数理解析研究所講究録
第 104 巻 1970 年 82-99

Algebra of observables in Hilbert space.

九大理　富田　稔.

§1. 序論

Observable は，Hilbert 空間上の作用素，vector，共役 vector，期待値などを包括した物理学上の概念である。これを数学的に取扱うために，Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ の上の任意の作用素，2個の vector，および scalar からなる組 (A_0, x, y, μ) を $\mathfrak{H}$ の observable と呼び，$\mathfrak{H}$ の observable 全体 $T(\mathfrak{H})$ に適当な *-代数としての演算と norm を導入して Banach *-代数として取扱うことにする。

そのために Lie 群 G の正定値超関数 μ の表現を考察する。Compact carrier をもち無限回微分可能な G 上の関数全体 $\mathcal{D}(G)$ を G の群環としての位相 *-代数であると考えたとき，μ は $\mathcal{D}(G)$ 上の連続な正値線型汎関数である。μ を用いて適当な Hilbert 空間 $L^2(\mu)$ への $\mathcal{D}(G)$ の vector 表現 λ と作用素表現 π を構成することが出来る。λ は $\mathcal{D}(G)$ から $L^2(\mu)$ の稠密部分空間への連続線型写像であり，π は $\mathcal{D}(G)$ から $L^2(\mu)$ 上のある作用素環への連続な *-準同型写像で，次の条件をみたすものである。

$$\mu(g^*f) = (\lambda(f)|\lambda(g)),$$

$$\pi(f)\lambda(g) = \lambda(fg).$$

このπ, λを用いて$L^2(\mu)$上のobservable表現τを次のように定義する.

$$\tau(f) = (\pi(f), \lambda(f), \lambda(f^*), \mu(f)).$$

Observableのnorm, その間の演算などは, この表現が連続となるように導入される。このようにすれば, 一般に位相$*$-代数の作用素表現πとvector表現λの相互関係の研究, あるいはGの正定値超関数と通常の正定値関数の関係の研究, またC^*-代数およびvon Neumann代数の上の非有界正値線型汎関数の研究などはすべてObservableの作る$*$-代数の構造の研究に帰着させることが出来る。

§2. 基本概念.

$T(\mathfrak{H})$のBanach $*$-代数としての演算およびnormは次の通りである。$A = (A_0, x, y, \mu)$, $B = (B_0, u, v, \nu)$とすれば

$$\alpha A = (\alpha A_0, \alpha x, \bar{\alpha} y, \alpha\mu), \quad A+B = (A_0+B_0, x+u, y+v, \mu+\nu),$$

$$AB = (A_0B_0, A_0u, B_0^*y, (y|u)), \quad A^* = (A_0^*, y, x, \bar{\mu}).$$

$$\|A\| = \left(\|A_0\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + |\mu|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

・$\mathfrak{H}$上の連続線型作用素全体を $P(\mathfrak{H})$ とする。$P(\mathfrak{H})$ の任意の要素 A を observable $(A,0,0,0)$ と，また $\mathfrak{H}$ の任意の要素 x を observable $(0,x,0,0)$ と同一視すれば，$P(\mathfrak{H})$ は $T(\mathfrak{H})$ の閉部分*-代数に，$\mathfrak{H}$ は $T(\mathfrak{H})$ の閉部分空間に，*-代数としての演算や作用素と vector の積などをすべて保存して等長同型に embed される。実際

$$(A,0,0,0)(0,x,0,0) = (0,Ax,0,0).$$

$\mathfrak{H}$ の要素 x に対して，x^* は observable $(0,0,x,0)$ をあらわすことになる。$x \longrightarrow x^*$ は $\mathfrak{H}$ と $T(\mathfrak{H})$ のある閉部分空間 $\mathfrak{H}^*$ の間の involution（反射的共役線型等長同型対応）になる。Observable $(0,0,0,1)$ を J であらわし単位期待値という。また observable $A=(A_0,x,y,\mu)$ に対して $A_0=\pi(A)$, $x=\lambda(A)$, $y=\lambda(A^*)$, $\mu=\mu(A)$ とおけば

$$A = \pi(A)+\lambda(A)+\lambda(A^*)^*+\mu(A)J,$$

$$\|A\|^2 = \|\pi(A)\|^2 + \|\lambda(A)\|^2 + \|\lambda(A^*)\|^2 + |\mu(A)|^2,$$

作用素 A および vector x, y の間の observable としての演算は次の通りである。

$$y^*A = (A^*y)^*, \quad y^*x = (x|y)J,$$
$$xA = Ay^* = xy = x^*y^* = xy^* = 0 .$$

