1(G, M) \longrightarrow H^1(H, M)^G \longrightarrow H^2(G/H, M^H) = 0 \text{（完全）}$$

と $H^1(H, M)$ の元数が p の冪なることから，$H^1(H, M) = 0$．従って $H^k(H, M) = 0\ (\forall k)$．$G$ の真部分群は或る H に含まれるから，$H^k(K, M) = 0\ (\forall k, \forall K \subsetneqq G)$．$k \geq 2$ についての $H^k(G, M) = 0$ は

$$0 \longrightarrow H^k(G/H, M^H) \longrightarrow H^k(G, M) \longrightarrow H^k(H, M) = 0 \text{（完全）}$$

から得られる．また $H^0(G/H, M^H) = 0$，$H^0(H, M) = 0$ から $H^0(G, M) = 0$．次元操作をすれば上の方法で $H^{-1}(G, M) = 0$．以下同様に $H^k(G, M) = 0\ (k \leq 0)$ ∎

例（[5]）M が有限でないと上の型の命題は成り立たない．p を奇素数，$|G| = p$，σ を G の生成元とする．$a_1, a_2, \ldots$ を基底とする $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-自由加群 M に G の作用を $\sigma a_i = a_i + p a_{i+1}$ によって定義すれば，$H^0(G, M) =$

0, $H^{-1}(G, M) \neq 0$.

命題 1.2　G を p-群, $pM = 0$ とする. もし $H_1(G, M) = 0$ ならば, M は $\mathbb{F}_p[G]$-自由加群である.

証明　$I_G = \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z})$ とおく. $M/I_G M$ の $\mathbb{F}_p$-基底 $\{u_i\}$ を lift した $\{a_i\}$ は M を生成する. よって $\mathbb{F}_p[G]$-自由加群 L から $0 \to K \to L \to M \to 0$ (完全) をつくるとき,

$$0 = H_1(G, M) \to H_0(G, K) \to H_0(G, L) \xrightarrow{\sim} H_0(G, M) \text{ (完全)}$$

よって $H_0(G, K) = 0$. I_G の冪零性から, $K = 0$ ▌

系 1.3　G を p-群, $pM = 0$ とするとき, つぎの 3 性質は同値である.

a) $\exists k$: $H^k(G, M) = 0$,

b) M は cohomologically trivial,

c) M は $\mathbb{F}_p[G]$-自由加群.

証明　a) $\Rightarrow$ c) を示せばよく, これは次元操作 $H^n(G, M) \cong H^{n-k-2}(G, M')$ により前命題に帰する ▌

定理 1.4　G を p-群, M を p-torsion-free とするとき, つぎの 3 性質は同値である.

a) $\exists k$: $H^k(G, M) = H^{k+1}(G, M) = 0$,

b) M は cohomologically trivial,

c) M/pM は $\mathbb{F}_p[G]$-自由加群.

証明　$0 \to M \xrightarrow{p} M \longrightarrow M/pM \longrightarrow 0$（完全）により

$0 = H^k(G, M) \longrightarrow H^k(G, M/pM) \longrightarrow H^{k+1}(G, M) = 0$（完全）

よって $H^k(G, M/pM) = 0$ となり，（1.3）により M/pM は $\mathbb{F}_p[G]$-自由．つぎに M/pM を $\mathbb{F}_p[G]$-自由とすれば，$\mathbb{F}_p[H]$-自由でもある（H は G の任意の部分群）．よって $H^k(H, M) \xrightarrow{p} H^k(H, M)$ は同型．よって $H^k(H, M) = 0$ ▍

命題 1.5　G, M は（1.4）における性質を有するとする．M がさらに $\mathbb{Z}$-自由であれば，任意の torsion-free G-module N について，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ も cohomologically trivial．

証明　$0 \to \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{p} \mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(M, N/pN) \to 0$ は完全系列．ここに $\mathrm{Hom}(M, N/pN) \cong \mathrm{Hom}(M/pM, N/pN)$ で，M/pM が $\mathbb{F}_p[G]$-free であるから $\mathrm{Hom}(M/pM, N/pN)$ は $\{G, 1\}$-射影的で，従って coh. trivial．よって前定理の場合と同じように，$\mathrm{Hom}(M, N)$ coh. trivial を得る ▍

