

三体問題の固有値

京工繊大 内山 淳

原子核が無限大の質量を持つときの三粒子系に対する Schrödinger 作用素は次のような形をしている。

$$H = -\Delta_1 - \Delta_2 - \frac{Z_1}{r_1} - \frac{Z_2}{r_2} + \frac{Z_3}{|r_1 - r_2|}.$$

ここで Z_1, Z_2, Z_3 は正の定数である。いま $Z_1 \geq Z_2$ と仮定すると、この essential spectrum は $\sigma_e(H) = [\mu_1, \infty)$ となる。但し

$$\mu_i = \inf_{\lambda \in \sigma(H_i)} \lambda = -\frac{Z_i^2}{4} \quad (i=1, 2)$$

$$H_i = -\Delta_i - \frac{Z_i}{r_i}$$

である。(Zislin [2])。そこで $(-\infty, \mu_1)$ の固有値について調べることにしよう。Kato [1] は $Z_1 = Z_2 = 2Z_3$ のとき、 H は無限個の固有値があることを示した(ヘリウム原子)。また $Z_1 > Z_3$, $Z_2 > Z_3$ のときに Kato [1] と同じ結果が成り立つことを Zislin [2] 及び筆者 [3] によって示されている。そこでここでは $Z_3 > Z_2$ の場合を考えよう。

定理

$Z_3 > Z_2$ ならば, H は $(-\infty, -\frac{Z_2^2}{k})$ に高々有限個の固有値しか持たない.

以後この定理の証明を順次述べることにしよう. さて我々の仮定のもとでは,

$$\frac{Z_3}{|r_1 - r_2|} - \frac{Z_2}{r_2} \geq \frac{Z_3}{r_1 + r_2} - \frac{Z_2}{r_2} \geq \frac{1}{r_2} \left(\frac{Z_3}{1+k} - Z_2 \right)$$

が $r_1 \leq k r_2$ をみたす r_1, r_2 に対して成り立つことに注目しよう. ここで $k > 0$ をして,

$$\frac{Z_3}{1+k} > Z_2$$

となるように, 十分大きくとってくる. さらに $g(t)$ を次の性質を持つ函数とする.

$$g(t) \in C^\infty(0, \infty), \quad \begin{cases} g(t) \equiv 1 & \text{for } t > k+1 \\ g(t) \equiv 0 & \text{for } 0 < t < k \end{cases}$$

$$\text{且. } 0 \leq g(t) \leq 1 \quad \text{for } 0 < t < +\infty.$$

このとき, $R > 1$ を十分大きくとれば, 次の関係式をみたすようにすることができる.

$$1) \quad -\frac{Z_i}{r_i} > \begin{cases} \frac{1}{3}(\mu_1 - \mu_2) & (Z_1 > Z_2 \text{ の場合}) \\ \frac{1}{2} \mu_1 & (Z_1 = Z_2 \text{ "}) \end{cases} \quad \text{for } r_i > \frac{R}{k+1} \quad (i=1, 2),$$

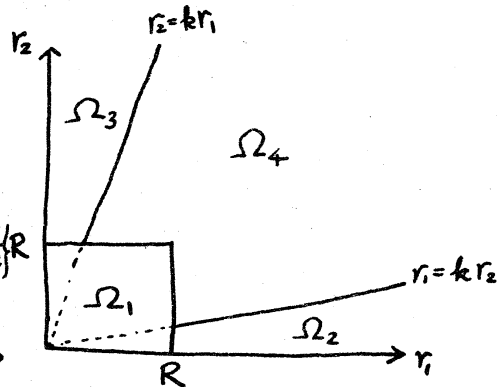
$$\text{ii) } t^4 g(t) g'(t) + \left(\frac{z_3}{1+k^{-1}} - z_2 \right) R \geq 0 \quad \text{for } k \leq t \leq t+1$$

$$\text{iii) } \frac{\mu_2 - \mu_1}{3} - \frac{1}{R^2} |g(t) g'(t) t^4| \geq 0 \quad (z_1 > z_2 \text{ の場合}) \quad "$$

このような R に対して, \mathbb{R}^6 を次の
ような領域に分割しよう。

$$\Omega_1 = \{ r_1 < R \text{ 且 } r_2 < R \}, \quad \Omega_2 = \{ r_1 \geq R, r_2 \leq \frac{r_1}{k} \}$$

$$\Omega_3 = \{ r_2 \geq R \text{ 且 } r_1 \leq \frac{r_2}{k} \}, \quad \Omega_4 = \mathbb{R}^6 - \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i$$



さらに, $\psi \in \mathfrak{D}(H) = \mathfrak{D}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}^6)$ に対して

$$\begin{aligned} L[\psi] \equiv (H\psi, \psi)_{\mathbb{R}^6} &= \sum_{i=1}^4 \left\{ \|\nabla_1 \psi\|_{\Omega_i}^2 + \|\nabla_2 \psi\|_{\Omega_i}^2 - \left(\frac{z_1}{r_1} \psi, \psi \right)_{\Omega_i} - \left(\frac{z_2}{r_2} \psi, \psi \right)_{\Omega_i} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{z_3}{|r_1 - r_2|} \psi, \psi \right)_{\Omega_i} \right\} \equiv \sum_{i=1}^4 L_i[\psi] \end{aligned}$$