§3. $T(\mathfrak{H})$ の代数的な性質

J の scalar multiply μJ 全体を CJ とする。CJ は $T(\mathfrak{H})$ の center で、任意の observable A と CJ の要素 X に対して $AX = XA = 0$ が成立する。$T(\mathfrak{H})$ の根基は π の核、つまり $\pi(A) = 0$ となる observable A 全体である。$T(\mathfrak{H})$ は環としての単位元をもたないのでこれに単位元を加えた Banach $*$-代数 $T_1(\mathfrak{H})$ を考え、その要素を擴大 observable という。$T_1(\mathfrak{H})$ の単位 1 と $\mathfrak{H}$ の単位作用素 I は区別しなければならない。作用素 A の作用素としての spectrum を $S_\pi(A)$ であらわす。

Observable A の spectrum $S(A)$ を、$T_1(\mathfrak{H})$ の中での A の spectrum であると定義すれば

$$S(A) = S_\pi(\pi(A)) \cup \{0\}$$

が成立する。$\mu(A) = 0$ となる observable A を preobservable と呼び、$\mathfrak{H}$ の preobservable 全体を $\mathfrak{P}(\mathfrak{H})$ とする。また任意の observable A に対して $\rho(A) = A - \mu(A)J$ と

おき，$R(\mathfrak{H})$ の中に新しい積を $P(AB)$ で定義する．CJ を $T(\mathfrak{H})$ の ideal と見たとき，$P(A) \longleftrightarrow A-CJ$ は $R(\mathfrak{H})$ と商環 $T(\mathfrak{H})-CJ$ の間の等長同型対応となり，$R(\mathfrak{H})$ は Banach *-代数である．

Observable A は $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ の2次式 (quadric)

$$A(x,y)=(\pi(A)x|y)+(\lambda(A)|y)+(x|\lambda(A^*))+\mu(A)$$

をあらわしている．この表現は忠実であるから；$\mathfrak{H}$ の幾何学的変換は，$T(\mathfrak{H})$ の変換をひきおこす．いま $\mathfrak{H}$ の unitary 作用素を U，$\mathfrak{H}$ の要素を g，正数を α として，$T(\mathfrak{H})$ の変換 T_U，T_g，T_α を次のように定義する．

$$T_U A(Ux,Uy)=A(x,y),$$

$$T_g(A)(x-g,y-g)=A(x,y),$$

$$T_\alpha(A)(\alpha x,\alpha y)=\alpha^2 A(x,y).$$

これを計算すれば次の形になる．

$$T_U A = U\pi(A)U^* + U\lambda(A) + (U\lambda(A^*))^* + \mu(A)J.$$

$$T_g(A)=\pi(A)+(\lambda(A)+Ag)+(\lambda(A^*)+A^*g)^*$$
$$+\left(\mu(A)+(\lambda(A)|A^*g)+(Ag|\lambda(A^*))+(Ag|g)\right)J,$$

$$T_\alpha A = \pi(A) + \alpha\lambda(A) + (\alpha\lambda(A^*))^* + \alpha^2\mu(A)J.$$

$T(\mathfrak{H})$の幾何学的変換はこの３種の変換の積として定義する、T_u, T_g, T_α を $T(\mathfrak{H})$ の基本自己同型写像と呼ぶ。これは $T(\mathfrak{H})$ の$*$-自己同型対応をひきおこし，逆に $T(\mathfrak{H})$ の任意の$*$-自己同型対応は上の意味の幾何学的変換に限られる。

T_u, T_g, T_α は $T(\mathfrak{H})$ の正則な要素

$$S_u = 1 - I + U,\quad S_g = 1 - g + g^* - 2^{-1}\|g\|^2 J,$$
$$S_\alpha = \alpha(1-I) + I$$

