数理解析研究所講究録
第 102 巻 1970 年 24-40

Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations for Hilbert space-valued functions.

京大 数研 斉藤義実

§0. Introduction.

微分作用素

(1) $$-\frac{d^2}{dr^2}+A(r) \qquad (r\geqq 0)$$

を考えよう。ここに $A(r)$ は Hilbert space H 上で定義された有界自己共役な作用素とし，(1) は H-valued function $F(r)$ に作用するものと考える。$r=0$ における境界条件として

(2) $$BF'(0)-CF(0)$$

を考える. B, C も H 上の有界自己共役作用素とする。作用素 (1)−(2) は $\mathfrak{H}=L_2(0,\infty;H)$ の作用素と考えることができる.

H. Weyl − M. H. Stone − E. C. Titchmarsh − K. Kodaira の一次元における一般展開定理の理論を抽象化することによつて, 作用素

(1)－(2)の固有関数展開を次のような形に行なうことができる：
$r\in[0,\infty)$ に対して "eigenoperator" $\Phi(r,\lambda)$が存在して

$$\begin{cases} -\Phi''(r,\lambda)+A(r)\Phi(r,\lambda)=\lambda\Phi(r,\lambda) \\ C\Phi(0,\lambda)-B\Phi'(r,\lambda)=0 \end{cases} \qquad (\lambda\in\mathbb{C})$$

をみたす．$\Phi(r,\lambda)$は（r，λをとめるごとに）H上の有界作用素である。L_0を微分作用素(1)－(2)の一つの自己共役拡大としよう．このとき "the generalized Fourier space of L_0" である$\mathfrak{H}_\rho$なるHilbert space が存在して，

(A) "generalized Fourier transform" $\mathcal{F}$ を

$$(\mathcal{F}F)(\mu)=\int_0^\infty \Phi^*(r,\mu)F(r)\,dr$$

で定義すると，$\mathcal{F}$は$\mathfrak{H}$から$\mathfrak{H}_\rho$への unitary 変換となる。

(B) $\begin{cases} E(\Delta)=\mathcal{F}^*C_\Delta\cdot\mathcal{F} & (C_\Delta は\ \Delta\ の特性関数) \\ L_0=\mathcal{F}^*\mu\mathcal{F} \end{cases}$

が成立する．

F.S. Rofe-Beketov [5]は同様の作用素に対して$\mathcal{F}$が（必らずしも unitary operatorではなく）isometric operatorとなるような$\mathfrak{H}_\rho$の存在を証明している。またWilli Jäger [2]は，non-negative definit self-adjoint の$B(r)$とある意味で$C(r)\to 0$ $(r\to\infty)$をみたす$C(r)$に対して$-\frac{d^2}{dr^2}+B(r)+C(r)$の固有関数展開を（本論の方法とは違う方法で）行なっている．

§7. 方程式 $\left(\frac{d^2}{dr^2}+A(r)-\lambda\right)F(r)=0$

Hを可分なHilbert空間とする．$(0,\infty)$上のH-valued L_2関数のなすHilbert空間$L_2(0,\infty;H)$を$\mathfrak{H}$と書くことにする．これらのHilbert空間のノルム，内積は，必要があれば，$\|\ \|_H$，$(\ ,\ )_{\mathfrak{H}}$のごとく添数をつけるが，混同の恐れがない限り，単に$\|\ \|$，$(\ ,\ )$で表わすことにする．

$\mathbb{B}$をHにおける有界線型作用素の全体とする．そして$A(r)$を$[0,\infty)$上の$\mathbb{B}$-valued functionとし，次の仮定がみたされているものとする：

<u>Assumption 1.1.</u> (1) $r\in[0,\infty)$に対し，$A(r)$はH上の有界な自己共役作用素である．

(2)任意の$r\in[0,\infty)$について

$$\int_0^r \|A(r)\|^2 dr<\infty,\quad (\|A(r)\|\text{は}A(r)\text{の operator norm}).$$

