数理解析研究所講究録
第101巻 1970年 73-80

流体の波動　（要旨）

東京大学宇宙航空研究所　橋本英典

§1 いとぐち

流体中の波の出現には、音波のばあいを除けば定常状態として完全に一様あるいは等方的でない定常場が必要なこと。

微小振巾波ではフーリエ分解によって位相 $\theta = \mathbb{K}\cdot\mathbb{X} - \omega t$ の入った $\exp(i\theta)$ を因子とする平面波を考えるが、基礎式と境界条件が擾乱に対して同次となるため、振動数 ω が波数 $\mathbb{K}$ の定関数 $\omega = f(\mathbb{K})$ のときだけ0でない解が存在する：分散関係。このとき一般には位相速度 $\mathbb{C}$ の大きさ c は $\mathbb{K}$ の関数（$c = \omega/k$, $k = |\mathbb{K}|$）となり分散波や非等方波があらわれる。これを表にすると

	非分散波	分散波
等方性	c 一定	$c = c(k)$
異方性	$c = c(\mathbb{K}/k)$	$c = c(\mathbb{K})$

§2 分散波伝播の Kinematical な記述[1,2]

波源から伝播して行く波は、フーリエ成分毎に位相速度が

異なるために分散し、波源から時空的にはなれた点では波数 $\mathbb{K}$、振動数 ω が場の変数 $\mathbb{K}(\mathbf{X},t)$, $\omega(\mathbf{X},t)$ とみなされる。その間には波の連続の式：

$$\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial t} + \mathrm{grad}\ \omega = 0\ , \qquad (2.1)$$

が成立し、一般化された位相関数から $\mathbb{K}$, ω は

$$\mathbb{K} = \mathrm{grad}\ \theta\ , \qquad (2.2)$$

$$\omega = -\partial\theta/\partial t\ , \qquad (2.3)$$

によって導かれる．これは有限振巾波がゆっくりと性質の変る媒質でも有効である．

分散関係 $\omega = f(\mathbb{K})$ を (2.1) に代入し、さらに (2.2) を用いると

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial k_j}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial k_j} = \frac{\partial k_i}{\partial t} + V_j\frac{\partial k_i}{\partial x_j} = 0, \qquad (2.4)$$

((2.2) から $\partial k_i/\partial x_j = \partial k_j/\partial x_i$ に注意)．これは一般に波数 $\mathbb{K}$ の波堆が群速度

$$\mathbb{V} = \frac{\partial f}{\partial \mathbb{K}}\ , \qquad (2.5)$$

で移動することを示すが、一般に線型に近い系ではエネルギーの移動速度もこれに一致する．

§3　一様流れの中での波の模様

一様流（流速 $\mathbb{U}$）中の点（原点 O）におかれた物体（遠くから見て点とみなせる）の生ずる波は媒質に相対的に（波数 $\mathbb{K}$ とする）

$$\mathbb{C} = f(\mathbb{K})\frac{\mathbb{K}}{k}\ , \qquad (3.1)$$

で伝播するが、これを物体系から見れば（一をつける）

位相速度

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{U} + \mathbb{C} , \qquad (3.2)$$

従って振動数

$$\bar{\omega} = \bar{\mathbb{C}} \cdot \mathbb{K} = (\mathbb{U} + \mathbb{C}) \cdot \mathbb{K} , \qquad (3.3)$$

を与える（ドプラー効果）．このうち定在波を生ずるものは定在条件 $\bar{\omega} = 0$，すなわち

$$(\mathbb{U} + \mathbb{C}) \cdot \mathbb{K} = \mathbb{U} \cdot \mathbb{K} + kc = 0 , \qquad (3.4)$$

を満足するものだけであり[2-4]（例，深い水の重力波 $f(k) = \sqrt{gk}$ では $k = g/U^2$），見方を変えれば流速に制限がつく．（例，一次元波では c に最大値 c_{max}，最小値 c_{min} があれば $c_{max} > U > c_{min}$；音波 $f(k) = c_0$：$U > c_0$；深さ h の水の重力波 $c = \sqrt{(g/k)\tanh kh}$：$\sqrt{gh} > U$；深い水での重力．表面張力波 $c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k}{\rho}}$（$\gamma$ は cm 当りの表面張力）では $2^{\frac{1}{2}} (\gamma/g)^{1/4} < U$）．

