数理解析研究所講究録
第 104 巻 1970 年 47-63



# 作用素環と束論

愛媛大 理　前田周一郎

von Neumann algebra と束論の関係は，Murray, von Neumann [17] の理論の当初から，projection の作る束における次元論を中心として始まっている。その後これを基にして発展したものとして，連続幾何学の理論と orthomodular lattice の理論の二つがあり，それぞれ幾何学的束や量子論理とも関連をもって研究が進められてきたが，ここではその流れをふり返って，とくにここ15年ばかりの間に成された結果を出来るだけまとめてみたい。とくに参考となる文献として Abbott [1] に収められている Holland の論説：The current interest in orthomodular lattices をあげておく。

## §1. von Neumann algebra の次元論

von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ の projection 全体を $P(\mathfrak{A})$ とかく。二つの $P, Q \in P(\mathfrak{A})$ に対して $P = U^*U$, $Q = UU^*$ となる $U \in \mathfrak{A}$ が存在するとき，$P \overset{*}{\sim} Q$ とかく。Murray, von Neumann [17] では "$\overset{*}{\sim}$" を同次元性として，束 $P(\mathfrak{A})$ についての

次元論を展開し，factor $\mathfrak{A}$ を5つの型：$\mathrm{I}_n, \mathrm{I}_\infty, \mathrm{II}_1, \mathrm{II}_\infty, \mathrm{III}$ に分類する等重要な成果をあげた。この理論はさらに Dixmier 等によって整備され [3]，orthomodular lattice の理論等の発展に大きな寄与をすることになった。束 $P(\mathfrak{A})$ の基本的性質には，orthocomplemented，complete，さらに $\mathfrak{A}$ が有限のときは modular，の三つがある。（束の二元 $a, b$ が modular pair とは，$c \leqq b$ ならば $(c \vee a) \wedge b = c \vee (a \wedge b)$ が成立つことで，このとき $(a, b)M$ とかく。すべての二元が modular pair となる束を modular lattice という。）

## §2. 連続幾何学

von Neumann の講義〔19〕に始まった連続幾何学は，すでに一応完成された形で，本としても F. Maeda〔12〕と Skornyakov〔23〕がある。その内容は次元論と表現論とに大別されるが，ここで扱う束は $P(\mathfrak{A})$ の orthocomplemented を弱めて complemented としかつ modular を仮定する。さらに次元論では complete を入れ，連続性を加える。（連続とは上連続性"$a_\delta \uparrow a$ ならば $a_\delta \wedge b \uparrow a \wedge b$"と下連続性"$a_\delta \downarrow a$ ならば $a_\delta \vee b \downarrow a \vee b$"をあわせていう。）すなわち連続幾何とは束としては continuous，complemented，modular lattice のことで，これは射影幾何の拡張になっている。このような束の上で，$P(\mathfrak{A})$ の次元論と

全く類似の理論が展開されるのであるが，そのとき同次元性は配景性によって定義される。（0をもつ束$L$の二元$a, b$が配景的であるとは，$a \vee x = b \vee x$，$a \wedge x = b \wedge x = 0$となる$x \in L$が存在することである。）ところでこれが$\mathfrak{A}$が有限の場合の$P(\mathfrak{A})$の次元論を特別な場合として含んでいることが，後にKaplansky［7］によって証明された。すなわち

定理 2.1. complete orthocomplemented modular lattice は連続である。

これより，$\mathfrak{A}$が有限のとき$P(\mathfrak{A})$は連続幾何となり，"〜"と配景性は一致することもいえる。

一方表現論の結果は次の通りである。

定理 2.2. complemented modular lattice は次数が4以上の場合，ある regular ring（一意的に定まる）の主右イデヤルの作る束と同型である。

系. orthocomplemented modular lattice は次数が4以上の場合，ある *-regular ring の projection（$e = e^* = e^2$となる元$e$）の作る束と同型になる。

注意. $\mathfrak{A}$が有限な von Neumann algebra のとき，$P(\mathfrak{A})$は complemented modular lattice であるから定理2.2の系により，ある *-regular ring $\overline{\mathfrak{A}}$が存在して$P(\mathfrak{A}) = P(\overline{\mathfrak{A}})$となる。ここで$\overline{\mathfrak{A}}$は$\mathfrak{A}$を含み，具体的には domain dense な closed operator

