数理解析研究所講究録
第104巻 1970年 32-46

M. Henle の W^* 環のガロア理論 について

茨城大. 工. 武田二郎

序

Aを可分なヒルベルト空間H上に標準的に作用しているⅡ$_1$ーファクター，GをAの可付番デスクリートな外部＊ー自己同型（以下自己同型はつねに＊ー自己同型を意味するものとする）の群，BをGの自己同型で不変なAの元のなす部分環とする．このとき

(1) B'はⅡ$_1$ーファクター

を仮定すると，単純環の場合に平行してつぎの諸定理が成り立つことが知られていた．（[7], [8], [9], [10]）．このときAを群GによるBのガロア拡大，Gをそのガロア群とよぶ．

定理Ⅰ．（基本定理）．

Gの部分群Hに，AのH－不変元のなす部分環$C = A^H$を対応させることによって，Gの部分群とA，Bの中間にあるファクターの間に1：1の対応がつけられる．HがGの不変

部分群のときにはCはまたBのガロア拡大で，そのガロア群はG／Hに同型である．

定理Ⅱ。（正規基定理）

適当に$a \in A$をとることにより，Aのすべての元を

$$x = b_1 a + b_g g(a) + \cdots + b_k k(a)$$

（$b_1, b_g, \cdots, b_k \in B$, $g, \cdots, k \in G$）と表わすことが出来る．

定理Ⅲ．（拡張定理）

C，DはAとBの中間にある部分ファクターで，Bの元を不変にする同型写像で同型とすると，その同型写像はGにぞくするAの自己同型に拡張できる．

AがH上に標準的に作用していると，$g \in G$の作用はH上のユニタリー作用素u_gによって

$$g(a) = u_g a u_g^* \tag{2}$$

と表わすことが出来る．これをgの作用の空間表現とよぶことにする．このu_gを用いて，$a' \in A'$に対して

$$g(a') = u_g a' u_g^* . \tag{3}$$

と置くと，これはA'の外部自己同型となる．Bの可換子環$B' = \{A'; u_g, (g \in G)\}''$である．条件(1)のもとでは$B'$と$A'$のGによる接合積$G \otimes A'$が代数同型になる．このことが上述の諸定理の証明のキーポイントになっていた．

実は条件(1)は

§ 1

(4) 　　　Gは有限群

と同値で，Gが無限群のときガロア対応が成立しない反例も知られていた．

最近 M. Henle [4] が一般の W^* 環（v. N. 環）で B' と $G \otimes A'$ とが代数同型になるための条件を調べ，一般の v. N. 環でガロア理論がどのように変化するかを論じているので，以下それの概要を紹介する．

1. v. N. 環の自由自己同型

II_1－ファクターのガロア理論においてはつぎの事実が非常に有効に使われた．

(5) g を II_1－ファクター A の外部自己同型とする．任意の $b \in A$ に対して $ab = g(b)a$ であるならば $a = 0$．

一方一般の v. N. 環 A の自己同型 g について Kallman [5] は g の外部性をつぎのように特徴づけた．

(6) g は A の外部自己同型 $\Longleftrightarrow$ $a \in A$ が任意の $b \in A$ に対して $ab = g(b)a$ を満たすならば $C(a) < 1$．

（$C(a)$ は a の central support）．ファクターでは $a \neq 0$ のとき $C(a) = 1$ であるから，上の特徴づけは

(7) g がファクターの外部自己同型 $\Longleftrightarrow$ $ab = g(b)a$ ならば $a = 0$．

となる.

一般の v. N. 環 A の自己同型が (5) の性質をもつとき, すなわち任意の $b \in A$ に対し, $ab = g(b)a$ ならば $a = 0$ となるとき, Kallman はそれを A の自由自己同型と名づけた. それは (7) によってファクターでは外部自己同型と一致しているが, A が可換なときには自由性の条件は

(8) 任意の射影 $p \in A$ に対して, $q \leqq p$, $g(q) \perp q$ となる射影 q がとれる.

と同値になって, von Neumann が自由自己同型とよんだものと一致するからである.

A の自由自己同型 g が H 上で, $g(a) = u_g a u_g^*$ と空間表現を許すとき, A' の自己同型 $g(a') = u_g a' u_g^*$ もまた A' の自由自己同型である.