を用いて次のようにあらわすことが出来る。

$$T_u A = S_u A S_u^*,\quad T_g A = S_g A S_g^*,$$
$$T_\alpha A = S_\alpha A S_\alpha^*.$$

まず $S_u^{-1} = S_u^* = S_{u^*}$, $S_g^{-1} = S_g^* = S_{-g}$ が成立することから T_u, T_g は $T(\mathfrak{H})$ の$*$-自己同型であることがわかる。S_α は任意の observable A, B に対して $A S_\alpha B = AB$ をみたしていること，$\alpha \longrightarrow S_\alpha$ が正数のつくる乗法群の同型対応であることから，T_α は $T(\mathfrak{H})$ の$*$-自己同型になる。

$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{H}$ の閉部分空間，E を $\mathfrak{M}$ への射影作用素，A_E で作用素 A の $\mathfrak{M}$ への制限 (reduction) をあらわし，

$\mathfrak{M}$ における単位期待値を J_E と書き, $\mathfrak{H}$ の observable A の $\mathfrak{M}$ への制限 (reduction) A_E を次のように定義する.

$$A_E = \pi(A)_E + E\lambda(A) + (E\lambda(A^*))^* + \mu(A) J_E .$$

また $E^\circ = 1 - I + E$ とおけば,

$$E^\circ A E^\circ = E\pi(A)E + E\lambda(A) + (E\lambda(A^*))^* + \mu(A) J .$$

これから $A \longrightarrow A_E$ は $E^\circ T(\mathfrak{H}) E^\circ$ と $T(\mathfrak{M})$ の同型対応で, $A_E = (E^\circ A E^\circ)_E$ が常に成立することがわかる.

$\mathfrak{H}$ とは別に, Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_0$ をとりその単位作用素を I_0, 単位期待値を J_0 とする. $\mathfrak{H}$ の observable A と $\mathfrak{H}_0$ の observable B との tensor 積 $A \otimes B$ は次のように定義する. $J \otimes J_0$ を $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}_0$ の単位期待値として

$$A \otimes B = \pi(A) \otimes \pi(B) + \lambda(A) \otimes \lambda(B) + (\lambda(A^*) \otimes \lambda(B^*))^* + \mu(A)\mu(B) J \otimes J_0 .$$

とくに $\mathfrak{H}_0$ が可分無限次元の場合を考え, $\mathfrak{H}_0$ の要素 e で $\|e\| = 1$ をみたすものをとり $G = I_0 + e + e^* + J_0$ とおく. $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}_0$ は $\mathfrak{H}$ の可算直和とみなすことが出来て, $A \longrightarrow A \otimes G$ は $T(\mathfrak{H})$ を $T(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}_0)$ の部分 *-代数の上にうつす等長同型写像である.

以上のような $T(\mathfrak{F})$ の幾何学的変換、制限、あるいは tensor 積 $A \to A \otimes G$ などは π の核を π の核に、また ρ の核を ρ の核にうつしているので、同時に $P(\mathfrak{F})$, $R(\mathfrak{F})$ の変換、制限、tensor 積を引きおこしている。

$T(\mathfrak{F})$ の閉部分 $*$-代数を observable algebra, $R(\mathfrak{F})$ の閉部分 $*$-代数を preobservable algebra と呼ぶ。Observable algebra $\mathfrak{A}$ は J を要素として含まない μ-有限な algebra と、J を要素として含んでいる μ-無限な algebra とに分れる。$\mathfrak{A}$ は C^*-代数と $*$-同型になるときに限り、μ-有限となる。$\mathfrak{A}$ が有限であれば、$\mathfrak{L} = \pi(\mathfrak{A})$ は C^*-代数で、適当な $\mathfrak{F}$ の要素 g をとれば $\mathfrak{A} = T_g(\mathfrak{L})$ となる。ただし作用素 A に対しては $T_g A$ は次の形である。

$$T_g A = A + Ag + (A^* g)^* + (Ag|g)J.$$

$\mathfrak{A}$ が無限の場合は $\mathfrak{A} = \rho(\mathfrak{A}) + CJ$ とかける。$\rho(\mathfrak{A})$ は preobservable algebra であり、$\mathfrak{A}$ の構造は $\rho(\mathfrak{A})$ によって完全に定まる。