の集りになっている。このことは$\mathfrak{A}$が type $\mathrm{II}_1$ の factor の場合にすでに[17]の中で述べられている。また有限な AW*-algebra の場合への拡張が Berberian [2] でなされている。

## §3. 連続幾何学の拡張

### (a) 次元論の公理的取扱い

S. Maeda [14], [15] において，§1と§2の次元論は公理系を用いて統一された。まず0をもつ束$L$において次の公理系$(\perp 1)$—$(\perp 4)$をみたす"$\perp$"があるとき，これを半直交性という。

$(\perp 1)$ $a \perp a$ ならば $a=0$

$(\perp 2)$ $a \perp b$ ならば $b \perp a$

$(\perp 3)$ $a \perp b$, $a_1 \leqq a$ ならば $a_1 \perp b$

$(\perp 4)$ $a \perp b$, $a \vee b \perp c$ ならば $a \perp b \vee c$.

その例としては，一つは orthocomplemented lattice の直交性があり，他の一つは modular lattice における独立性"$a \wedge b = 0$"がある。後者は M-symmetric lattie，すなわち"$(a, b)M \Rightarrow (b, a)M$"が成立つ束に拡張され，そこで"$a \wedge b = 0$ かつ $(a, b)M$"によって半直交性が与えられる。

半直交性をもつ束$L$において，$a \leqq b$ ならば $a \vee c = b$, $a \perp c$ となる $c \in L$ が存在するとき，$L$は relatively semi-orthocomplemented という。さらに$L$は complete と仮定し，

次の公理もみたすとする。

($\perp 5$) $a_\delta \uparrow a$, $a_\delta \perp b$ ならば $a \perp b$（$\perp$ の連続性）

（直交性はつねに（$\perp 5$）をみたし，M-symmetric lattice の半直交性については束が上連続であれば（$\perp 5$）が成立つ。）

以上のような束 $L$ の中に次の条件をみたす同値関係"$\sim$"が存在するとき，$L$ を dimension lattice という。

($A_1$) $a \sim 0$ ならば $a = 0$.

($A_2$) $a \sim b_1 \dot{\vee} b_2$ ならば $a = a_1 \dot{\vee} a_2$, $a_i \sim b_i$ となる $a_1$, $a_2$ が存在する（$\dot{\vee}$ は半直交な元の join を示す）.

(B) $a$ と $b$ が配景的ならば $a \sim b$.

($C_\perp$) $a = \dot{\vee}_\alpha a_\alpha$, $b = \dot{\vee}_\alpha b_\alpha$, $a_\alpha \sim b_\alpha$ で $a \perp b$ ならば $a \sim b$.

($C_f$) $a = a_1 \dot{\vee} a_2$, $b = b_1 \dot{\vee} b_2$ ならば $a \sim b$.

さて dimension lattice においては，5つの型への分解定理，比較定理，反対称律，有限性保存の定理，次元関数の存在定理等を主内容とする次元論が展開される（S. Maeda [16]）。連続幾何は，$a \wedge b = 0$ を半直交性とし，配景性を"$\sim$"にとって dimension lattice となる。一方 $\mathfrak{A}$ が von Neuman algebra のとき，$P(\mathfrak{A})$ は直交性および"$\stackrel{\star}{\sim}$"によって dimension lattice となる。

(b) 下連続性を除いた連続幾何学

連続幾何学の次元論で，下連続性は配景性が transitive であることの証明に必要である。　しかしこのために同時に有限性も生じて，projection lattice の場合のような無限の型は出てこない。　S. Maeda [15] では配景性の代りにその有限結合である射影性を用いて，下連続性を除いた upper continuous complemented modular lattice が dimension lattice であることを証明した。　例えば modular matroid lattice（無限次元射影幾何）はこのような束の原子的な場合であって，type $I_\infty$ の dimension lattice である。

(c) modular extension をもつ束

complemented modular lattice $\Lambda$ からその一部の元を取去った形の束 $L$ の例として次の二つがある（$\Lambda$ を $L$ の modular extension という）。 (1) アフィン幾何　(2) 線型位相空間（局所凸とする）の閉部分空間の作る束。　この両者は全く異質のものではあるが，M-symmetric であるのが重要な共通点である。　このような束についての議論は，近く出版される F. Maeda, S. Maeda [13] で詳述される。