2. 接合積

A をヒルベルト空間 H 上の v. N. 環, G を A の自己同型の可付番群, $G \otimes H$ を G 上の H-値関数 $\sum g \otimes x_g$, ($x_g \in H$) で

$$\| \sum g \otimes x_g \|^2 \equiv (\sum_g \|x_g\|_H^2) < + \infty$$

を満たすものの全体のなすヒルベルト空間とする.

$$H_h \equiv \{ \sum g \otimes x_g \mid x_g = 0, (g \neq h) \} \subset G \otimes H$$

とすると $G \otimes H \equiv \sum_h \oplus H_h$ である.

$t \in A$ および $h \in G$ に対して $G \otimes H$ 上の作用素を

$$\hat{t}: \quad \hat{t} \cdot \sum g \otimes x_g = \sum g \otimes g(t) x_g$$

$$\hat{u}_h: \quad \hat{u}_h \cdot \sum g \otimes x_g = \sum g h^{-1} \otimes x_g = \sum g \otimes x_{gh}$$

と定義する．$\hat{u}_h$ はユニタリー作用素で $\hat{u}_h \hat{t} \hat{u}_h^* = \widehat{h(t)}$ を満たし，A への群 G の作用の空間表現を与える．

$G \otimes H$ 上で $\{\hat{a}, (a \in A); \hat{u}_g, (g \in G)\}$ から生成される v. N. 環を A と G の接合積といい，$G \otimes A$ で表わす．これは A の表現空間 H のとり方に関係しないこと（[11]）および $t \in G \otimes A$ は

(9) $$t = \sum_g \hat{u}_g \hat{t}_g, \qquad \hat{t}_g = e(\hat{u}_g^* t) \in \hat{A}$$

とフーリエ展開されること（[1]）が知られている．こゝで $e(t)$ は，p_g を $G \otimes H$ から H_g への射影として

(10) $$e(t) = \sum_g p_g t p_g$$

で与えられる，$\mathcal{L}(G \otimes H)$ より $\hat{A}$ への写像である．

$p_g \in \hat{A}'$，$\sum_g p_g = 1$ であるから，e は $G \otimes A$ を $\hat{A}$ の上に写像し

(i) $e(\hat{a}) = \hat{a}$，$(\hat{a} \in \hat{A})$； (ii) $e(\hat{u}_g) = 0$，$(g \in G,\ g \neq 1)$

(iii) $t \geqq 0$ のとき $e(t) \geqq 0$； (iv) $\hat{a} \in \hat{A}$ のとき $e(\hat{a} t) = \hat{a} e(t)$，

$e(t \hat{a}) = e(t) \hat{a}$

を満たすので，e を $G \otimes A$ から $\hat{A}$ への expectation という．e は normal, faithful である．なぜなら $e(t^* t) = 0$ とすると

$$(t p_g)^* (t p_g) = p_g t^* t p_g = p_g \left(\sum_h p_h t^* t p_h\right) p_g = p_g e(t^* t) p_g = 0$$

から $t P_g = 0$．よって $t = 0$．

3． v. N. 環のガロア拡大と基本定理

Gはヒルベルト空間H上のv. N. 環Aに作用する自由自己同型の可付番群で，$g \in G$ によるAの自己同型はH上のユニタリー作用素 u_g によって空間表現されるものとする．AのG-不動元のなす部分環 $\{a \in A \mid g(a) = a,\ g \in G\} = B$ とすると，Bの可換子環 B' は $\{a', (a' \in A');\ u_g, (g \in G)\}$ から生成されるv. N. 環である．一方 $G \otimes A'$ は $G \otimes H$ 上で $\{\hat{a}', (a \in A);\ \hat{u}_g, (g \in G)\}$ から生成される環である．

定義． H上の B' と $G \otimes H$ 上の接合積 $G \otimes A'$ が

$$a' \longleftrightarrow \hat{a}'; \qquad u_g \longleftrightarrow \hat{u}_g$$

なる同型対応で代数的に同型となるとき，AはGをガロア群とするBのガロア拡大であるという．

定義からはAがBのガロア拡大であるかどうかはAの表現空間Hのとり方に関係するように見えるが，つぎの定理によって実際はHのとり方に関係しないことがわかる．

定理１． Gをv. N. 環Aの自由自己同型の可付番群とすると，つぎの条件は同値である．

(a) A内に射影 $P_g, (g \in G)$ が存在して

$$\Sigma_g P_g = 1, \quad P_g \perp P_h, (g \neq h), \quad g(P_h) = P_{hg^{-1}}$$

(b) A 内に

$$\sum_i p_i g(p_i) = \begin{cases} 0 & (g \neq 1) \\ 1 & (g = 1) \end{cases}$$

を満たす射影の族 $\{p_i\}$ が存在する.

(c) B' より A' への faithful, normal な expectation e が存在する.