$T(\mathfrak{F})$ の $*$-不変部分集合 $\mathfrak{A}$ に対して3種の commutant algebra $\mathfrak{A}^\pi, \mathfrak{A}^\rho, \mathfrak{A}^\tau$ を次のように定義する。

$$\mathfrak{A}^\pi = (X : \pi(AX - XA) = 0 \text{ for } A \in \mathfrak{A}),$$

$$\mathfrak{A}_\rho = (X : \rho(AX - XA) = 0 \text{ for } A \in \mathfrak{A}),$$

$$\mathfrak{A}^\tau = (X : AX = XA \text{ for } A \in \mathfrak{A}).$$

また $\mathfrak{A}$ の achievement $\mathfrak{A}^T$ を次のように定義する.

$$\mathfrak{A}^T = \mathfrak{A}^{\pi\pi} \cap \mathfrak{A}^{\rho\rho} \cap \mathfrak{A}^{\tau\tau}.$$

$\mathfrak{A}$ に対して $\mathfrak{A}^\pi, \mathfrak{A}^\rho, \mathfrak{A}^\tau, \mathfrak{A}^T$ は observable algebra である。CJ は $T(\mathfrak{H})$ の center であるからこれは皆 μ-制限である、一般に次の関係が成立する、

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^T = \mathfrak{A}^{TT}.$$

$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^T$ をみたす observable algebra $\mathfrak{A}$ は achieved であるという. T を $T(\mathfrak{H})$ の *-自己同型とすれば任意の $T(\mathfrak{H})$ の *-不変集合 $\mathfrak{A}$ に対して次式が成立する。

$$(T\mathfrak{A})^\pi = T(\mathfrak{A}^\pi), \quad (T\mathfrak{A})^\rho = T(\mathfrak{A}^\rho), \quad (T\mathfrak{A})^\tau = T(\mathfrak{A}^\tau),$$

$$(T\mathfrak{A})^T = T(\mathfrak{A}^T), \quad (\mathfrak{A} \otimes G)^T = \mathfrak{A}^T \otimes G.$$

また $\mathfrak{A}$ を observable algebra, E を $\mathfrak{H}$ の射影作用素とし, $\mathfrak{A}_E = (A_E : A \in \mathfrak{A})$ を $\mathfrak{A}$ の $E\mathfrak{H}$ への制限とする.

作用素環の制限の理論の拡張として次の関係が成立する。

$$(\mathfrak{a}_E)^{\pi}=(\mathfrak{a}^{\pi})_E,\quad (\mathfrak{a}_E)^{\rho}=(\mathfrak{a}^{\rho})_E,\quad (\mathfrak{a}_E)^{\tau}=(\mathfrak{a}^{\tau})_E,$$

$$(\mathfrak{a}_E)^{T}=(\mathfrak{a}^{T})_E.$$

§4. $T(\mathfrak{S})$ の位相的性質.

$T(\mathfrak{S})$ はその部分空間の積空間として次のようにあらわされる。

$$T(\mathfrak{S})=R(\mathfrak{S})+CJ,\quad R(\mathfrak{S})=P(\mathfrak{S})+\mathfrak{S}+\mathfrak{S}^*.$$

$N(\mathfrak{S})=\mathfrak{S}+\mathfrak{S}^*$ とおけば、$N(\mathfrak{S})$ は次の内積をもつ Hilbert 空間である。

$$\begin{aligned}(X|Y)&=(\lambda(X)|\lambda(Y))+(\lambda(Y^*)|\lambda(X^*))\\&=\mu(Y^*X+XY^*).\end{aligned}$$

$N(\mathfrak{S})+CJ$ は π の核つまり $T(\mathfrak{S})$ の根基であり、次の内積をもつ Hilbert 空間である。

$$(X|Y)=(\nu(X)|\nu(Y))+\mu(X)\overline{\mu(Y)},$$

ただし、ν は $\nu(A)=\lambda(A)+\lambda(A^*)^*$ によって定義される $T(\mathfrak{S})$ から $\mathfrak{S}+\mathfrak{S}^*$ 上への線型写像である。