このような波堆の存在する位置 $\mathbb{X}$ は，原点からそこまでの時間を t とすれば，物体系での群速度

$$\bar{\mathbb{V}} = \mathbb{V} + \mathbb{U} = \partial f / \partial \mathbb{K} + \mathbb{U} , \qquad (3.5)$$

を用いて

$$\mathbb{X} = \bar{\mathbb{V}} t = (\partial f / \partial \mathbb{K} + \mathbb{U}) t , \quad t > 0 ; \qquad (3.6)$$

によって与えられる．こゝに $t > 0$ は輻射条件に対応する．

特に $\mathbb{C}$ と $\mathbb{V}$ の方向が同じ一次元波では流れの方向の単位ベクトルを $\mathbb{i}$ とすれば $\mathbb{C} = -U\mathbb{i}$ であるから（$\mathbb{V} = -V\mathbb{i}$）

$$\bar{V}t = (c - V)it = -kc't i, \qquad (3.7)$$

で $V > c$ なら上流，$V < c$ なら下流に定在波が出現することを示す．（例，重力波 $V \fallingdotseq c/2$ ：下流；表面張力波 $V \fallingdotseq 3c/2$：上流）．

非分散波では (3.4) と (3.6) からいわゆる Mach-Cone が導びかれるが，その母線は K 面で原点を中心とする群速度ベクトルの端点の軌跡に $-V$ の点から引いた接線の方向をとる．

分散波で出現する流れ模様は Mach-Cone というより，むしろ等位相の点の軌跡であって，たとえばもり上りは

$$K \cdot X \fallingdotseq 2\pi N \,(N\text{は整数}) + \text{const} = \theta N, \qquad (3.8)$$

で定まる．(3.6), (3.8) から

$$t = |(2\pi N + \text{const})/(K \cdot \bar{V})| = |\theta N/(K \cdot \bar{V})|.$$

従って (3.6) はもり上りの点 X_N に対して

$$X_N = \left|\frac{\theta N}{K \cdot \bar{V}}\right| \bar{V}, \qquad (3.9)$$

を与える．ただし K，($\bar{V}$にも入っている）は (3.4) の副条件を満足しなくてはならない。

例として深水重力波 $f = \sqrt{gk}$ をとれば流れの方向と K のなす角を Θ として (3.4) から

$$C + V\cos\Theta = 0. \qquad (3.10)$$

すなわち

$$\sqrt{\frac{g}{k}} + V\cos\Theta = 0 \text{ あるいは } k = \frac{g}{V^2\cos^2\Theta}. \qquad (3.11)$$

これは $\Theta = 0$ とすれば物体の後にできる一次元定在波を与える。

一方 $V = d\sqrt{gk}/dk = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}c$ すなわち

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} c \frac{\mathbf{K}}{k} \tag{3.12}$$

から

$$\bar{\mathbf{V}} = U\left(\mathbf{i} - \frac{\mathbf{K}}{2k}\cos\Theta\right), \tag{3.13}$$

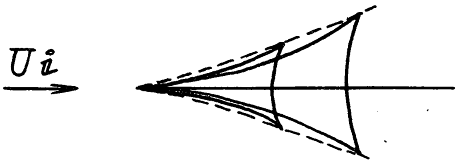
が導かれ，これと (3.11) から得られる：

$$\mathbb{K}\cdot\bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{2}Uk\cos\Theta = -\frac{g}{2U\cos\Theta}, \tag{3.14}$$

を (3.9) に入れゝば点源の後方半頂角 $19°28'$ のくさびの中に限られその上にカスプを持つケルビンの ship wave のパラメータ表示：

$$\mathbf{X} = \frac{|\theta_N|U^2}{4g}(5\cos\Theta + \cos 3\Theta,\ \sin\Theta - \sin 3\Theta), \tag{3.15}$$

が得られる。



以上は勿論 $|\mathbf{X}|$, t が大として波動方程式のフーリエ表示解から stationary phase の方法を用いても見出だされている。[2-5]

§4 非線型波に対する Whitham-Lighthill のとりあつかい。[6-10]