とおこう。このとき我々は以下の Lemmas を得る。

Lemma 1.

$$\forall \psi \in \mathfrak{D}(H), \quad L_3[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|_{\Omega_3}^2,$$

Lemma 2.

$$\forall \psi \in \mathfrak{D}(H), \quad L_4[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|_{\Omega_4}^2,$$

Lemma 3.

$$\forall \psi \in \mathfrak{D}(H), \quad L_2[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|_{\Omega_2}^2$$

Lemma 4.

適当な有限次元部分空間 $\mathcal{M} \subset L^2(\mathbb{R}^6)$ が存在して,

$$\forall \psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{H}) \cap \mathcal{D}\mathcal{L}^\perp \quad L[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|_{\Omega_1}^2.$$

これらの Lemmas を用いれば、定理の証明を得る。すなわち。

定理の証明

$E(\lambda)$ を \mathbb{H} に属する単位分解とする。いま $(-\infty, \mu_1)$ に無限個の固有値があるとすれば $E(\mu_1 - 0) L^2(\mathbb{R}^6)$ は無限次元になるから。

$$\exists \psi \in E(\mu_1 - 0) L^2(\mathbb{R}^6) \cap \mathcal{D}\mathcal{L}^\perp \quad \psi \neq 0$$

である。この ψ は、 $\psi \in E(\mu_1 - 0) L^2(\mathbb{R}^6)$ であることより

$$L[\psi] < \mu_1 \|\psi\|_{\mathbb{R}^6}^2$$

であるが、一方 $\psi \in \mathcal{D}\mathcal{L}^\perp$ であることより、Lemmas 1~4 を用いれば

$$L[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|_{\mathbb{R}^6}^2$$

を得る。よって矛盾である。

(証明 3)

そこで以下においては、Lemmas 1~4 を証明しよう。

Lemma 1 の証明

Green の公式を用いることにより

$$\int_{\Omega_3} |\nabla_1 (g(\frac{r_2}{r_1}) \psi(x))|^2 dx = \int_{\Omega_3} g(\frac{r_2}{r_1})^2 |\nabla_1 \psi|^2 dx - \int_{\Omega_3} g(\frac{r_2}{r_1}) g''(\frac{r_2}{r_1}) \frac{r_2^2}{r_1^4} |\psi|^2 dx$$

を得る。

他方, μ_1 の定義により

$$\int_{R^3} |\nabla_r(g\psi)|^2 d\Omega_r - \int_{R^3} \frac{Z_1}{r_1} |g\psi|^2 d\Omega_r \geq \mu_1 \int_{R^3} |g\psi|^2 d\Omega_r$$

を得る。これを $\{r_2; r_2 \geq R\}$ で積分すると

$$\int_{\Omega_3} |\nabla_r(g\psi)|^2 dx - \int_{\Omega_3} \frac{Z_1}{r_1} |g\psi|^2 dx \geq \mu_1 \int_{\Omega_3} |g\psi|^2 dx$$

となる。最初の式とこの式より

$$\int_{\Omega_3} \left\{ g^2 |\nabla_r \psi|^2 - \frac{Z_1}{r_1} g^2 |\psi|^2 \right\} dx \geq \int_{\Omega_3} \left\{ \mu_1 g^2 + g g'' \frac{r_2^2}{r_1^2} \right\} |\psi|^2 dx$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} L_3[\psi] &= \int_{\Omega_3} \left\{ |\nabla_2 \psi|^2 + (1-g^2) |\nabla_r \psi|^2 \right\} dx + \int_{\Omega_3} \left\{ g^2 |\nabla_r \psi|^2 - \frac{Z_1}{r_1} g^2 |\psi|^2 \right\} dx \\ &\quad + \int_{\Omega_3} \left\{ -\frac{Z_1}{r_1} (1-g^2) + \frac{Z_3}{|r_1-r_2|} - \frac{Z_2}{r_2} \right\} |\psi|^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega_3} \left\{ \mu_1 g^2 + g g'' \frac{r_2^2}{r_1^2} - \frac{Z_1}{r_1} (1-g^2) + \frac{Z_3}{|r_1-r_2|} - \frac{Z_2}{r_2} \right\} |\psi|^2 dx \end{aligned}$$

を得る。いま $\frac{r_2}{r_1} = t$ とおくと, $k, g(t), R$ の選定により

$$(1-g(t)^2) \left(-\mu_1 - \frac{Z_1}{r_1}\right) + \frac{1}{r_2^2} \left\{ g(t) g''(t) t^4 + r_2^2 \left(\frac{Z_3}{|r_1-r_2|} - \frac{Z_2}{r_2} \right) \right\} \geq 0$$

