数理解析研究所講究録
第103巻 1970年 19-32

Oriented bordism and involutions

阪大 理 小宮克弘

§0. まずはじめに

topological pair (X, A) とその involution $\tau : (X, A) \to (X, A)$ を (X, A, τ) で表す。Atiyah [1] の bordism の概念と, Conner and Floyd [4] の involution の cobordism の概念を結合することによって, Stong [5] は (X, A, τ) の equivariant bordism group $\mathfrak{N}_*(X, A, \tau)$ 及び $\hat{\mathfrak{N}}_*(X, A, \tau)$ を定義した。

本稿の目的は, これらの oriented analogue $\Omega^{\pm}_*(X, A, \tau)$ 及び $\hat{\Omega}^{\pm}_*(X, A, \tau)$ を定義し, 二, 三の Stong の結果の analogue を求めることと, Stong の結果を利用して, 具体的な involution (X, τ) に対して, $\hat{\mathfrak{N}}_*(X, \tau)$ を計算することである。

§1. 定義

involution (X, A, τ) を一つ固定しておく。

(1) unoriented case

triple (M, μ, f) を考える: ここに, M は compact differentiable manifold with boundary で，$\mu: M \to M$ は differentiable involution，$f: (M, \partial M) \to (X, A)$ は equivariant map (i.e. $\tau f = f\mu$) である。二つの triple (M, μ, f)，(M', μ', f') が (equivariantly) bordant であるとは，次のとき云う：

$\exists$ 4-tuple (W, V, ι, g) such that

W, V は compact differentiable manifold with boundary で

$\partial V = \partial M \cup \partial M'$ (disjoint union)

$\partial W = M \cup V \cup M'$ (boundary で貼合せる)

$\iota: (W, V) \to (W, V)$ は differentiable involution で

$\iota|M = \mu$，$\iota|M' = \mu'$

$g: (W, V) \to (X, A)$ は equivariant map で

$g|M = f$，$g|M' = f'$

このとき，$(M, \mu, f) \sim (M', \mu', f')$ と表す。これは同値関係である。従って，$\mathfrak{N}_*(X, A, \tau) = \{(M, \mu, f)\}/\sim$ が定義される。これは triple の disjoint union に依ってアーベル群になり，さらに，任意の $[M, \mu, f] \in \mathfrak{N}_*(X, A, \tau)$ と，unoriented cobordism ring $\mathfrak{N}_*$ の任意の class $[N]$ に対して，

$$[M, \mu, f] \cdot [N] = [M \times N, \mu \times 1, f\pi_1]$$

と定義することに依って，$\mathfrak{N}_*$-module になる。

$\mathfrak{N}_*(X, A, \tau)$ の定義に於て，involution μ, μ', ι を凡て fixed point free なものに限るとき，$\mathfrak{N}_*$-module

$$\hat{\mathfrak{N}}_*(X.A.\tau) = \{(M.\mu.f) \mid \mu \text{は free}\}/\sim$$

が定義される。

(2) oriented case

unoriented case の Triple (M, μ, f) 及び 4-Tuple $(W.V.\nu.g)$ で特に，M, W, V は oriented，μ, ν は orientation preserving (以下，o-p と略す)，又は orientation reversing (o-r と略す) なものを考えるとき，次の4つが定義される：

$$\Omega^+_*(X.A.\tau) = \{(M.\mu.f) \mid \mu \text{は o-p}\}/\sim$$

$$\hat{\Omega}^+_*(X.A.\tau) = \{(M.\mu.f) \mid \mu \text{は o-p かつ free}\}/\sim$$

$$\Omega^-_*(X.A.\tau) = \{(M.\mu.f) \mid \mu \text{は o-r}\}/\sim$$

$$\hat{\Omega}^-_*(X,A.\tau) = \{(M,\mu.f) \mid \mu \text{は o-r かつ free}\}/\sim$$

Ω_* を oriented cobordism ring とするとき，これらは Ω_*-module である。

§2. Stong の結果

まとめて話をするために，$\mathfrak{N}_*(X,A.\tau)$ でもって $\mathfrak{N}_*(X.A.\tau)$ 又は $\hat{\mathfrak{N}}_*(X.A.\tau)$ を表す。involution $(X.A.\tau)$ とその間の equivariant map の category を $\mathcal{C}$ で表す。

命題1

$\{\mathfrak{N}_n, \partial_n\}$ は category $\mathcal{C}$ 上の equivariant generalized homology theory (Bredon [2]) である。