(d) A は G をガロア群とする B のガロア拡大である.

(e) G を自己同型群にもつ v. N. 環 C が存在し, その接合積から B' への $\varphi(C) = A$, $\varphi(\hat{u}_g) = u_g$ を満たす normal な homomorphism φ が存在する.

証明. (a) ⇒ (b). 明らか.

(b) ⇒ (c). $t \in B'$ に対して $e(t) = \sum_i p_i t p_i$ と定めると, $t \in A'$ に対して $e(t) = t$, (b) から $e(u_g) = 0$ であるから, e は B' から A' への faithful, normal な expectation である.

(c) ⇒ (d). まず $g \neq 1$ のとき $e(u_g) = 0$. なぜなら $t \in A'$ に対して

$$e(u_g)t = e(u_g t) = e(g(t)u_g) = g(t)e(u_g).$$

g が自由自己同型であることから, $e(u_g) = 0$.

ρ を A' 上の faithful normal positive linear functional とすると, ρ を $\rho = \rho \circ e$ で B' 上の f. n. p. l. f. に拡大することが出来る. B' を ρ ーノルムによって完備化したヒルベルト空間

K上にB′を表現し，yをそのs.g.ベクトルとする．

一方A′のp－ノルムによる完備化をH′とし，A′をその上に表現したときのs.g.ベクトルをxとする．A′のこの表現を用いて$G\otimes H'$上で接合積$G\otimes A'$をつくると，$1\otimes x$はそのs.g.ベクトルとなる．

$$\mathbb{A}=\{\sum t_g u_g,\ (t_g\in A')\}|_K,\qquad \mathbb{B}=\{\sum \hat{t}_g\hat{u}_g,\ (t_g\in A')\}|_{G\otimes H'}$$

とすると，$\mathbb{A}y$，$\mathbb{B}(1\otimes x)$はそれぞれK，$G\otimes H'$で稠密である．

$$ty=\sum t_g u_g y \longrightarrow \sum \hat{t}_g\hat{u}_g(1\otimes x)=\sum g^{-1}\otimes g^{-1}(t_g)x$$

とすると

$$\begin{aligned}\|ty\|_K^2 &= p(t^*t)=p(e(t^*t))=p[e((\textstyle\sum_g t_g u_g)^*(\sum_h t_h u_h))]\\ &= p[e(\textstyle\sum_{g,h} g^{-1}(t_g^* t_h)u_{g^{-1}h})]=p[\sum_{g,h} g^{-1}(t_g^* t_h)e(u_{g^{-1}h})]\\ &= p[\textstyle\sum g^{-1}(t_g^* t_g)] = \sum \|g^{-1}(t_g)x\|_H^2=\|\sum g^{-1}\otimes g^{-1}(t_g)x\|_{G\otimes H'}^2,\end{aligned}$$

となるので，VをKより$G\otimes H'$へのユニタリー作用素に拡大できる．

$$VtV^*=\hat{t},\ (t\in A')\quad;\quad Vu_gV^*=\hat{u}_g,\ (g\in G)$$

が成り立つので，VはK上のB′と$G\otimes H'$上の$G\otimes A'$の同型を与え，AはGをガロア群とするBのガロア拡大となる．

(d) ⇒ (e)．　明らか．

(e) ⇒ (a)．　はじめB′はg.ベクトル$y\in H$をもつとする．このとき　$f(t)=\langle\varphi(t)y,y\rangle_H$，$t\in G\otimes C$　と定義すると，

f(t)は$G\otimes \mathfrak{a}$上のp.l.f.である．

$\S 3$

C はヒルベルト空間 K 上に表現され，s. g. ベクトル x をもてば，$G\otimes C$ は $G\otimes K$ で $(1\otimes x)$ を s. g. ベクトルにもつ．このような表現では $z\in G\otimes K$ で $f(t)=\langle tz, z\rangle_{G\otimes K}$ と表わすことが出来る．

$t\in G\otimes C$ に対し $V(tz)=\varphi(t)y$ によって $(G\otimes C)z$ より $B'y$ への写像を定義すると

$$\|\varphi(t)y\|_H^2=\langle\varphi(t^*t)y, y\rangle_H=f(t^*t)=\langle t^*tz, z\rangle_{G\otimes K}=\|tz\|_{G\otimes K}^2$$