## §4. orthomodular lattice の理論

projection lattice は有限でないと modular と限らないが，ある程度の modularity をもっている。　とくに基本的なのは

次の orthomodular である。

orthocomplemented lattice $L$ において，すべての $a \in L$ に対して $(a, a^{\perp})M$ であるとき，$L$ は orthomodular であるという。これは次の条件と同値である。 $a \leqq b$ ならば $b = a \vee (b \wedge a^{\perp})$.
これより orthomodular は relatively orthocomplemented を意味していることがわかる。

(a) <u>commutativity</u>

projection lattice における projection の可換性 $(PQ = QP)$ は orthocomplemented lattice $L$ において次のように表現される。

$$a \, C \, b \quad とは \quad a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^{\perp}).$$

さて，$L$ が orthomodular であればこの関係は対称的であり，逆に $C$ が対称的ならば，$L$ は orthomodular である (Nakamura [18])。そこでこの commutativity が orthomodular lattice の理論では，一つの重要な道具となってくる ([13], Section 36 参照)。例えば $\{z \in L ; z \, C \, a \text{ for all } a \in L\}$ は丁度 $L$ の center である。

(b) <u>次元論</u>

Loomis [9] は公理系によって orthomodular lattice の次元論を展開したが，これは §3 の (a) に包含されるものである。さて，complete orthomodular lattice が具体的にどの程度の条件をみたすとき，前記 $(A_1)$ — $(C_4)$ をみたす同値関係が存在し

て dimension lattice になるかという問題について，まず定理2.1によれば次のことがいえる。

定理4.1. complete orthomodular lattice $L$ が finite dimension lattice になるための必要十分条件は $L$ が modular であることである。

さらに，$L$ が locally finite dimension lattice (type III の部分のないもの) になるための条件が Ramsay [21] と MacLaren [11] によって求められた。束 $L$ の元 $a$ が modular とは，すべての $x \in L$ に対して $(x, a)M$ が成立つことで，modular element 全体を $\mathfrak{M}$ とかく。$a$ が strongly modular とは $a_1 \leqq a$ ならば $a_1 \in \mathfrak{M}$ となることで，そのような元全体を $\mathfrak{M}_s$ とかく。

定理4.2. complete orthomodular lattice $L$ について次の4条件は同値である。

($\alpha$) $L$ は M-symmetric で，$\mathfrak{M}_s$ が join-dense である（すなわち $L$ のすべての元が $\mathfrak{M}_s$ の元の join で表わされる）。

($\beta_1$) $\mathfrak{M}_s$ は join-dense で p-ideal (配景性で閉じた ideal) となる。

($\beta_2$) $\mathfrak{M}$ に含まれる join-dense な p-ideal が存在する。

($\gamma$) $L$ は locally finite な dimension lattice である。

この証明について，$(\alpha) \Rightarrow (\beta_1)$ は MacLaren によるもので，途中で定理2.1を用いる。$(\beta_1) \Rightarrow (\beta_2)$ は自明。$(\beta_2) \Rightarrow (\alpha)$ は

Ramsayの結果で，直交性を除いて次の形へ一般化される（[13], Section 35参照）。

定理4.3. 0, 1をもつrelatively complemented lattice $L$が$\mathfrak{M}$に含まれるjoin-dense p-idealをもつならば，$L$もそのdualもともにM-symmetricである。

$(\gamma)\Rightarrow(\beta_2)$は有限な元全体が$\mathfrak{M}$へ含まれるjoin-denseなp-idealになることからわかる。最後に$(\beta_1)\Rightarrow(\gamma)$が次元論の主要部分となるが，$(\beta_1)$を仮定して$L$での同次元性"$\sim$"を次のように定義する。

$a\sim b$とは$z\wedge a\in\mathfrak{M}_s$または$z\wedge b\in\mathfrak{M}_s$となるような中心元$z$に対してはつねに$z\wedge a$と$z\wedge b$は配景的であること。

このとき"$\sim$"は同値関係であり条件$(A_1)$—$(C_4)$をすべてみたすことが証明出来る。また$\mathfrak{M}_s$がjoin-denseであることから$L$はlocally finiteになる。

この定理4.2の特別の場合として，MacLarenは次の定理を示した。$a\in L$がminimalとは$a_1\leqq a$ならばある中心元$z$が存在して$a_1=z\wedge a$となることとする。明らかにminimalな元は$\mathfrak{M}_s$に属する。