非線型波の中で最も簡単なものは諸量が位相：$\theta = \mathbb{K}\cdot\mathbf{X} - \omega t$ だけの関数となる平面伝播波であって振巾 a を含む分散関係が成り立つ：

$$\omega = f(\mathbf{K}, a)。 \tag{4.1}$$

さて波長にくらべて大きく、週期にくらべて永い時間の间に波の振巾、波数、振動数が$\mathbb{X}$, tの関数としてゆっくりと変化するばあい、現象を局所平面波で記述することを考える。そのために系のラグランジュ密度Lに局所平面波の表式を代入し、数波長について平均をとる。その結果として得られる

$$\mathcal{L} = \langle L \rangle = \mathcal{L}(\mathbb{K}, \omega, a) \tag{4.2}$$

はa, $\mathbb{K}$, ωをパラメータとして含む。また$\mathbb{K}$とωは位相関数θから(2.2), (2.3)すなわち

$$k_i = \partial\theta/\partial x_i, \quad \omega = -\partial\theta/\partial t, \tag{4.3}$$

として導かれるものである。

いま、汎関数

$$\iint \mathcal{L}\, d\mathbb{X}\, dt, \tag{4.4}$$

のθに関する変分をとればEulerの方程式として

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k_i}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega}\right), \tag{4.5}$$

すなわちθの変化を支配する準線型の方程式：

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial k_i\partial k_j}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_j} - 2\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial k_i\partial\omega}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial t} + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0 \tag{4.6}$$

が導かれる。

特に一次元の波ではLegendre変換

$$\phi(\omega, k) = kx - \omega t - \theta, \quad \partial\phi/\partial\omega = -t, \quad \partial\phi/\partial k = x \tag{4.7}$$

によって (ω, k) 面での線型の偏微分方程式：

$$\mathcal{L}_{\omega\omega}\phi_{kk} - 2\mathcal{L}_{\omega k}\phi_{\omega k} + \mathcal{L}_{kk}\phi_{\omega\omega} = 0, \qquad (4.8)$$

が得られる。これは特性方向の微分方程式

$$\mathcal{L}_{\omega\omega}d\omega^2 + 2\mathcal{L}_{\omega k}d\omega dk + \mathcal{L}_{kk}dk^2 = 0, \qquad (4.9)$$

を持ち、その解として定まる

$$\eta = \frac{d\omega}{dk} = \frac{-\mathcal{L}_{k\omega} \pm \sqrt{\mathcal{L}_{k\omega}^2 - \mathcal{L}_{\omega\omega}\mathcal{L}_{kk}}}{\mathcal{L}_{\omega\omega}}, \qquad (4.10)$$

はもし実ならば二つの群速度（このとき(4.6),(4.8)は双曲型），虚ならば位相の不安定（このとき(4.6),(4.8)は楕円型）に導く．

実際，$x=0$ で位相$(k_0x-\omega_0t)$に微小攪乱 $\delta k = \delta\partial\theta/\partial x = \epsilon e^{i\omega t}$を加えたとし，境界条件 $\theta = -\omega_0 t$, $\partial\theta/\partial x = k_0 + \epsilon e^{i\omega t}$: $x=0$ の下に(4.6)の解を求めると近似的に

$$\theta = k_0x - \omega_0 t + \epsilon e^{i\omega(t-\eta x)}, \qquad (4.11)$$

が得られる．こゝでηは(4.10)に相当し，ηが複素数であればxと共にθが増大し，位相不安定に対応する（例えば$kh>1.363$の重力波[9),10)]）．

References

1) M.J. Lighthill & G.B. Whitham: Proc. Roy. Soc. A 229(1955).

2) G.B. Whitham: J. Fluid Mech. 9 (1960) 347-352.

3) Landau & Lifshitz: Fluid Mechanics. vol.6 Course of theoretical physics (1959) 256.

4) F.J. Ursell: J. Fluid Mech. 9 (1960) 333.

5) M.J. Lighthill: J. Inst. Math. Applics. 1 (1965) 1.

6) M.J. Lighthill: J. Fluid Mehc: 27 (1967) 725.

7) G.B. Whitham: J. Fluid Mech. 22 (1965) 273.

8) M.J. Lighthill: Proc. Roy. Soc. 299 A (1967) 237.

9) G.B. Whitham: Proc. Roy. Soc. 299 A(1967) 6., J.Fluid Mech. 27(1967) 399.

10) T.B. Benjamin & J.E. Feir: J. Fluid Mech. 27(1967) 417.