$\pi(X)$ が nuclear 作用素である observable X を nuclear observable という。$T_*(\mathfrak{H})$ で nuclear observable 全体を、$R_*(\mathfrak{H})$ で nuclear preobservable 全体を、$P_*(\mathfrak{H})$ で nuclear 作用素全体をあらわすことにする。周知の通り、$P_*(\mathfrak{H})$ は trace norm $\|X\|_1$ に関して Banach $*$-algebra であり、$P(\mathfrak{H})$ は $P_*(\mathfrak{H})$ の dual space になっている。nuclear 作用素 A の trace を $T(A)$ とすれば $P(\mathfrak{H}) \times P_*(\mathfrak{H})$ の間の基本型式として $T(X^*A)$ $(A \in P(\mathfrak{H}),\ X \in P_*(\mathfrak{H}))$ をとることが出来る。この基本型式を次のような $T(\mathfrak{H}) \times T_*(\mathfrak{H})$ 上の基本型式に拡張する。$T(\mathfrak{H})$ の要素 A と $T_*(\mathfrak{H})$ の要素 X に対し、

$$(A \mid X) = T(\pi(X^*A)) + ((1-\pi)A \mid (1-\pi)X).$$

Nuclear observable X の trace norm $\|X\|_1$ を次のように定義する。

$$\|X\|_1 = \left(\|\pi(X)\|_1^2 + \|(1-\pi)X\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$T_*(\mathfrak{H})$ は $P_*(\mathfrak{H})$ と Hilbert 空間 $N(\mathfrak{H}) + CJ$ の積空間であるから次の定理が得られる。

定理. $T_*(\mathfrak{H})$ および $R_*(\mathfrak{H})$ は trace norm により Banach $*$-algebra であり、$T(\mathfrak{H})$ は $T_*(\mathfrak{H})$ の共役空間、$R(\mathfrak{H})$ は $R_*(\mathfrak{H})$ の共役空間である。

$T_*(\mathfrak{H})$ の共役空間としての $T(\mathfrak{H})$ の *-弱位相を $T(\mathfrak{H})$ の *-弱位相という、任意の $T(\mathfrak{H})$ の要素 A と $T_*(\mathfrak{H})$ の要素 X に対して次の式をみたす $T_*(\mathfrak{H})$ の要素 L_A^*X, R_A^*X がとれる.

$$(AB|X) = (B|L_A^*X),$$
$$(BA|X) = (B|R_A^*X).$$

このことから $B \to AB$, $B \to BA$ は $T(\mathfrak{H})$ 上で *-弱連続である. また π, ρ も *-弱連続であるから次の定理が得られる.

定理、$T(\mathfrak{H})$ の *-不変集合 $\mathfrak{A}$ に対して, $\mathfrak{A}^\pi, \mathfrak{A}^\rho, \mathfrak{A}^\tau, \mathfrak{A}^T$ などは *-弱閉である.

次に $T(\mathfrak{H})$ の *-強位相を定義する. $\mathfrak{H}$ の点列 $\{x_n\}$ の norm $\|x\| = (\sum \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$ が有限なものをとり, $T(\mathfrak{H})$ の pseudonorm t_x を次のように定める.

$$t_x(A) = \Big(\sum (\|Ax_n\|^2 + \|A^*x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} + \|\nu(A)\|^2$$
$$+ |\mu(A) + \sum (Ax_n|x_n)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}},$$

ただし $Ax_n = \pi(A)x_n$ が成立していることに注意する.

$\mathfrak{H}_0$ を可算無限次元 Hilbert 空間として, $T(\mathfrak{H})$ から

$T(\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}_0)$ の中への等長同型写像 $A\longrightarrow A\otimes G$ を考える，ただし $G=I_0+e+e^*+J_0$ である。$\mathfrak{H}$ の正規直交基 $\{e_n : n=0,1,2\cdots\}$ で $e_0=e$ をみたすものをとる。norm が有限な $\mathfrak{H}$ の点列 $x=\{x_n\}$ を $\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{H}_0$ の要素 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n\otimes e_n$ と同一視すれば，pseudonorm t_x は次の形になる。

$$t_x(A)=\|(1-\pi)(T_x(A\otimes G))\|.$$

Pseudonorm の系 $\{t_x\}$ を基として出来る $T(\mathfrak{H})$ の局所凸位相を $T(\mathfrak{H})$ の *-強位相と呼ぶ。*-強位相は一様位相より弱いが *-弱位相より強い。また次の定理が成立する。