命題2

次の triangle は exact である:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\hat{\mathfrak{N}}_*(X.A.\tau) \arrow[rr, "k_*"] & & \mathfrak{N}_*(X.A.\tau) \arrow[dl, "F"] \\
& \bigoplus_{k=0}^{*} \mathfrak{N}_k(F_\tau \times BO(*-k), (A\cap F_\tau)\times BO(*-k)) \arrow[ul, "S"] &
\end{tikzcd}$$

ここに, F_τ は τ の fixed point set である。

命題3

次の triangle も exact である:

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathfrak{N}}_*(X.A.\tau) \arrow[rr, "\Delta"] & & \hat{\mathfrak{N}}_*(X.A.\tau) \arrow[dl, "\alpha"] \\
& \mathfrak{N}_*(X.A) \arrow[ul, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

Δ は Smith homomorphism と呼ばれる。

詳しくは, Stong [5] Proposition 1, Proposition 2, Proposition 5 を見られたい。

§3. Oriented analogue

前節に挙げた Stong の結果の oriented analogue を考えよう。尚, 命題 1′, 2′, 3′ とも証明は割愛させて頂きたい。

その1. $\Omega^{\pm}_*(X.A.\tau)$, $\hat{\Omega}^{\pm}_*(X.A.\tau)$ もまとめて話をするた

めに，$\mathfrak{N}_*(X.A.\tau)$ で表す。任意の equivariant map

$f:(X.A.\tau)\to(Y.B.\sigma)$ に対して，

$\mathfrak{N}_n(f):\mathfrak{N}_n(X.A.\tau)\to\mathfrak{N}_n(Y.B.\sigma)$ を

$$\mathfrak{N}_n(f)([M.\mu.g])=[M.\mu.fg]$$

で定義する。$\partial_n:\mathfrak{N}_n(X.A.\tau)\to\mathfrak{N}_{n-1}(A.\tau)$ を

$$\partial_n([M.\mu.g])=[\partial M,\mu|\partial M,\ g|\partial M]$$

で定義する。これらは Ω_*-homomorphism である。

命題 1′

> $\{\mathfrak{N}_n,\partial_n\}$ は category 上の equivariant generalized homology theory である。

その 2.　Topological pair $(X.A)$ を一つ固定しておく。

Triple $(\xi\to M,\theta.f)$ を考える：ここに，$\xi\to M$ は compact differentiable manifold M 上の vector bundle，τ_M を M の Tangent bundle とするとき，θ は $\xi\oplus\tau_M$ の orientation，$f:(M.\partial M)\to(X.A)$ は map である。

二つの triple が等しい：$(\xi_1\to M_1,\theta_1,f_1)=(\xi_2\to M_2,\theta_2,f_2)$ とは，次のときをいう：

$\exists$ bundle isomorphism

$$\begin{array}{ccc}\xi_1 & \xrightarrow{\Phi} & \xi_2\\ \downarrow & & \downarrow\\ M_1 & \xrightarrow{\varphi} & M_2\end{array}$$

such that

1) φ は diffeomorphism

2) $\Phi \oplus d\varphi : \xi_1 \oplus \tau_{M_1} \to \xi_2 \oplus \tau_{M_2}$ は o-p

3) $f_1 = f_2 \varphi$

任意の Triple $(\xi \to M, \theta, f)$ に対し

$$-(\xi \to M, \theta, f) = (\xi \to M, -\theta, f)$$

と定義する。$\partial M \subset M$ の normal bundle を ν とするとき，$(\xi|\partial M) \oplus \tau_{\partial M} \oplus \nu = (\xi \oplus \tau_M)|\partial M$ は oriented である。ν に外向きの unit normal vector に依って orientation を与えるとき，これと compatible な $(\xi|\partial M) \oplus \tau_{\partial M}$ の orientation を $\partial\theta$ で表し，

$$\partial(\xi \to M, \theta, f) = (\xi|\partial M \to \partial M, \partial\theta, f|\partial M)$$

と定める。

二つの triple が bordant : $(\xi_1 \to M_1, \theta_1, f_1) \sim (\xi_2 \to M_2, \theta_2, f_2)$ であるとは，次のときを言う：

$\exists$ 4-Tuple $(\xi \to W, V, \theta, f)$ such that

$\partial V = \partial M_1 \cup \partial M_2$ (disjoint union)

$\partial W = M_1 \cup V \cup M_2$ (boundary で貼合せる)

