数理解析研究所講究録
第103巻 1970年 73-88

Exact category について

阪大 教養　野村泰敏

§1. 序

1950年代の半ばにホモロジー代数における最も有用な概念として確立されたアーベル圏に対しては、1960年にLubkin-Freydによりexact imbedding theoremが見出され、更にこれは1964年にB. Mitchellによりfull imbedding theoremとして精密化された。このためアーベル圏における完全列の議論は射の存在もこめて加群の圏のそれに還元されることとなった。一方アーベル圏よりやゝ一般な概念としてPuppe [13]により導入された完全圏（exact category）に対しては上記の如き埋蔵定理がないため完全列についての初等的な議論は逐一定義より積み重ねて行う必要があり、このことは例えばLeicht [7], Dowker [3]により実行されている。Lambek [6]の導入した可換図式の不変量を用いて、完全列についてのよく知られた補題を包含する最

も一般的な algorithm を与え、かつその応用例を述べるのが本稿の目的である。なお完全圏が correspondence (relation ともいう) の圏に埋蔵されることが最近 Brinkmann [15] により証明されている。

§2. 完全圏

圏 $\mathcal{C}$ における射 $f: A \to B$ が単射のとき $A \rightarrowtail B$, 全射のとき $A \twoheadrightarrow B$ と記す。f が全射かつ単射であれば全単射 (bimorphism) とよばれ, $gf = 1$ かつ $fg = 1$ となる g が存在すれば同型とよばれる。f が $A \overset{e}{\twoheadrightarrow} I \overset{m}{\rightarrowtail} B$ と分解され而も任意の他の分解 $A \overset{e'}{\twoheadrightarrow} I' \rightarrowtail B$ に対して可換図式

$$
\begin{tikzcd}
 & I' \arrow[dr, tail, "m'"] \arrow[d, "h"] & \\
A \arrow[ur, two heads, "e'"] \arrow[r, two heads, "e"'] & I \arrow[r, tail, "m"'] & B
\end{tikzcd}
$$

が存在するならば, m (の同値類) を f の像といい m_f (通常は $\mathrm{im}\, f$) とかく。また I (の同値類) を I_f (通常は $\mathrm{Im}\, f$) と記す。以下 e を e_f と記す。像は存在すれば一意である。双対的に $\mathrm{coim}\, f$, $\mathrm{Coim}\, f$ を定義する。f が像及び余像をもつときは f は一意に $\overset{\mathrm{coim}\, f}{\twoheadrightarrow} \overset{\bar{f}}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} \overset{\mathrm{im}\, f}{\rightarrowtail}$ と分解される。任意の射が像及び余像をもつとき $\mathcal{C}$ は canonical, $\mathcal{C}$ の任意の全単射が同型となるとき $\mathcal{C}$ は of compact type とよばれる。canonical かつ compact type の $\mathcal{C}$ に対しては m_f は f を分解する単射のなかで"最小"である。

さて圏$\mathcal{C}$において

(1) $\mathcal{C}$はnullmorphismsの系をもつ。即ち各$A, B \in \mathrm{obj}.\mathcal{C}$に対して$0_{A,B}=0: A\to B$があって$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{0_{A,B}} B \xrightarrow{g} B'$は$0_{A',B'}$に等しい。

(2) 任意の射fは核$\ker f: \mathrm{Ker} f \rightarrowtail A$及び余核$\mathrm{cok} f: B \twoheadrightarrow \mathrm{Cok} f$をもつ(ただし$f: A\to B$)。以下核は$i_f: K_f \to A$,余核は$p_f: B\to L_f$と記す。

(3) (2)より導かれるfの分解 $\overset{\mathrm{cok}(\ker f)}{\twoheadrightarrow}\ \overset{\bar{f}}{\longrightarrow}\ \overset{\ker(\mathrm{cok} f)}{\rightarrowtail}$ において$\bar{f}$は同型である。

が成立つとき$\mathcal{C}$を完全圏とよぶ。このときは全単射は必ず同型で$\mathrm{im} f = \ker(\mathrm{cok} f)$, $\mathrm{coim} f = \mathrm{cok}(\ker f)$となる。また任意の単射は必ず或射の核であり(normality),全射はある射の余核となる。$\mathcal{C}$が上記(1),(2),(3)の外に更に

(4) 任意の$A, B\in \mathrm{obj}.\mathcal{C}$に対して積$A\times B$,和$A+B$が存在する(実は両者は一致する).