予想 1.∞（波中）　G が p-群のとき，

$$\exists k \not\equiv h \pmod 2 \quad H^k(G, M) = H^h(G, M) = 0$$
$$\Rightarrow M \text{ cohomologically trivial}$$

この予想は次の場合には正しい（[5]）：

1）$h - k = 3$，M 有限生成．

2）G は 2 位の巡回群の直積．

§2 一般の有限群

以下において G は位数 g の有限群，$p \mid g$ と記すときの p は素数，G_p は G の Sylow p-部分群を表わすものとする．

定理 2.1 M が $\mathbb{Z}$-自由のとき，次の 3 性質は同値である．

a) $\forall p \mid g \ \exists k_p : H^{k_p}(G_p, M) = H^{k_p+1}(G_p, M) = 0$,

b) M は cohomologically trivial,

c) M は $\mathbb{Z}[G]$-projective.

証明 a) $\Rightarrow$ c) を示せばよい．自由加群 L をもって，$0 \to N \to L \to M \to 0$（完全）をつくるとき，

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, L) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M) \to 0 \ (\text{完全})$$

G_p, M, N に (1.5) を適用すれば，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ は G_p-coh. trivial. $p \mid g$ は任意だから，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ は G-coh. trivial. すると

$$\mathrm{Hom}_G(M, L) \to \mathrm{Hom}_G(M, M) \to H^1(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)) = 0 \ (\text{完全})$$

これは $L \to M \to 0$ が split することを示す ▌

定理 2.2 つぎは同値である．

a) $\forall p \mid g \ \exists k_p : H^{k_p}(G_p, M) = H^{k_p+1}(G_p, M) = 0$,

b) M は cohomologically trivial,

c) $dh_{\mathbb{Z}[G]} M < \infty$,

d) $dh_{\mathbb{Z}[G]} M \leq 1$.

証明 c) $\Rightarrow$ b) 仮定により有限な射影分解

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0 \quad ,(P_i \text{ 射影的})$$

がある．P_i は coh. trivial であるから，cohomology 完全系列を用いて容易に M の coh. triviality がわかる．

a) $\Rightarrow$ d) 自由加群 L をもって $0 \to N \to L \to M \to 0$ (完全) をつくれば，N は $\mathbb{Z}$-自由で，やはり a) と同様の性質をもつ．これには (2.1) が適用されるから，N は射影的である ▮

定理 2.3 (淡中，[5]) ある $k \not\equiv h \pmod 2$ と G のすべての部分群 H について $H^k(H, M) = H^h(H, M) = 0$ とすれば，M は cohomologically trivial．

証明 位数に関する帰納法．G 巡回群のときはよい．G が p-群でなければ，$\forall p \mid g$ について M は G_p-coh. trivial. よって G-coh. trivial. G が p-群($\neq 1$)のとき，極大部分群 H をとる．$H^n(H, M) = 0$ ($\forall n$) であるから，

$0 \to H^h(G/H, M^H) \to H^h(G, M) = 0$ (完全)

$0 \to H^{k+1}(G/H, M^H) \to H^{k+1}(G, M) \to H^{k+1}(H, M) = 0$ (完全)

G/H は巡回群で，$h \equiv k+1 \pmod 2$ だから，$H^{k+1}(G/H, M^H) = 0$．よって $H^{k+1}(G, M) = 0$．これと $H^k(G, M) = 0$ とから M が coh. trivial なることが得られる ▮

上の定理の条件のうち，H を Sylow 群に限定してよいだろうというのが予想 1.∞ である．

文献

[1] J.Tate, The higher dimensional cohomology groups of class field theory, Ann. Math. 56 (1952) 294-297.

[2] T.Nakayama, On modules of trivial cohomology over a finite group, I. Ill. J. Math. 1 (1957) 36-43, II.Nagoya Math. J. 12 (1957) 171-176.

[3] D.S.Rim, Modules over finite groups, Ann. Math. 69 (1959) 700-712.

[4] W.Gaschütz, Kohomologische Trivialitäten und äussere Automorphismen von p-Gruppen, Math. Z. 88 (1965) 432-433.

[5] K.Uchida, On Tannaka's conjecture on the cohomologically trivial modules, Proc. Jap. Acad. 41 (1965) 249-253.

[6] J.-P.Serre, Corps locaux, Hermann, 1962.

[7] S.Lang, Rapport sur la cohomologie des groupes, Benjamin, 1966.