定理4.4. complete orthomodular lattice $L$がdimension lattice of type Iであるための必要十分条件は$L$がM-symmetricでminimal element全体がjoin-denseになることである。

次に定理4.2を拡張することを考えてみる。まず complete orthomodular lattice においては，各元 $a$ に対しそれを含む最小の中心元 $e(a)$ が存在する。さらに $\{e(a) ; a \in \mathcal{M}_s\}$ の中には最大元が存在することもいえるから，これを $z_m$ とかくことにすれば，次の定理が証明される。

定理4.5. $L$ を complete M-symmetric orthomodular lattice とするとき，次の4条件は同値である。

(α) $\mathcal{M}_s$ は配景性で閉じている。

(β) $\mathcal{M}_s$ は部分束 $L[0, z_m] = \{a \in L ; a \leqq z_m\}$ で join-dense である。

(γ) $\mathcal{M}_s$ は $L[0, z_m]$ で join-dense な p-ideal を作る。

(δ) $L$ は dimension lattice で $L[0, z_m]$ が locally finite である。

(c) O-symmetry

Schreiner [22] は，orthocomplemented lattice $L$ において，$(a, b)M \Rightarrow (b^{\perp}, a^{\perp})M$ が成立つとき，$L$ を O-symmetric とよび，O-symmetric ならば M-symmetric であることを証明した。$(a, b)M$ の dual property（すなわち $c \geqq b$ ならば $(c \wedge a) \vee b = c \wedge (a \vee b)$）を $(a, b)M^*$ とかけば，$(b^{\perp}, a^{\perp})M$ は $(b, a)M^*$ と同値であるから，$L$ が O-symmetric のときは $(a, b)M$，$(b, a)M$，$(a, b)M^*$，$(b, a)M^*$ の4つは同値となる。

Schreiner は M-symmetric な orthomodular lattice は O-symmetric であろうと予想したが，まだ解決されていない。

(d) 表現論

Foulis [5] は任意の orthomodular lattice が $*$-semigroup を用いて表現出来ることを示した。以下その概要をのべる。

$*$-semigroup $\mathcal{G}$ (semigroup で $(xy)^*=y^*x^*$, $x^{**}=x$ をみたす automorphism $x\to x^*$ をもつもの) の projection 全体 $P(\mathcal{G})$ は $ef=e$ のとき $e\leqq f$ と定義して ordered set を作る。$\mathcal{G}$ の各元の right annihilator が一つの projection から生成される，すなわち $\forall a\in\mathcal{G}\ \exists e\in P(\mathcal{G})\ \{x\in\mathcal{G}\,;\,ax=0\}=e\mathcal{G}$ のとき，$\mathcal{G}$ は Baer $*$-semigroup であるという。ここで $e$ を $a'$ とかく。$e\in P(\mathcal{G})$ に対し一般に $e\leqq e''$ であるが，$e=e''$ のとき $e$ を closed projection といい，その全体を $P_c(\mathcal{G})$ とかく。

定理 4.6. $\mathcal{G}$ が Baer $*$-semigroup のとき，$P_c(\mathcal{G})$ は orthomodular lattice である。ここで $e'$ が $e$ の orthocomplement になる。

さて，束 $L$ に対し，$L$ から $L$ への order を保つ写像全体を $\Phi(L)$ とすれば，これは semigroup を作る。ただし $(\varphi\psi)(a)=\psi(\varphi(a))$ とする。$\Phi(L)$ の二元 $\varphi,\varphi^*$ が次の条件をみたすとき互に共軛であるという。

$$\forall x\in L\quad \varphi^*(\varphi(x^\perp)^\perp)\leqq x\ ,\ \varphi(\varphi^*(x^\perp)^\perp)\leqq x.$$

$\Phi(L)$ の元で共軛元をもつもの全体を $\mathcal{G}(L)$ とかけば，$\varphi\psi$ は $\psi^*\varphi^*$ と共軛であることから，$\mathcal{G}(L)$ は $*$-semigroup となる。ところで，$a\in L$ に対して $\varphi_a(x)=(x\vee a^\perp)\wedge a$ と定義すれば，$\varphi_a$ は $\Phi(L)$ の自己共軛元でかつ $\varphi_a\varphi_a=\varphi_a$，したがって $\varphi_a$ は $\mathcal{G}(L)$ の projection であることがわかる。さらに任意の $\mathcal{G}(L)$ の元 $\varphi$ に対し $\varphi(1)^\perp=a$ とおけば，$\varphi$ の right annihilator は $\varphi_a$ から生成されることがわかるから，$\mathcal{G}(L)$ は Baer $*$-semigroup で $\{\varphi_a; a\in L\}$ がその closed projection 全体となる。これより次の表現定理をうる。