であるから，V は $[(G\otimes C)z]$ より $H\equiv[B'y]$ へのユニタリー作用素に拡大される．

$t, t'\in G\otimes C$ で $\varphi(t)=\varphi(t')$ であれば

$$\|(t-t')z\|_{G\otimes K}^2=\|\varphi(t-t')y\|_H^2=0$$

であるから $tz=t'z$，すなわち $t\in B'$ に対して，$\varphi^{-1}(t)z$ は well-defined である．

p を $G\otimes K$ から M への射影とすると，M は $G\otimes C$ で不変であるから $p\in(G\otimes C)'$ で，作用素 V は $(G\otimes C)|_M$ と $B'|_H$ の空間同型を与える．なぜなら $t\in G\otimes C$，$s\in B'$ に対して

$$(VtV^*)(sy)=Vt(\varphi^{-1}(s)z)=V(t\varphi^{-1}(s)z)=\varphi(t)(sy).$$

よって $VtV^*=\varphi(t)$.

φ は C を A' 上に写像するから $C|_M$ と $A'|_H$ の空間同型を与える．よって $(pCp)'=(C|_M)'$ と $A|_H$ とは同型である．p_g' を $G\otimes K$ から $g\otimes K$ への写像とすると

$$p\,p_g'\,p \subset p\,C'\,p = (p\,C\,p)'.$$

ゆえに　$p_g = V\,p\,p_g'\,p\,V^* \in A$．よって　$\{p_g, (g\in G)\}$ は互に直交して，和が 1 となる射影の族で

$$g(p_h) = U_g\,p_h\,U_g^* = (V\hat{U}_g V^*)(V\,p\,p_h'\,p\,V^*)(V\hat{U}_g^* V^*)$$
$$= V(\hat{U}_g\,p\,p_h'\,p\,\hat{U}_g^*)V = V\,p\,(\hat{U}_g\,p_h'\,\hat{U}_g^*)\,p\,V^* = V\,p\,p_{hg^{-1}}'\,p\,V^*.$$

B' が g. ベクトル y をもたないときには，おのおので B' が g. ベクトルをもつように　$H = [B'y_1] \oplus [B'y_2] \oplus \cdots$　と直交分解する．$[B'y_n]$ への射影を p_n とすると，$p_n \in B$ で p_n は G の作用で不変である．$B' \longrightarrow p_n B' p_n$ は準同型写像で $p_n B' p_n$ は条件(c)を満たす．よって互に直交し，和が p_n となる $p_n H$ への射影 $p_g^{(n)}$ が存在して　$U_g\,p_h^{(n)}\,U_g^* = p_{hg^{-1}}^{(n)}$　となる．$p_g = \sum_n p_g^{(n)}$ とすれば(a)の条件を満たす射影となる．

Aの部分環でGの部分群の不変元の集合になっているものはつぎのように特徴づけられる．

定理 2.　v.N. 環 A は群 G をガロア群とする B のガロア拡大とする．また A への G の作用は A の表現空間 H 上で空間表現できるものとする．このとき C を $B \subseteq C \subseteq A$ なる A の部分 v.N. 環とすると，C についてのつぎの条件は同値である．

(a)　C は G の部分群 H の不動元の集合である：$C = A^H$.

(b)　C の中に互に直交する射影の族 $\{p_i\}$ がとれて，つぎの

関係を満足する：

$$\sum p_i g(p_i) = \begin{cases} 1 & (g|_C = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (g|_C \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(c) B' から C' への faithful, normal な expectation f が存在して次式を満たす：

$$f(u_g) = \begin{cases} u_g & (g|_C = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (g|_C \neq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

定理1，2の準備のもとにつぎの定理が証明される．

定理3．（基本定理）

v.N.環 A は G をガロア群とする B のガロア拡大とする．このとき

(a) G の部分群 H にぞくする自己同型で不変な A の元の全体を C とすると，A は H をガロア群とする C のガロア拡大になる．

(b) 逆に C を $B \subseteq C \subseteq A$ で定理2の条件を満たす A の部分v.N.環とする．C に対して G の部分群 $H = \{g \in G \mid g|_C = 1\}$ とすると，C は H の不変元の全体となる．

(c) G の部分群 H に対応する A の部分環 C が G にぞくするすべての A の自己同型で不変（$g(C) = C$）になるための必要十分条件は H が G の不変部分群であることである．このとき C は G/H をガロア群とする B のガロア

拡大となる.

II_1－ファクターの場合にはBの元を不変にするAの自己同型はガロア群Gにぞくするものに限られたが，一般のv. N.環のときには少し複雑となり，つぎの定義が必要になる.

定義. Gをv. N.環Aの自己同型の群，$\{p_g, (g \in G)\}$を互に直交する中心射影の族で$\sum_g p_g = 1$とする. $x \in A$に対して

$h(x) = \sum_g g(x) p_g$ とすると，$h(x)$はAの自己同型になる. この形のAの自己同型の群を，H. Dye [2]に従い，Gから生成されたfull groupとよび，[G]で表わすことにする.