をみたすとき$\mathcal{C}$をアーベル圏とよぶ。アーベル圏では(2),(4)によりpullback, pushoutが自由に作れるが完全圏ではそうとは限らない。然し次の補題が成立する。

補題2.1. 図式

$$
\begin{tikzcd}
K_{gf} \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "①"] & {} \arrow[r, "gf"] \arrow[d, "f"] & {} \arrow[d, equal] \\
K_g \arrow[r, tail] & {} \arrow[r, "g"'] & {}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & {} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "②"] & L_f \arrow[d] \\
{} \arrow[r, "gf"'] & {} \arrow[r, two heads] & L_{gf}
\end{tikzcd}
$$

において①は pullback, ②は pushout である。

従て射の対において少くも一つが単射ならば pullback が作れる。

補題 2.2 ([2], 4.8) 可換図式

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "u'"'] & \cdot \arrow[d, "u"] \\ \cdot \arrow[r, "v"] & \cdot \end{tikzcd}$$

が pullback で、u が単射、v が全射ならば v' は全射である。
(アーベル圏では u 単射の仮定は不要)

さて列 $\xrightarrow{f}\ \xrightarrow{g}$ において $gf=0$ のとき零列、$\ker g = \operatorname{im} f$ 即ち $\operatorname{cok} f = \operatorname{coim} g$ のとき完全とよぶ。

補題 2.3. 図式(*)が pullback で u または v の少くも一方が単射であれば $L_{u'}\to L_u$ は単射で、$\xrightarrow{u}\ \xrightarrow{w}$ が完全のとき $\xrightarrow{u'}\ \xrightarrow{wv}$ も完全である(アーベル圏ではアンダーラインの部分不要)。

補題 2.4 ("Produktlemma" [3], [7], [2, 5.5.2]) 射の列 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ に対して

$$0\to K_f\to K_{gf}\to K_g\xrightarrow{p_f i_g} L_f\to L_{gf}\to L_g\to 0$$

は完全列である。

この補題において $\Delta = p_f i_g : K_g\to L_f$ の分解を $K_g\overset{e_\Delta}{\twoheadrightarrow}I_\Delta\overset{m_\Delta}{\rightarrowtail}L_f$ とするとき [3], [4] に従い I_Δ を列 $\xrightarrow{f}\ \xrightarrow{g}$ のホモロジーとよび $H(A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C)$ と記す。特に $gf=0$ のときこれ

が通常のホモロジーと一致することは次の補題よりわかる[2]。

<u>補題2.5</u> $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ が完全列のときこれより一意にきまる可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & K_g \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "③"] & I_\Delta \arrow[d, tail] \\
A \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g"'] & L_f \arrow[dl, "G"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

において③は pullback かつ pushout で $\xrightarrow{F} \xrightarrow{\Delta} \xrightarrow{G}$ は(補題2.4により)完全である。故に同型 $\omega : L_F \cong K_G$ が成立つ。

§3. Lambekの不変量

可換図式 S :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "S"] & \bullet \arrow[d, "u"] \\
\bullet \arrow[r, "v"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

に対して J. Lambek [6] は次の不変量を導入した(記号は Hilton [5] による)。

$$\mathrm{Im}\, S = \frac{I_u \cap I_v}{I_{uh}}, \qquad \mathrm{Ker}\, S = \frac{K_{uh}}{K_h + K_k}$$