定理 4.7. 任意の orthomodular lattice $L$ に対し，ある Baer $*$-semigroup $\mathcal{G}$ が存在し，$L$ は $P_c(\mathcal{G})$ と同型（直交性も含めて）となる。

次に $*$-semigroup $\mathcal{G}$ について，$\forall S\subset\mathcal{G}$ $\exists e\in P(\mathcal{G})$ $\{x\in\mathcal{G}; Sx=0\}=e\mathcal{G}$ のとき，$\mathcal{G}$ を complete Baer $*$-semigroup という。 定理 4.6 において $\mathcal{G}$ が complete ならば $L$ も complete であり，逆に定理 4.7 において $L$ が complete ならば $\mathcal{G}$ も complete である。

注意。Baer $*$-ring では projection $e$ に対して $e'=1-e$ であるから，すべての projection は closed である。 orthomodular lattice が Baer $*$-ring を用いて表現出来ないかという問題に関係して，Janowitz [6] では次のことが証明されている。

complete orthomodular lattice L が定理4.2の条件をみたすとき，LはすべてのprojectionがclosedであるようなBaer *-semigroupで表現出来る。

## §5. Projection lattice の特性

これまで束論のうちでprojection latticeを基にして発展した連続幾何学とorthomodular latticeの理論の概要を述べたが，ここではprojection lattice $P(\mathfrak{A})$にもどって，一般のorthomodular latticeでは成立しない$P(\mathfrak{A})$の特性と，それが$\mathfrak{A}$のどのような性質から生れるかを調べてみる。

(a) O-symmetry

Mackey [10] はBanach spaceのclosed subspaceの作る束において，$(a,b)M$, $(b,a)M$, $(a,b)M^*$, $(b,a)M^*$ の4つは同値であることを示したが，これによりHilbert space上のprojectionの作る束はO-symmetricである。Topping [24] はこれを拡張して，任意のvon Neumann algebraのprojection latticeはO-symmetricであることを示した。その拡張された形は次の通りである。([13], Section 37 参照)

定理5.1. Baer *-ring $\mathfrak{A}$ が次の条件をみたせば $P(\mathfrak{A})$ は O-symmetric である。

(SR) $\forall a \in \mathfrak{A}\ \exists |a| \in \mathfrak{A}$ s.t. $|a|^* = |a|$, $|a|^2 = a^*a$, $|a|\ CC\ a^*a$.

$\mathfrak{A}$ が AW*-algebra ならば，(SR) がみたされるので $P(\mathfrak{A})$ は O-symmetric である。

(b) dimension lattice

$\mathfrak{A}$ が complete Baer *-ring のとき $P(\mathfrak{A})$ は complete orthomodular lattice であるが，$e, f \in P(\mathfrak{A})$ に対して $e = x^*x$, $f = xx^*$ となる $x \in \mathfrak{A}$ が存在するとき $e \overset{*}{\sim} f$ と定義して，これを同次元性として $P(\mathfrak{A})$ が dimension lattice になる（すなわち "$\overset{*}{\sim}$" が条件 $(A_1)$—$(C_4)$ をみたす）ための十分条件が，Kaplansky [8] によって求められている。それは $\mathfrak{A}$ が上記 (SR) と次の条件 (EP) をみたすことである。

(EP) $\forall a \in \mathfrak{A}\ \exists b \in \mathfrak{A}$ s.t. $b^* = b$, $b\,CC\,a^*a$, $a^*ab^2 \in P(\mathfrak{A})$.