つまり$\|A(r)\|^2$は$[0,\infty)$で局所可積分である．

(3)任意の$r\in[0,\infty)$に対して正数C_rが定まり

$$\int_0^r (A(s)F(s),F(s))_H ds \geqq -C_r\int_0^r \|F(s)\|_H^2 ds$$

がすべての$F\in\mathfrak{H}$に対して成立する．

以下方程式

$$(1.1) \qquad \left(-\frac{d^2}{dr^2}+A(r)-\lambda\right)F(r)=0$$

の初期値問題を考えるわけであるが，そのために次の定義を行なう：

<u>Definition 1.1</u>. $u_0, v_0 \in H$ としまた $\lambda \in \mathbb{C}$ としよう．$[0,\infty)$ 上の H-valued function $F(r)$ が次の条件 (1)〜(5) をみたすとき，$F(r)$ を (initial) data $\{u_0, v_0\}$ に対する (1.1) の解であるという：

(1) weak derivative $F'(r)$ が各実 r で存在して，$\|F'(r)\|_H$ は $[0,\infty)$ 上局所可積分である．

(2) $[0,\infty)$ に含まれる任意の閉区間 $[\alpha,\beta]$ で $F'(r)$ は weakly absolutely continuous.

(3) $F'(r)$ は $[0,\infty)$ 上ほとんどいたるところ weak derivative $F''(r)$ をもち，$\|F''(r)\|_H$ は $[0,\infty)$ 上局所可積分．

(4) ほとんどいたるところ

$$-F''(r)+A(r)F(r)=\lambda F(r)$$

が成立し，しかも

$$(5) \qquad \begin{cases} F(0)=u_0, \\ F'(0)=v_0 \end{cases}$$

が成立する．

<u>Proposition 1.1.</u> data $\{u_0, v_0\}$ に対する (1.1) の解は unique に存在する.

証明は問題を積分方程式に変換して逐次近似法を用いればよい.

さて次に $r=0$ において境界条件を考えるために,

<u>Definition 1.2.</u> (1) 初期値として

$$\begin{cases} F_1(0) = u \\ F_1'(0) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} F_2(0) = 0 \\ F_2'(0) = v \end{cases}$$

をとった場合の解 F_1, F_2 によって作用素 $\Phi_0(r, \lambda)$, $\Theta_0(r, \lambda)$ を導入する:

$$\Phi_0(r, \lambda)u = F_1(r), \qquad \Theta_0(r, \lambda)v = F_2(r).$$

$\Phi_0(r, \lambda)$, $\Phi_0'(r, \lambda)$, $\Theta_0(r, \lambda)$, $\Theta_0'(r, \lambda)$ などはすべて $[0, \infty)$ 上の $\mathbb{B}$-valued function となり, Φ_0, Θ_0 は operator-valued functions として (1.1) を満足する.

(2) H が二つの閉部分空間 H_1, H_2 によって直和に分解しているとする. $H = H_1 \oplus H_2$. そして B_2 と C_2 を H_2 上で定義され, H_2 内に値をとる有界自己共役作用素とする. しかも

$$B_2 C_2 = C_2 B_2 ,$$

が成立し，逆作用素 B_2^{-1} が存在するとする．このとき，

$$B = \begin{cases} 0 & \text{on } H_1 \\ B_2 & \text{on } H_2 \end{cases}, \qquad C = \begin{cases} \text{identity} & \text{on } H_1 \\ C_2 & \text{on } H_2 \end{cases}$$

とおいて，$\mathbb{B}$-valued function $\phi(r,\lambda)$ を

$$\phi(r,\lambda) = \phi_0(r,\lambda)B + \theta_0(r,\lambda)C \tag{1.2}$$

で定義する．

Definition 1.2 から $\phi(r,\lambda)$ は $r=0$ で境界条件

$$B\phi'(0,\lambda) - C\phi(0,\lambda) = 0 \tag{1.3}$$

をみたすことがわかる．

§2．作用素 $-\frac{d^2}{dr^2} + A(r)$

最初に右の作用素として $-\frac{d^2}{dr^2}+A(r)$ を定義するために必要な H-valued function に関する Green の公式を導入しよう．

<u>Definition 2.1.</u> $[\alpha,\beta]$ を $[0,\infty)$ に含まれる有界閉区間として $\mathcal{D}[\alpha,\beta]$ を次の (1)～(3) をみたす H-valued function の全体とする：

(1) $F(r)$ は $[\alpha,\beta]$ 上 weakly differentiable で，$\|F(r)\|_H \in L_1[\alpha,\beta]$.