$f : (W, V) \to (X, A)$

$\partial(\xi \to W, \theta, f)|M_1 = (\xi_1 \to M_1, \theta_1, f_1)$

$\partial(\xi \to W, \theta, f)|M_2 = -(\xi_2 \to M_2, \theta_2, f_2)$

～は同値関係である。従って，

$$A(k,n:(X.A)) = \{(\xi^k \to M^n, \sigma.f)\}/\sim$$

が定義される。これはtriple の disjoint union に依ってアーベル群になる。さらに，次の定義を行う：

$$\mathfrak{N}^+_m(X.A) = \bigoplus_{2k+n=m} A(2k,n:(X.A))$$
$$\mathfrak{N}^+_*(X.A) = \bigoplus_{m\geq 0} \mathfrak{N}^+_m(X.A)$$
$$\mathfrak{N}^-_m(X,A) = \bigoplus_{2k+1+n=m} A(2k+1,n:(X.A))$$
$$\mathfrak{N}^-_*(X.A) = \bigoplus_{m\geq 0} \mathfrak{N}^-_m(X.A)$$

$\mathfrak{N}^\pm_*(X.A)$ はごく自然な方法に依って Ω_*-module になる。この $\mathfrak{N}^\pm_*(X.A)$ の定義は，Conner [3] chapter II の $\mathfrak{N}$ よりヒントを得た。$\mathfrak{N}^+_*(pt) = \mathfrak{N}$ である。

命題2′

次の Triangle は exact である：

$$\begin{tikzcd} \hat{\Omega}^\pm_*(X.A.\tau) \arrow[rr, "k_*"] & & \Omega^\pm_*(X.A.\tau) \arrow[dl, "F"] \\ & \mathfrak{N}^\pm_*(F_\tau, F_\tau\cap A) \arrow[ul, "S"] & \end{tikzcd}$$

Ω_*-homomorphism k_*, F, S は次のように定義する。先ず，k_* は forgetful homomorphism である。

oriented triple $(M.\mu.f)$ に対し，F^m_μ を μ の fixed point set F_μ の m 次元の component とし，$F^m_\mu \subset M$ の normal bundle

をν_mとする。$\nu_m \oplus \tau_{F_\mu^m} = \tau_M | F_\mu^m$ の orientation σ_m をMの orientation より induce されるものとする。このとき，

$$F([M^n, \mu, f]) = \bigoplus_{m=0}^{n} [\nu_m \to F_\mu^m, \sigma_m, f|F_\mu^m]$$

と定める。尚このとき，μがo-pかつmが奇数ならば$F_\mu^m = \phi$，又，μがo-rかつmが偶数ならば$F_\mu^m = \phi$であることに注意しよう。

triple $(\xi \to M, \sigma, f)$ に対し，ξに随伴した sphere bundle を$S(\xi)$で表す。$S(\xi)$には$\xi \oplus \tau_M$の orientation σより orientation を与えることができる。$S(\xi)$の各 vector に-1をかけることに依って得られる involution を$a : S(\xi) \to S(\xi)$で表す。

$$f\pi : S(\xi) \subset \xi \xrightarrow{\pi} M \xrightarrow{f} F_\tau \subset X$$

とするとき，$S([\xi \to M, \sigma, f]) = [S(\xi), a, f\pi]$ と定める。Sは degree -1 の homomorphism である。

その3. Smith homomorphism $\Delta : \hat{\pi}_n(X, A, \tau) \to \hat{\pi}_{n-1}(X, A, \tau)$ の oriented analogue は次のように定義される。(S^k, a) をk次元球面の antipodal involution とする。(M^n, μ, f) を任意の oriented triple とするとき，$k > n$なるkに対して，equivariant map $\lambda : (M^n, \mu) \to (S^k, a)$ でS^{k-1}の上で transverse regular なものが存在する。このとき$N = \lambda^{-1}(S^{k-1})$とし，$N \subset M$の normal bundle を$\nu$とするとき，$\tau_N \oplus \nu = \tau_M | N$は oriented であり，$\nu$にも又，$S^{k-1} \subset S^k$の oriented trivial normal bundle より orientation が induce される。これらと compatible な orientation に依って N に orientation を与える。このとき, N の involution $\mu|N$ は μ が o-p ならば o-r, 逆に o-r ならば o-p である。従って, $(M.\mu.f)$ の class に $(N, \mu|N, f|N)$ の class を対応させることに依って, oriented Smith homomorphism $\Delta: \hat{\Omega}^{\pm}_{n}(X.A.\tau) \to \hat{\Omega}^{\mp}_{n-1}(X.A.\tau)$ が定義される。