$\mathfrak{A}$ が AW*-algebra ならばこの二条件はみたされるので，$P(\mathfrak{A})$ は dimension lattice である。

(c) 配景性の transitivity

Fillmore [4] は $\mathfrak{A}$ が von Neumann algebra のとき $P(\mathfrak{A})$ において配景性は transitive であることを証明した。（束論で配景性の transitivity を証明出来るのは continuous complemented modular lattice においてである。）この結果は次の定理からえられる。

定理 5.2. von Neumann algebra $\mathfrak{A}$ の二つの projection $e, f$ が $P(\mathfrak{A})$ で配景的であるための必要十分条件は，それらが

$\mathfrak{A}$ で unitary equivalent，すなわち $\mathfrak{A}$ の unitary element $u$ が存在して $u^*eu=f$ となることである。

Fillmore による この定理の証明は AW*-algebra には適用されず，したがって $\mathfrak{A}$ が AW*-algebra の場合，$P(\mathfrak{A})$ において配景性が transitive になるかどうか不明である。

(d) Hilbert 空間の projection lattice の特性化

Hilbert 空間の projection lattice は von Neumann algebra のそれの特別の場合であり，complete 0-symmetric，orthomodular lattice である上に irreducible，atomic の性質も持つ。さらにこれにいくつかの性質を加えて，その特性化をはかる問題については，量子論に関係して Zierler [25]，[26] や Piron [20] の結果があるけれども，束論的にみて十分なものとはいえない。[20] では，irreducible modular matroid lattice がある体 K 上のベクトル空間の部分空間の束で表現出来ることを用いるが，その K が実数体または複素数体になることを仮定として入れている。一方 [25] では atomic orthomodular lattice L が可分な Hilbert 空間の projection lattice と同型になるための条件を出しているが，それは L が十分多くの state をもつことをはじめ非常に複雑なもので，束論の定理としてはもっと整備された形が望まれる。

References

[1] J. C. Abbott, Trends in lattice theory, Van Nostrand, New York, 1970.

[2] S. K. Berberian, On the projection geometry of a finite AW*-algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 493-509.

[3] J. Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espaces hilbertien, Gautier-Villars, Paris, 1957.

[4] P. A. Fillmore, Perspectivity in projection lattices, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 383-387.

[5] D. J. Foulis, Baer *-semigroups, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), 648-654.

[6] M. F. Janowitz, Equivalence relations induced by Baer *-semigroups (to appear).

[7] I. Kaplansky, Any orthocomplemented complete modular lattice is a continuous geometry, Ann. of Math., 61 (1955), 524-541.

[8] ———————, Rings of operators (Lecture notes 1955), Benjamin, New York, 1968.

[9] L. H. Loomis, The lattice theoretic background of the dimension theory of operator algebras, Memoirs Amer. Math. Soc., No. 18, 1955.

[10] G. W. Mackey, On infinite-dimensional linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 57 (1945), 155-207.

[11] M. D. MacLaren, Nearly modular orthocomplemented lattices, Trans. Amer. Math. Soc., 114 (1965), 401-416.

[12] F. Maeda, Kontinuerliche Geometrien, Springer-Verlag, Berlin, 1958.

[13] F. Maeda and S. Maeda, Theory of symmetric lattices, Springer-Verlag, Berlin, 1970 (in press).

[14] S. Maeda, Dimension functions on certain general lattices, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, 19 (1955), 211-237.

[15] ———, Dimension theory on relatively semi-orthocomplemented lattices, ibid., 25 (1961), 369-404.

[16] ———, 束における次元論, Functional Analysis Sympos. 報告, No. 3 (1965), 1-19.

[17] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, Ann. of Math., 37 (1936), 116-229.

[18] M. Nakamura, The permutability in a certain orthocomplemented lattice, Kodai Math. Sem. Reports., 9 (1957), 158-160.

[19] J. von Neumann, Continuous geometry (Lecture notes 1936-37), Princeton Univ. Press, Princeton, 1960.

[20] C. Piron, Axiomatique quantique, Helv. Phys. Acta, 37 (1964), 439-468.

[21] A. Ramsay, Dimension theory in complete orthocomplemented weakly modular lattice, Trans. Amer. Math. Soc., 116 (1965), 9-31.

[22] E. A. Schreiner, Modular pairs in orthomodular lattices, Pacific J. Math., 19 (1966), 519-528.

[23] L. A. Skornyakov, Complemented modular lattices and regular rings, Oliver and Boyd, Edinburgh-London, 1964.

[24] D. M. Topping, Asymptoticity and semimodularity in projection lattices, Pacific J. Math., 20 (1967), 317-325.

[25] N. Zierler, Axioms for non-relativistic quantum mechanics, Pacific J. Math., 11 (1961), 1151-1169.

[26] ————, On the lattice of closed subspaces of Hilbert space, ibid., 19 (1966), 583-586.