(2) $F'(r)$ は weakly absolutely continuous on $[\alpha, \beta]$.

(3) $F'(r)$ はほとんどいたるところ weak derivative $F''(r)$ をもち $\|F''(r)\|_H \in L_1[\alpha, \beta]$.

<u>Proposition 2.1.</u> $F_1, F_2 \in \mathcal{D}[\alpha, \beta]$ とすると,

$$\int_\alpha^\beta \{ (\mathcal{L}F_1(r), F_2(r))_H - (F_1(r), \mathcal{L}F_2(r))_H \} dr$$

$$= [F_1, F_2](\beta) - [F_1, F_2](\alpha).$$

ここで,

$$\begin{cases} \mathcal{L}F_i(r) = -F_i''(r) + A(r)F_i(r) \qquad (i=1,2). \\ [F_1, F_2](r) = (F_1(r), F_2'(r))_H - (F_1'(r), F_2(r))_H. \end{cases}$$

<u>Corollary 2.1.</u> $F_1 \in \mathcal{D}[\alpha, \beta]$ とし, F_2 は Definition 2.1 の (1)(2) をみたしているとする. このとき,

$$\int_\alpha^\beta (\mathcal{L}F_1(r), F_2(r))_H dr = \int_\alpha^\beta \{(F_1'(r), F_2'(r))_H + (A(r)F_1(r), F_2(r))_H\} dr$$

$$- (F_1'(r), F_2(r)) \Big|_\alpha^\beta .$$

これら Green の公式は R^1 の場合と同様に証明される. (すなわち $F_i(r)$ が実関数で, $A(r)$ も同じく実関数の場合).

次に differential operator $-\frac{d^2}{dr^2} + A(r)$ を $\mathfrak{H}$ の operator として定

義しよう．

<u>Definition 2.2.</u> H-valued function $F(r) \in \mathcal{D}$ とは，

(i) 任意の $[0,\infty)$ に含まれる有界閉区間 $[\alpha,\beta]$ について，$F \in \mathcal{D}[\alpha,\beta]$ が成立する．

(ii) B, C は Definition 1.2 で定義されたものとする．$F(r)$ は境界条件 $CF(0) - BF'(0) = 0$ をみたす．

(iii) $F(r) \in \mathfrak{H}$．また $-F''(r) + A(r)F(r) \in \mathfrak{H}$．

このとき operator L を

$$\begin{cases} \mathcal{D}(L) = \mathcal{D} \\ LF(r) = -F''(r) + A(r)F(r) \end{cases}$$

で定義する．（$\mathcal{D}(L)$ は L の定義域を意味するものとする）．

このとき，

<u>Theorem 2.1.</u> L は closed operator である．

この Theorem 2.1 より L は、境界条件が与えられたとき，《maximal Sturm-Liouville operator》と考えることができる．次節では L の（$\mathfrak{H}$ における）自己共役制限を考察し，その固有関数展開を行なう．

§3. 固有関数展開

§2で定義したLの中における自己共役制限の一つをL_0としよう（このような自己共役制限は一般には無数にある）そして$E(\mu)$をL_0の単位の分解とする。

まずこの節で用いられるある種の vector-valued integral の定義を与える。

Definition 3.1. $[\mu_1, \mu_2]$を$R=(-\infty, \infty)$の有限区間であるとする。$Q(\mu)$, $\alpha(\mu)$は$[\mu_1, \mu_2]$上で定義されたB-valued functionsとし，$U(\mu)$を$[\mu_1, \mu_2]$上で定義されたH-valued functionとする。今Δを$[\mu_1, \mu_2]$の有限個の分割とする，すなわち

$$\Delta = \Delta(\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n),$$

ここに

$$\mu_1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_n = \mu_2 .$$

そして

$$\delta(\Delta) = \max_{i=0,\cdots n-1} (\eta_{i+1} - \eta_i)$$

とおく。

もし$\eta_i \leq \eta_i' \leq \eta_{i+1}$として

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} Q(\eta_i')(\alpha(\eta_{i+1}) - \alpha(\eta_i))U(\eta_i') \quad 又は \quad \lim_{\delta(\Delta)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} Q(\eta_i')(U(\eta_{i+1}) - U(\eta_i))$$