命題3'

次の Triangle は exact である:

$$\begin{tikzcd}
\hat{\Omega}^{\pm}_{*}(X.A.\tau) \arrow[rr, "\Delta"] & & \hat{\Omega}^{\mp}_{*}(X.A.\tau) \arrow[dl, "\alpha"] \\
& \Omega_{*}(X.A) \arrow[ul, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

α と β は次のように定義される:

$$\alpha([M.\mu.f]) = [M.f]$$

$$\beta([M.f]) = [M \pm M, c. f + \tau f]$$

ここに, c は component を入替える involution である。

§4. $\hat{\mathfrak{N}}_{*}(S^n.a_p)$ と $\hat{\mathfrak{N}}_{*}(FP(n).a_p)$

S^n を n 次元球面とし, 任意の $p \geqq 0$ に対して S^n の involution a_p を次のように定める:

$$a_p(x_1,\cdots,x_{n+1})=\begin{cases}(x_1,\cdots,x_{n+1}) & p=0\\ (-x_1,\cdots,-x_p,x_{p+1},\cdots,x_{n+1}) & 0<p<n+1\\ (-x_1,\cdots,-x_{n+1}) & n+1\leqq p\end{cases}$$

$a_0=1$，$n+1\leqq p$ のとき $a_p=a$ である。

F = 実数体 R，複素数体 C，又は四元数体 Q とし，$FP(n)$ を F 上の n 次元射影空間とする。任意の $p>0$ に対して，$FP(n)$ の involution a_p を次のように定める：

$$a_p([u_1,\cdots,u_{n+1}])=\begin{cases}[-u_1,\cdots,-u_p,u_{p+1},\cdots,u_{n+1}] & 0<p<n+1\\ [-u_1,\cdots,-u_{n+1}] & n+1\leqq p\end{cases}$$

$n+1\leqq p$ のとき，$a_p=1$ である。

$\pi_1: S^n\times S^k\to S^n$ を第一因子への projection，$n: S^k\to S^n$ を $n(S^k)=(0,\cdots,0.1)\in S^n$ なる constant map，$k\leqq n$ のとき $i: S^k\to S^n$ を後の座標を 0 として入れる inclusion map とする。$[S^n\times S^k, a_p\times a, \pi_1]$，$[S^k, a, i]$ はそれぞれ $\hat{\mathcal{N}}_*(S^n,a_p)$，$\hat{\mathcal{N}}_*(S^n,a)$ の class を表し，$p\leqq n$ のとき，$[S^k, a, n]$ は $\hat{\mathcal{N}}_*(S^n,a_p)$ の class を表す。射影空間に対しても projection π_1 と inclusion map i を同様に定義するとき，$[FP(r)\times S^k, a_p\times a, i\pi_1]$ $(0\leqq r\leqq n)$ は $\hat{\mathcal{N}}_*(FP(n),a_p)$ の class を表す。

定理 1

1) $\hat{\pi}_*(S^0, 1)$ は $\{[S^0\times S^k, 1\times a, \pi_1] \mid k \geqq 0\}$ を basis とする free π_*-module である。

2) $0<n$, $0\leqq p \leqq n$ のとき, $\hat{\pi}_*(S^n, a_p)$ は $\{[S^n\times S^k, a_p\times a, \pi_1], [S^k, a, n] \mid k\geqq 0\}$ を basis とする free π_*-module である。

3) $\hat{\pi}_*(S^n, a)$ は $\{[S^k, a, i] \mid 0\leqq k \leqq n\}$ を basis とする free π_*-module である。

定理 2

任意の n, p に対して, $\hat{\pi}_*(FP(n), a_p)$ は $\{[FP(r)\times S^t, a_p\times a, i\pi_1] \mid 0\leqq r\leqq n, 0\leqq t\}$ を basis とする free π_*-module である。

これらの結果より, 命題 3 の exact triangle は次のように split することがわかる:

系

次の三つの split short exact sequence を得る:

$$0\to \pi_m(S^n) \xrightarrow{\beta} \hat{\pi}_m(S^n, a_p) \xrightarrow{\Delta} \hat{\pi}_{m-1}(S^n, a_p) \to 0 \quad (0\leqq p\leqq n)$$

$$0\to \hat{\pi}_m(S^n) \xrightarrow{\beta} \hat{\pi}_m(S^n, a) \xrightarrow{\Delta} \hat{\pi}_{m-1}(S^n, a) \to 0 \quad (0<n, m<n)$$

$$0\to \hat{\pi}_m(FP(n)) \xrightarrow{\beta} \hat{\pi}_m(FP(n), a_p) \xrightarrow{\Delta} \hat{\pi}_{m-1}(FP(n), a_p) \to 0$$

定理1,2の証明は，いづれも命題3の exact triangle を使って，各 equivariant bordism group の次元に関する帰納法に依って得られる。以下に，定理2の証明のあらましを述べる。

［定理2の略証］ $F=R, C$ 又は Q に従って，$f=1, 2$ 又は 4 とする。$\hat{\mathfrak{N}}_{fr+t}(FP(n), a_p)$ の class $[FP(r)\times S^t, a_p\times a, i\pi_1]$ を $s_{f.n.p}(r.t)$ で表し，次の命題を $D(m)$ と名付ける：

D(m)

1) $\hat{\mathfrak{N}}_m(FP(n). a_p) = \bigoplus\left\{ s_{f.n.p}(r.t)\mathfrak{N}_k \,\middle|\, \begin{array}{l} 0\leqq r\leqq n,\ 0\leqq t \\ fr+t+k=m \end{array}\right\}$

2) $\mathfrak{N}_{m-fr-t}$ の 0 でない任意の class x に対して，
$s_{f.n.p}(r.t)\cdot x \neq 0$ in $\hat{\mathfrak{N}}_m(FP(n). a_p)$

定理2を証明するためには，任意の $m\geqq 0$ に対して $D(m)$ が正しいことを示せば十分である。

CW-pair $(X. A)$ に対して，よく知られた結果：

$$\mathfrak{N}_*(X. A) \approx H_*(X. A : \mathbf{Z}_2)\otimes\mathfrak{N}_*$$

（例えば，Conner and Floyd [4] 定理17.1）

を使って，次の補題を得る：

補題1

$\mathfrak{N}_*(FP(n))$ は $\{[FP(r), i] \mid 0\leqq r\leqq n\}$ を basis とする free $\mathfrak{N}_*$-module である。

又，各 homomorphism の定義より，容易に次の補題を得る：

補題2

1) $\Delta(s_{f.n.p}(r.t)) = s_{f.n.p}(r.t-1)$

2) $\alpha(s_{f.n.p}(r.t)) = 0$

3) $\beta([\overline{FP}(r).i]) = s_{f.n.p}(r.0)$

命題3より，特に次の exact sequence を得る：

$$0 \leftarrow \hat{\mathfrak{N}}_0(\overline{FP}(n).a_p) \xleftarrow{\beta} \mathfrak{N}_0(\overline{FP}(n)) \xleftarrow{\alpha} \hat{\mathfrak{N}}_0(\overline{FP}(n).a_p)$$

これより D(0) が計算される。次に，D(m-1) まで計算されたとするとき，次の exact sequence が得られる：

$$0 \leftarrow \bigoplus_{fr+t+k=m-1} s_{f.n.p}(r.t)\mathfrak{N}_k \xleftarrow{\Delta} \hat{\mathfrak{N}}_m(\overline{FP}(n).a_p) \xleftarrow{\beta} \mathfrak{N}_m(\overline{FP}(n).\ \blacksquare)$$
$$\xleftarrow{\alpha} \hat{\mathfrak{N}}_m(\overline{FP}(n), a_p)$$

これを使って D(m) が計算される。　　　　　　q.e.d.

尚，定理1の3)に関しては，a が fixed point free であることに依って，はるかに簡単な別証がある。即ち，

$$\hat{\mathfrak{N}}_*(S^n.a) \approx \mathfrak{N}_*(RP(n)) \approx H_*(RP(n):Z_2)\otimes\mathfrak{N}_*$$

より，一発で得られる。

参考文献

[1] M.F. Atiyah: Bordism and cobordism, Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961) 200−208

[2] G. E. Bredon : Equivariant cohomology theories, Lecture notes in Math. 34 (1967) Springer-Verlag

[3] P. E. Conner : Lectures on the action of finite group, Lecture notes in Math. 73 (1968) Springer-Verlag.

[4] P. E. Conner and E. E. Floyd : Differentiable periodic maps, (1964) Springer-Verlag.

[5] R. E. Stong : Bordism and involutions, Ann. Math. 90 (1969) 47 - 74.