これは次の様にかきかえると便利である。S より

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "k"'] & & \bullet \arrow[d, two heads] \\
 & K \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "④"] & I_u \arrow[d, tail] \\
\bullet \arrow[r, two heads] & I_v \arrow[r, tail] & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "⑤"] & I_h \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & \bullet \arrow[dd, "u"] \\
I_k \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & L \arrow[dr, "\beta"] & \\
\bullet \arrow[rr, "v"'] & & \bullet
\end{tikzcd}$$

を作る，ただし④は pullback，⑤は pushout である。このとき

$$\mathrm{Im}\,S = L_\alpha, \qquad \mathrm{Ker}\,S = K_\beta$$

となることが補題2.4と α, β の分解により容易にわかる。

前記の S において $K_h \to K_v$ が全射，$L_h \to L_v$ が単射のとき S を exact square とよぶ（[2, 5.4]. J. Leicht は smooth とよんだ [8]）。

補題3.1. 上記 S において $L_h \to L_v$ が単射ならば $\mathrm{Im}\,S = 0$。特に h が全射または S が exact（例えば u, v の少くも一方が単射で S が pullback）ならば $\mathrm{Im}\,S = 0$。

(証) 可換図式

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, two heads, "e_h"] \arrow[dd, "k"'] \arrow[dr, "\alpha"] & I_h \arrow[r, tail, "m_h"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "⑥"] & {} \arrow[r, two heads, "p_h"] \arrow[d, two heads, "e_u"] & L_h \arrow[dd, tail] \\
 & K \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & I_u \arrow[d, tail, "m_u"] & \\
{} \arrow[r, two heads] & I_v \arrow[r, tail] & {} \arrow[r, two heads] & L_v
\end{tikzcd}$$

に於て仮定により $L_h \to L_v$ が単射，従て

$I_h = \mathrm{Ker}\,p_h = \mathrm{Ker}\,(\xrightarrow{p_h} L_h \rightarrowtail L_v) = \mathrm{Ker}\,(\xrightarrow{e_u} \longrightarrow L_v)$, $K = \mathrm{Ker}\,(I_u \xrightarrow{m_u} \longrightarrow L_v)$。故に補題2.1により⑥は pullback となり補題2.2より $I_h \to K$ は全射，従て α も全射となる。

§4. Lambek の定理の一般化

完全圏における可換図式

$$(\#) \qquad \begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "S"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "T"] & C \arrow[d, "c"] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C'
\end{tikzcd}$$

が与えられたとき J. Lambek は次の定理を証明した。

Lambek の定理 [6] (#)の行が共に完全ならば $\mathrm{Im}\,S \cong \mathrm{Ker}\,T$.

本節の目的は行が必ずしも完全でないときに上の定理を一般化する次の定理が成立つことを示すことにある([9])。

定理 A. (#)において二つの行が零列のとき a, b, c の引起すホモロジー射を $b_*: H(A\to B\to C)\to H(A'\to B'\to C')$ とすれば次の列は完全である:

$$0\to \mathrm{Ker}\,S\to H(K_a\to K_b\to K_c)\to \mathrm{Ker}\,b_*\to \mathrm{Im}\,S\xrightarrow{\Lambda}\mathrm{Ker}\,T$$
$$\to \mathrm{Cok}\,b_*\to H(L_a\to L_b\to L_c)\to \mathrm{Im}\,T\to 0.$$

定理 A は次の定理より容易に導かれる。

定理 A′ (#)において二つの行が零列のとき次の列は完全である:

$$0\to H(K_{bf}\to K_b\to K_c)\to \mathrm{Ker}\,b_*\to \mathrm{Im}\,S\xrightarrow{\Lambda}\mathrm{Ker}\,T\to \mathrm{Cok}\,b_*$$
$$\to H(L_a\to L_b\to L_{g'b})\to 0.$$