がη_i'のとりかたや分割のしかたに無関係にHの弱位相の意味で収束するならば，そのlimitを

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} Q(\mu)\alpha(d\mu)U(\mu) \qquad \text{又は} \qquad \int_{\mu_1}^{\mu_2} Q(\mu)\bar{U}(d\mu)$$

と書くことにする．

単位の分解 $E(\mu)$ と §1 で定義された $\Phi(r,\lambda)$ とは次のように関係付けられる．

<u>Proposition 3.1</u> $F \in \mathfrak{H}$, $I = [\mu_1, \mu_2]$ とする．このとき

$$(3.1) \qquad F(r, I) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \Phi(r,\mu)\left(P_1 F'(0, d\mu) + B_2^{-1} P_2 F(0, d\mu)\right).$$

ここで

$$F(r, I) = E(I)F(r) = (E(\mu_2) - E(\mu_1))F(r),$$

$$F(0,\mu) = E(\mu)F(0), \qquad F'(0,\mu) = (E(\mu)F)'(0).$$

また P_1, P_2 は Definition 1.2 の H_1, H_2 の射影作用素であり，B_2^{-1} も Definition 1.2 で定義された通りである．

証明は，(3.1) の両辺が微分積分方程式

$$LU(r,\lambda) = \int_0^\lambda \mu \, dU(r,\mu)$$

をみたし，$r=0$ における初期値も一致することを用いる．

<u>Definition 3.2.</u> $I = [\mu_1, \mu_2]$ とする．このとき H の中に値をもつ $\mathfrak{H}$ 上で定義された線型作用素 $\xi(I)$ を

$$\xi(I)F = P_1 F'(0, I) + B_2^{-1} P_2 F(0, I)$$

で定義する．

単位の分解 $E(\mu)$ の性質と closed graph theorem を用いて，次のような $\xi(I)$ の性質が成立する．

<u>Proposition 3.2</u>. $\xi(I)$ は $\mathfrak{H}$ 上で定義された有界作用素であり，したがって $\xi^*(I)$ は H 上で定義された $\mathfrak{H}$ 内に値をもつ有界作用素である．そして $I_1=(\mu_1, \mu_2]$, $I_2=(\chi_1, \chi_2]$ とするとき，

(i)

(3.2) $\begin{cases} \xi(I_1 \cup I_2) = \xi(I_1) + \xi(I_2) \\ \xi^*(I_1 \cup I_2) = \xi^*(I_1) + \xi^*(I_2) \end{cases}$ $\quad (I_1 \cap I_2 = \phi$ として$)$

(ii)

(3.3) $\begin{cases} E(I_1)\xi^*(I_2) = \xi^*(I_1 \cap I_2) \\ \xi(I_2)E(I_1) = \xi(I_1 \cap I_2) \end{cases}$

(iii) $\xi(I_1)\xi^*(I_2) = \xi(I_1 \cap I_2)\xi^*(I_1 \cap I_2)$

(iv) $I = (\lambda_1, \lambda_2]$ に対して $\mathbb{B}$-valued function $\rho(I)$ を

$$\rho(I) = \xi(I)\xi^*(I)$$

と定義すれば，$\rho(I)$ は symmetric, non-negative definite, additive interval function である．

Proposition 3.1 と 3.2 を組合せることによって，$\xi(I)$, $\xi^*(I)$, $\rho(I)$, $\Phi(r, \lambda)$ の間の関係がわかる．

<u>Proposition 3.3.</u> $I=(\mu_1, \mu_2]$ とする．また

$$\xi(\mu) = \begin{cases} \xi((0,\mu]) & \text{if } \mu \geqq 0, \\ -\xi((\mu,0]) & \text{if } \mu \geqq 0, \end{cases}$$

$$\rho(\mu) = \xi(\mu)\,\xi^*(\mu)$$

とおく．このとき $u \in H$ に対して

$$(3.4) \qquad [\xi^*(I)u](r) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \Phi(r,\mu)\,\rho(d\mu)\,u$$