が, $t \geq k, r_2 \geq R$ に対して成立することがわかるから,

$$L_3[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|_{\Omega_3}^2 \quad \text{for } \forall \psi \in \mathcal{D}(H)$$

を得る。

(証明 3)

Lemma 2 の証明

R の条件 i) 及び $\frac{\mu_1 - \mu_2}{3} > \frac{\mu_1}{2}$ より

$$L_4[\psi] \geq \int_{\Omega_4} \left\{ -\frac{Z_1}{r_1} - \frac{Z_2}{r_2} \right\} |\psi|^2 dx \geq \mu_1 \|\psi\|_{\Omega_4}^2$$

を得る。

Lemma 3 の証明

$\mu_1 = \mu_2$ ($Z_1 = Z_2$) のときには, Lemma 1 と同様に示すことができるから, $\mu_1 < \mu_2$ (すなわち $Z_1 < Z_2$) と仮定する。 μ_2 の定義を用いることにより, Lemma 1 の計算と同様にして, 次の不等式を得ることができる。

$$L_2[\psi] \geq \int_{\Omega_2} \left\{ \mu_2 g\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + g\left(\frac{r_1}{r_2}\right) g''\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \frac{r_1^2}{r_2^4} - \frac{Z_2}{r_2} (1 - g\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2) + \frac{Z_3}{|r_1 - r_2|} - \frac{Z_1}{r_1} \right\} |\psi|^2 dx.$$

ここで $\frac{r_1}{r_2} = t$ とおくと, R の選び方から

$$(1 - g(t)^2) \left(-\mu_2 - \frac{Z_2}{r_2}\right) + (\mu_2 - \mu_1) + \frac{1}{r_1^2} g(t) g''(t) t^4 - \frac{Z_1}{r_1} + \frac{Z_3}{|r_1 - r_2|} \geq 0$$

が $t \geq 1$ 及び $r_1 \geq R$ で成り立つことがわかるから,

$$L_2[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|_{\Omega_2}^2 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(H)$$

を得る。

(証明 3)

Lemma 4 の証明

簡単な計算により, $\exists K > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists C(\varepsilon) > 0$

$$\left| \int_{\Omega_i} \frac{z_i}{n} |\psi|^2 dx \right| \leq K (\varepsilon \|\nabla \psi\|_{\Omega_1}^2 + C(\varepsilon) \|\psi\|_{\Omega_1}^2) \quad (\psi \in \mathcal{D}(H), i=1,2)$$

ε を示すことができる。よってこれより、

$$L_1[\psi] \geq (1 - 2K\varepsilon) \|\nabla \psi\|_{\Omega_1}^2 - 2KC(\varepsilon) \|\psi\|_{\Omega_1}^2 \quad (\psi \in \mathcal{D}(H))$$

を得る。いま $1 > 2K\varepsilon$ とするようには $\varepsilon > 0$ をとる。ところで $A = -\Delta$, $\mathcal{D}(A) = \{f \in E_L^2(\Omega_1), \frac{\partial f}{\partial n}|_{\partial\Omega_1} = 0\}$ を考えると、

$(2K(\varepsilon) + \mu_1)(1 - 2K\varepsilon)^{-1}$ 以下の A の固有値は有限個である。

その固有函数 $E \{ \varphi_n \}_{n=1, \dots, p} \subset \mathcal{D}(A)$ とし, $\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x) \quad (x \in \Omega_1)$

$\tilde{\varphi}_n(x) = 0 \quad (x \notin \Omega_1)$ で張られる $L^2(\mathbb{R}^6)$ の subspace \mathcal{M} とする

と。 A の固有値問題は, $\|\nabla \psi\|_{\Omega_1}^2$ の $E_L^2(\Omega_1)$ における変分法によって解ける (Courant-Hilbert) のことにより、

$$L_1[\psi] \geq \mu_1 \|\psi\|_{\Omega_1}^2 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{M}^\perp$$

を得る。

(証明 3)

$z_1 = z_2 = z_3$ の場合には, $(-\infty, -\frac{z_1^2}{4})$ における固有値の個数は有限であるかどうかは, わかっているが, 少なくとも 1 個は存在することはいはわかる。また $0 < z_2 < z_1 < z_3$ とすれば 1 個も固有値を, $(-\infty, -\frac{z_1^2}{4})$ には持たないことがわかる。

References

- [1]. Kato, T., On the existence of solutions of the helium wave equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* 70 (1951) 212-218.
- [2] Žislin, G. M., A study of the spectrum of the Schrödinger operator for a system of several particles, *Trudy Moskov. Math. Obšč.* 9 (1960) 82-102 (Russian)
- [3] Uchiyama J. On the discrete eigenvalues of the many particle system, *Publ. RIMS Kyoto Univ. Ser. A* 2 (1966) 117-132.
- [4] ———. Finiteness of the Number of Discrete Eigenvalues of the Schrödinger Operator for a Three Particle System, *Publ. RIMS Kyoto Univ. Ser. A.* 5 (1969) 51-53
- [5] ———. 同 II. to appear in *Publ. RIMS.*