定理 A′ は行の一方が必ずしも零列でないときにも定義される $b_*: H(A\to B\to C)\to H(A'\to B'\to C')$ に関する次の定理の特別な場合である。

定理 A″ (#)において $gf=0$ ならば列

$$0\to H(K_{bf}\to K_b\to K_c)\to \mathrm{Ker}\,b_*\xrightarrow{\bar{\alpha}}\mathrm{Im}\,S\xrightarrow{\Lambda'}L\xrightarrow{\tilde{\beta}}\tilde{L}$$

は完全であり, $g'f'=0$ ならば列

$$\tilde{K}\xrightarrow{\tilde{\alpha}}K\xrightarrow{\Lambda''}\mathrm{Ker}\,T\xrightarrow{\bar{\beta}}\mathrm{Cok}\,b_*\to H(L_a\to L_b\to L_{g'b})\to 0$$

は完全である。記号の定義は証明中に与えられる。

準備として図式

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"] & C \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' &
\end{tikzcd}$$

より得られる可換図式

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K} \arrow[r, tail, "\iota"] \arrow[dr, "\tilde{\alpha}"'] & K_g \arrow[r, tail, "i_g"] & B \arrow[r, two heads, "e_g"] \arrow[d, "e_b"'] \arrow[dr, phantom, "⑧"] & I_g \arrow[r, tail, "m_g"] \arrow[d, "j"] & C \\
 & K \arrow[r, tail, "p"] \arrow[d, tail, "q"'] \arrow[dr, phantom, "⑦"] & I_b \arrow[r, two heads, "i"'] \arrow[d, tail, "m_b"] & L \arrow[dr, "\tilde{\beta}"] & \\
A' \arrow[r, two heads, "e_{f'}"'] & I_{f'} \arrow[r, tail, "m_{f'}"'] & B' \arrow[r, two heads, "p_{f'}"'] & L_{f'} \arrow[r, two heads, "\pi"] & \tilde{L}
\end{tikzcd}$$

を考える。ただし⑦は pullback，⑧ は pushout で

$$\tilde{K} = \mathrm{Ker}(p_{f'} b i_g : K_g \to L_{f'}), \qquad \tilde{L} = \mathrm{Cok}\, p_{f'} b i_g$$

とおく。このとき次が成り立つ。

<u>補題 4.1</u>　次の列は完全である：

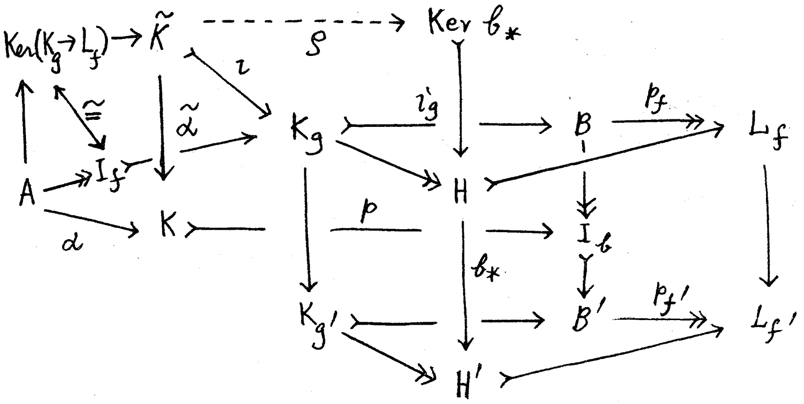
$$0 \to K_g \cap K_b \to \tilde{K} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} K \xrightarrow{ip} L \xrightarrow{\tilde{\beta}} \tilde{L} \to B'/(I_{f'} + I_b) \to 0.$$