が成立する．また carrier compact で十分なめらかな $F \in \mathfrak{H}$ に対して

$$(3.5) \qquad (\xi(I)F)(r) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \rho(d\mu)\left[\int_0^\infty \Phi^*(r,\mu)F(r)\,dr\right]$$

が成立する．

(3.1) において $F = \xi^*(I)u$ とおけば，(3.3) を考慮して (3.4) が得られる．また $F(r) \equiv 0$ for $r \geqq r_0$ として

$$\begin{aligned}
(\xi(I)F, u)_H &= (F, \xi^*(I)u)_{\mathfrak{H}} = \int_0^{r_0} \Big(F(r), \int_{\mu_1}^{\mu_2} \Phi(r,\mu)\rho(d\mu)\Big)_H dr \\
&= \int_0^{r_0}\int_{\mu_1}^{\mu_2} \big(\rho(d\mu)\,\Phi^*(r,\mu)F(r), \mu\big)_H\, dr \\
&= \int_{\mu_1}^{\mu_2} \Big(\rho(d\mu)\int_0^{r_0} \Phi^*(r,\mu)F(r)\,dr, u\Big)_H \\
&= \Big(\int_{\mu_1}^{\mu_2} \rho(d\mu)\Big[\int_0^\infty \Phi^*(r,\mu)F(r)\,dr\Big], u\Big)_H
\end{aligned}$$

より(3.5)がわかる。(もちろんこれらの積分が存在すること,また積分順序の交換の可能性などは証明することが必要であるが)。

《the generalized Fourier space》を定義する第一段階として次の定義を与える.

<u>Definition 3.3</u> $f(\mu)$, $g(\mu)$ を $[\mu_1, \mu_2]$ で定義された H-valued functions とする. Definition 3.1 と同様に分割 Δ を定めて,

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}((\rho(\eta_{i+1})-\rho(\eta_i))f(\eta_i'), g(\eta_i'))_H$$

が存在するとき, これを

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2}(\rho(d\mu)f(\mu), g(\mu))_H .$$

でしめすことにする

$f(\mu)$, $g(\mu)$ が適当になめらかならこの積分が存在することが示される.

<u>Proposition 3.4</u> $F \in \mathfrak{H}$ が compact carrier をもち, 十分なめらかであるとする. $I = [\mu_1, \mu_2]$ として

$$(\mathcal{F}_0 F)(\mu) = \int_0^\infty \phi^*(r, \mu) F(r)\,dr$$

とおけば,

(i) $\quad (E(I)F)(r)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\Phi(r,\mu)\rho(d\mu)(\mathcal{F}_0F)(\mu)$

(ii) $\quad \|E(I)F\|_{\mathfrak{H}}^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}(\rho(d\mu)(\mathcal{F}_0F)(\mu),(\mathcal{F}_0F)(\mu))_H,$

$$\|F\|_{\mathfrak{H}}^2=\lim_{\substack{\mu_1\to-\infty\\ \mu_2\to\infty}}\int_{\mu_1}^{\mu_2}(\rho(d\mu)(\mathcal{F}_0F)(\mu),(\mathcal{F}_0F)(\mu))_H$$

(iii) $\quad L_0E(I)F(r)=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\mu\Phi(r,\lambda)\rho(d\mu)(\mathcal{F}_0F)(\mu).$

(i)は(3.1)と(3.5)から得られる．(i)を用いて(ii)と(iii)が得られる．

さて，$\mathbb{R}$上で定義されたH-valued function $U(\mu)$で十分なめらかでcarrierがcompactなものの全体を$\mathcal{U}$とする．$\mathcal{U}\ni U(\mu)$に対して

$$\|U\|_\rho^2=\int_{\mu_1}^{\mu_2}(\rho(d\mu)U(\mu),U(\mu))_H$$

でUのnorm $\|U\|_\rho$を定義する．ただし car $U\subset[\mu_1,\mu_2]$．このノルムを用いて$U,V\in\mathcal{U}$に対して内積$(U,V)_\rho$を

$$(U,V)_\rho=\frac{1}{4}\left\{(\|U+V\|_\rho^2-\|U-V\|_\rho^2)+i(\|U+iV\|_\rho^2-\|U-iV\|_\rho^2)\right\}$$