定理4. v. N.環AはGをガロア群とするBのガロア拡大とする. このときBの元を不動にするAの自己同型の全体は群[G]である.

4. ガロア拡大の例

つぎの2つの定理によってv. N.環にガロア拡大の例が数多く存在することが保証される.

定理5. Gをv. N.環Aに作用する自由自己同型の有限群，Bをその不動元の環とすると，AはGをガロア群とするBのガロア拡大である.

定理6. Gはv. N.環Aに作用する自由自己同型の可付番群とする. Aがproperly infiniteのときには，必要に応じて$g \in$

注

Gの作用にAの内部自己同型を補って，ガロア条件を満たすようにGをAに作用させることが出来る．

しかしGが3つの条件 (1) Gの無限群 (2) Gはガロア群 (3) GはAの f. n. p. l. f. を不変に保つ を同時に満足することは不可能なことが示されるので，有限型ファクターに作用する自由自己同型群がガロア群であるのはそれが有限群かつそのときのみに限られる．また無限群が有限測度空間 (X, m) に自由保測変換として作用するとき，それが可換 v. N. 環 $L^\infty(X)$ に惹起する自由自己同型群はけしてガロア群にはならないことになる．

5. 正規基定理と拡張定理

一般の v. N. 環のガロア拡大ではつぎの形の正規基定理と拡張定理が成り立つ．

定理 7. (正規基定理)

AはGをガロア群とするBのガロア拡大，$\{p_g\}$は定理1 (a) に示された射影の族とする．

(a) 射影の組 $\{p_g, p_h\}$ に対応して．$t \in A$ には $p_h t p_g = p_h t_{h,g} t_g$ を満たす $t_{h,g} \in B$ が定まる．この $t_{h,g}$ はこの条件と $p_k t_{h,g} p_g = 0$，$(k \neq h)$ とから一意に決定される．この

ことを $t \sim \{t_{k,g}\}$ で表わし, $s \sim \{s_{k,g}\}$ とすると

$$(t+s)_{k,g} = t_{k,g} + s_{k,g}, \quad (ts)_{k,g} = \sum_{h} t_{k,h} s_{h,g}$$

$$(t^*)_{k,g} = (t_{g,k})^*, \quad (h(t))_{k,g} = t_{kh,gh}, \quad (h \in G)$$

が成り立つ.

(b) Gが有限群または $\{P_g\} \subset Z(A)$ (Aのセンター) のときには(a)の t の行列表示は $t = \sum t_g P_g$, $(t_g \in B)$ で置き換えられる. 係数 t_g は条件 $t_g P_g = t P_g$ から一意に定まる.

定理8. (拡張定理).

AはGをガロア群とするBのガロア拡大, Q_1, Q_2 は中間のv.N.環でQ_1は定理2の条件を満たすとする. このときBの元を不動にするQ_1よりQ_2への同型写像は$[G]$にぞくするAの自己同型に拡大される.

References

1. W.Arveson:Analyticity in Operator Algebra,Amer.Jour.Math.89 (1967)578-642.

2. H.Dye:On Groups of Measure Preserving Transformations I, Amer.Jour.Math. 81 (1954) 119-159.

3. V.Ja.Golodec:On von Neumann's Aproximately finite algebras with finite trace, Dokl.Akad.Nauk SSSR Tom 181 (1968)no.6.

4. M.Henle:Galois Theory of W^* Algebras, unpublished.

5. R.Kallman:A Generalization of Free Action,Duke Math.Jour. 36 (1969) 781-789.

6. M.Nakamura and Z.Takeda:On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras,Proc.Japan Acad. 34 (1958) 489-494.

7. M.Nakamura and Z.Takeda:A Galois theory for finite factors Proc.Japan Acad. 36(1960) 258-260.

8. M.Nakamura and Z.Takeda:On the Fundamental Theorem of Galois Theory for Finite Factors.Proc.Japan Acad.36(1960)313-318.

9. Z.Takeda:On the Extension Theorem of the Galois Theory for Finite Factors.Proc.Japan Acad. 37(1961)78-82.

10. Z.Takeda:On the Normal Basis Theorem of the Galois Theory for Finite Factors.Proc. Japan Acad.37(1961)144-148.

11. G.Zeller-Meier:Produits Croises d'une C^*-Algebre par un Groupe d'automorphisms,Jour.de Math.Pures et Appliquées 47(1968) 101-239.