(証)　$p_{f'} b i_g = (p_{f'} m_b)(e_b i_g)$ に補題 2.4 を適用し，更に補題 2.1 を考慮して完全列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, e_b i_g \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{K} \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & \mathrm{Ker}\, p_{f'} m_b \arrow[r, "ip"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cok}\, e_b i_g \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, equal] & \tilde{L} \arrow[r] & \mathrm{Cok}\, p_{f'} m_b \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0. \\
 & K_g \cap K_b & & K & L & & B'/(I_{f'} + I_b) &
\end{tikzcd}$$

を得る。

<u>定理 A″ の証明</u>　$gf = 0$ とする。可換図式



ただし $H=H(A'\to B\to C)$, $H'=H(A'\to B'\to C')$ とおく，において
$\tilde{K}\to K_g \twoheadrightarrow H \xrightarrow{b_*} H'$ は 0 だから一意な射

$$\rho:\ \tilde{K}\longrightarrow \mathrm{Ker}\, b_* = \mathrm{Ker}(H\to L_f\to L_{f'})$$

が存在する。補題2.4により $A=K_{gf}\twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(K_g\to L_f)\rightarrowtail K_g$ $\rightarrowtail B$ は $f:A\to B$ の分解を与えるから $\mathrm{Ker}(K_g\to L_f)\overset{\tau}{\cong} I_f$ で

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & \mathrm{Ker}(K_b\to K_c)=K_g\cap K_b \arrow[r, "\rho'"] \arrow[dd] & \mathrm{Ker}\,\bar{\alpha} \arrow[dd] & \\
 & \mathrm{Ker}(K_g\to L_f) \arrow[d, equal] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(K_g\to H) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\tau"] \arrow[dr, phantom, "⑩"] & \tilde{K} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"] \arrow[dr, phantom, "⑨"] & \mathrm{Ker}\, b_* \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\bar{\alpha}"] & 0=\mathrm{Cok}(K_g\to H) \\
 & I_f \arrow[r, "\alpha'"] & K \arrow[r, "p_\alpha"] \arrow[d, "i_p"] \arrow[dr, phantom, "⑪"] & L_\alpha \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\Lambda'"] & 0 \\
 & & L & &
\end{tikzcd}$$

において，α は $\mathrm{Im}\, S$ の定義の中の射で $\alpha=\alpha' e_f$，補題2.4により真中の行は完全，補題4.1により真中の列も完全である。e_f 全射より下の行も完全。B' まで chase することにより⑩の可換性が示されるから $\bar{\alpha}$ が引起され補題2.1により⑨は

pushout となる。従って補題2.3の双対より $\rho' : K_g \cap K_b \to \operatorname{Ker}\bar{\alpha}$ は全射となる。更に3×3補題より

$$\operatorname{Ker}\rho' \cong \operatorname{Ker}(\xrightarrow{\tau}\xrightarrow{e_{\alpha'}} I_{\alpha'}) \cong \operatorname{Ker} e_{\alpha'} = \operatorname{Ker}\alpha'$$

で補題2.4より全射 $K_{bf} = K_\alpha \to K_{\alpha'}$ が存在するから完全列

$$0 \to H(K_{bf} \to K_b \to K_c) \to \operatorname{Ker} b_* \xrightarrow{\bar{\alpha}} L_\alpha = \operatorname{Im} S$$

が得られる。他方 $ip\alpha = 0$ より ⑪ を可換にする $\Lambda' : L_\alpha \to L$ が存在して $\xrightarrow{\bar{\alpha}}\xrightarrow{\Lambda'}$ が完全となる。

$g'f' = 0$ の場合の証明は以上の双対である。

§5. 応用例

(1) Connecting morphism 可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & B_3 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "S_1"] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & A_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "S_2"] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "S_3"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "S_4"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 & \\
0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r] & B_0 & &
\end{tikzcd}$$

において行は完全，列は零列とする。

$$\varphi : H(A_2 \to A_1 \to A_0) \to H(B_2 \to B_1 \to B_0), \qquad \psi : H(B_3 \to B_2 \to B_1) \to H(C_3 \to C_2 \to C_1)$$