で定義する．このとき$\mathcal{U}$はpre-Hilbert spaceと考えることができる．このpre-Hilbert space $\mathcal{U}$を用いてgeneralized Fourier space $\mathfrak{H}_\rho$とgeneralized Fourier transform $\mathcal{F}$を次のように定

義する

<u>Definition 3.4</u>. pre-Hilbert space $\mathfrak{U}$を完備化して得られるHilbert space をL_0 の generalized Fourier spaceということにして，$\mathfrak{H}_\rho$であらわす．Proposition 3.4 より $\mathfrak{F}_0$ は$\mathfrak{H}_\rho$に値をもつ有界作用素であるから，これを$\mathfrak{H}$上に拡張した作用素を$\mathfrak{F}$であらわし，L_0の generalized Fourier transform ということにする．$\mathfrak{F}$は$\mathfrak{H}$上で定義され$\mathfrak{H}_\rho$の中に値をもつ isometric operator である．

$\mathfrak{F}^*$に関しては次のような表現が可能である．

<u>Proposition 3.5</u>. $U \in \mathfrak{U}$ なら

$$\mathfrak{F}^* U(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(r,\mu)\,\rho(d\mu)\,U(\mu). \tag{3.6}$$

L_0の固有関数展開は次の形をとる．

<u>Theorem 3.1.</u> $\mathfrak{H}_\rho$と$\mathfrak{F}$をDefinition 3.4 の通りとする．このとき，

(i) $\mathfrak{F}$は$\mathfrak{H}$から$\mathfrak{H}_\rho$の上への unitary operator である．

(ii) Iを$\mathbb{R}$上の interval とし $C_I(\mu)$をIの特性関数とすると，

$$E(I) = \mathfrak{F}^* C_I \mathfrak{F}.$$

(iii) $F \in \mathcal{D}(L_0) \iff \mu\cdot(\mathcal{F}F)(\mu) \in \mathfrak{H}_\rho$ そしてこのとき,

$$L_0 F = \mathcal{F}^* \mu \cdot \mathcal{F} F$$

が成立する.

(i)の証明に関して言えば, $U \in \mathfrak{H}_\rho$に対して

$$\|\mathcal{F}^* U\|_{\mathfrak{H}} = \|U\|_\rho$$

を示せばよい. そのためにはUが step function の場合を考えればよい.

$$U(\mu) = \begin{cases} u_k & \mu \in [\eta_k, \eta_{k+1}] \quad (k=0,1,\cdots,N-1) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

として (3.4) と (3.6) より $\Delta_k = (\eta_k, \eta_{k+1}]$ として

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^* U(r) &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \Phi(r,\mu)\rho(d\mu)\, u_k \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \xi^*(\Delta_k) u_k(r) \end{aligned}$$

であるから, Proposition 3.2 を用いて

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^* U\|_{\mathfrak{H}}^2 &= \Big(\sum_{k=0}^{N-1} \xi^*(\Delta_k) u_k(\cdot), \sum_{k=0}^{N-1} \xi^*(\Delta_k) u_k(\cdot) \Big)_{\mathfrak{H}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \big(\xi(\Delta_k)\xi^*(\Delta_k) u_k, u_k \big)_{\mathfrak{H}} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (\rho(\Delta_k) u_k, u_k) = \|U\|_\rho^2 \end{aligned}$$

となる.

Bibliography

[1] V. I. Gorbačuk and M. L. Gorbačuk, Expansion in Eigenfunctions of a second-order differential Equation with operator coefficient, Dokl. Akad. Nauk SSSR Tom 184 (1969), No 4. (Soviet Math. Vol 10 (1969), No. 1).

[2] Willi Jäger, Ein gewöhnlicher Differentialoperator zweiter Ordnung für Funktionen mit Werten in einer Hilbertraum, Math. Z. 113, 68-98.

[3] K. Kodaira, On singular solutions of second-order differential operators, Sugaku I (1948), 177-191; II (1949), 113-139 (Japanese).

[4] K. Kodaira, The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's Theory of S-matrix, Amer. J. Math. 71 (1949) 921-945.

[5] F. S. Rofe-Beketov, Eigenfunction expansions for infinite system of differential equation in non-selfadjoint and self-adjoint cases, Mat. Sb. 51 (93) (1960), 293-342 (Russian).