をホモロジー射とすると，定理A及び補題3.1とその双対より

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{\sigma} \operatorname{Im} S_2 \xrightarrow{\Lambda} \operatorname{Ker} S_4 = 0$$

$$0 = \operatorname{Im} S_1 \xrightarrow{\Lambda} \operatorname{Ker} S_3 \xrightarrow{\tau} \operatorname{Cok}\psi \to 0$$

は完全でLambekの定理により　$\Lambda : \operatorname{Im} S_2 \cong \operatorname{Ker} S_3$

ゆえに $\delta = i_\varphi \sigma^{-1}\Lambda^{-1}\tau^{-1}p_\psi$ とおけば次の完全列が得られる:

$$H(B_3\to B_2\to B_1)\longrightarrow H(C_3\to C_2\to C_1)\xrightarrow{\ \delta\ } H(A_2\to A_1\to A_0)\longrightarrow H(B_2\to B_1\to B_0)$$

(2) Bégueri-Poitou の一定理 [1]

定理A，補題3.1 と Lambek の定理を何度も用いると zig-zag 状にホモロジーを移動させることができる。例えば図式

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & & A \arrow[r, dashed] \arrow[d] & B \arrow[r, dashed] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
 & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \\
\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot & \\
A' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & B' \arrow[r, dashed] \arrow[d] & C' & & \\
0 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

が可換で点線の列は零列，それ以外の行と列は完全であるとすると

$$H(A\to B\to C)\cong H(A'\to B'\to C').$$

この同型の位相幾何への一つの応用については[10]をみられたい。他の応用として次の"Snake Lemma"が得られる。可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & K_f \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & K_a \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & K_b \arrow[r, dashed, "\lambda"] \arrow[d, dashed] & K_c \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] \\
0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & K_f \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] \\
0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & A' \arrow[r] \arrow[d, dashed] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, dashed] & C' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & L_{g'} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] & L_a \arrow[r, dashed, "\mu"] & L_b \arrow[r, dashed] & L_c \arrow[r, dashed] & L_{g'} \arrow[r, dashed] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

の実線の部分が与えられ行が完全とする。実線の部分を補ってホモロジーの移動を行い $L_\lambda \cong K_\mu$ 等が導かれ, 列

$$0 \to K_f \to K_a \to K_b \to K_c \to L_a \to L_b \to L_c \to L_{g'} \to 0$$

の完全性が示される。尚定理Aより Bégueri–Poitou の結果を導くことについては [11] をみられたい。

(3) §4 の可換図式 (#) において $A' \to B' \to C'$ が完全のとき

$$\begin{tikzcd}
I_a \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "S'"] & I_b \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "T'"] & I_c \arrow[d, tail] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C'
\end{tikzcd}$$

の上の行は零列となり, 定理Aより完全列

$$0 \longrightarrow H(I_a \to I_b \to I_c) \longrightarrow \mathrm{Im}\, S' \longrightarrow \mathrm{Ker}\, T' = 0$$

を得る。 $e_a : A \to I_a$ が全射であることと Im の定義により $\mathrm{Im}\, S \cong \mathrm{Im}\, S'$ であるから

$$H(I_a \to I_b \to I_c) \cong \mathrm{Im}\, S$$

同様に (#) において $A \to B \to C$ が完全ならば

$$H(I_a \to I_b \to I_c) \cong \mathrm{Ker}\, T$$

以上のことを用いると可換図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[d, "c"] \\
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \\
A'' \arrow[r, "f''"] & B'' &
\end{tikzcd}$$

において $A'\to B'\to C'$ 及び $B\to B'\to B''$ が完全であれば

$$H(I_a\to I_b\to I_c)\cong H(I_f\to I_{f'}\to I_{f''}).$$

これは米田の一補題 [14, p.35] に外ならぬ。

§6. ホモロジー完全列の一拡張

可換図式 S, S' の間の射 $S\to S'$ が与えられると，これは $\mathrm{Im}\,S\to \mathrm{Im}\,S'$, $\mathrm{Ker}\,S\to \mathrm{Ker}\,S'$ を引起すが，これらの行動を記述する一般の定理が定理 A の応用として [12] で証明されている。その応用として次の定理 B が示されたが証明はすべて [12] にゆずり結果丈を述べる：

可換図式

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "U"] & Q' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "S"] & R' \arrow[d] \\
P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "V"] & Q \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "T"] & R \arrow[d] \\
P'' \arrow[r] & Q'' \arrow[r] & R''
\end{tikzcd}$$

において列はすべて零列とし $H_P = H(P'\to P\to P'')$, $H_Q=H(Q'\to Q\to Q'')$, $H_R=H(R'\to R\to R'')$ とおく。真中の行が完全と仮定する。

<u>定理 B</u>　完全列

$$\mathrm{Im}\,U\xrightarrow{\Lambda}\mathrm{Ker}\,V\longrightarrow H(H_P\to H_Q\to H_R)\longrightarrow \mathrm{Im}\,S\xrightarrow{\Lambda}\mathrm{Ker}\,T$$

が存在する。

定理 B において $P''\to Q''$ が単射で $Q'\to R'$ が全射のときは古典的なホモロジー完全列の断片が得られ，$P'\to P\to P''$ と

$R' \to R \to R''$ が完全で $\mathrm{Ker}\, V = 0$, $\mathrm{Im}\, S = 0$ のときは rolling-stone lemma の基礎となる Hilton の一補題 [5, Prop. 2.7] が得られる。

文献

[1] L. Béguери and G. Poitou, Diagram-chasing dans le catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 323—332

[2] H.-B. Brinkmann u. D. Puppe, Abelsche und exakte Kategorien, Korrespondenzen. Springer Lecture Notes No. 96 (1969).

[3] C. H. Dowker, Composite morphisms in abelian categories, Quart. J. Math. Oxford (2) 17 (1966), 98—105.

[4] R. Faber and P. Freyd, Fill-in theorems, Proc. Conf. Cat. Alg. La Jolla (1965), 177—188.

[5] P. J. Hilton, On systems of interlocking exact sequences, Fund. Math. 61 (1967), 111—119.

[6] J. Lambek, Goursat's theorem and homological algebra, Canad. Math. Bull. 7 (1964), 597-608

[7] J. Leicht, Über die elementaren Lemmata der homologischen Algebra in quasi-exakten Kategorien, Monat.

Math. 68 (1964), 240—254.

[8] J. B. Leicht, On commutative squares, Canad. J. Math. 15 (1963), 59—79.

[9] Y. Nomura, An exact sequence generalizing Lambek's theorem (to appear).

[10] Y. Nomura, Some applications of the Hurewicz isomorphism theorem, Sci. Rep. Coll. Gen. Ed. Osaka Univ. 18 (1969), 1—8.

[11] Y. Nomura, Bihomologies in exact categories, to appear in Sci. Rep. Coll. Gen. Ed. Osaka Univ.

[12] Y. Nomura, Induced morphisms for Lambek invariants of commutative squares.

[13] D. Puppe, Korrespondenzen in abelsche Kategorien, Math. Ann. 148 (1962), 1—30

[14] N. Yoneda, Homology 及び Cohomology 理論の代数的準備, Seminar on Topology A 1. (1965).

[15] H.-B. Brinkmann, Relations for exact categories, J. Alg. 13 (1969), 465—480.

追記　§5, (2) で述べたホモロジーの移動についての結果は V. P. Palamodov: Linear Differential Operators with Constant Coefficients, Grundlehren der math. Wiss. Bd. 168 に fundamental homology theorem として定式化されている。なお後の lemma 4 は Lambek の定理に外ならない。