定理. $T_*(\mathfrak{H})$ は *-強連続な $T(\mathfrak{H})$ 上の線型汎関数全体の空間である。$T(\mathfrak{H})$ 内の凸集合 X の *-強閉包と *-弱閉包は常に一致する。

作用素環に対する von Neumann および Kaplansky 稠密定理の一般化が次の2定理として証明される。

定理 ~~[illegible]~~. $\mathfrak{H}$ の observable algebra $\mathfrak{A}$ の単位球は，$\mathfrak{A}$ の *-強閉包の単位球の中で *-強稠密である。

定理. $\mathfrak{A}$ が有限な observable algebra であれば，$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}$ の achievement $\mathfrak{A}^{\tau}$ の中で *-強稠密である。

上の2定理のうち最初の Kaplansky 型定理は，例えば作用素

環の場合の Dixmier の証明を修正して証明することも出来る。が，むしろ observable algebra における duality theory の立場から取扱うことにする。Observable algebra $\mathfrak{A}$ の $T_*(\mathfrak{H})$ での anihilator を $\mathfrak{A}^\perp$，第2 anihilator を $\mathfrak{A}^{\perp\perp}$ とすれば $\mathfrak{A}^{\perp\perp}$ は $\mathfrak{A}$ の*-弱閉包（=*-強閉包）である。いま任意の observable U と手の点列 $x=\{x_n\}$ で $\|x\| \leqq 1$ をみたすものをとって nuclear 作用素 W_{xx} および nuclear observable U_x を次のように定義する。

$$W_{xx}y = \sum (y|x_n)x_n, \quad U_x = \pi(U)W_{xx} + (1-\pi)U.$$

明らかに $\|U_x\|_1 \leqq \|U\|$ となるが，次の polarization theorem が成立する。

定理. $\mathfrak{A}$ を手の observable algebra X を $T_*(\mathfrak{H})$ の要素とし，$\|X\|_{\mathfrak{A}}$ で X の $\mathfrak{A}$ における norm をあらわすとする。このとき $\|U\| = \|X_{\mathfrak{A}}\|$ をみたす $\mathfrak{A}^{\perp\perp}$ の要素 U と $\|x\| = 1$ をみたす手の点列 $x=\{x_n\}$ で $X - U_x$ が $\mathfrak{A}^\perp$ に属するものがある。

この定理の証明は，先ず $\mathfrak{A}$ の連続線型汎関数について類似の定理を証明しておき，それが*-強連続な場合に定理3.6の形になることを示せばよい。この定理は，$\mathfrak{A}$ 上の*-強連続線型汎関数全体 $\mathfrak{A}_*$ は $\mathfrak{A}$ の共役空間 $\mathfrak{A}^*$ の閉線型部

分空間であり，しかも商空間 $T_x(G)-\mathfrak{A}^{\perp}$ と等長同型になることを示している．$\mathfrak{A}^{\perp\perp}$ は $T_x(G)-\mathfrak{A}^{\perp}$ の共役空間であるから，$\mathfrak{A}$ の単位球は $\mathfrak{A}^{\perp\perp}$ の単位球で *－弱稠密（従って *－強稠）になる．

von Neumann 型稠密定理も本質的には duality theory の問題である．*－強位相を定義する pseudonorm t_x は

$$t_x(A)=\|(1-\pi)T_x(A\otimes G)\|$$

とあらわせるし，他方 observable algebra $\mathfrak{A}$ に対しては

$$\left(T_x(\mathfrak{A}\otimes G)\right)^{\tau}=T_x(\mathfrak{A}^{\tau}\otimes G)$$

が成立するので，無限 observable algebra $\mathfrak{A}$ に対して $(1-\pi)\mathfrak{A}$ が $(1-\pi)\mathfrak{A}^{\tau}$ で稠密なことを示せばよい，$\mathfrak{A}=\rho(\mathfrak{A})+CJ$，$\mathfrak{A}^{\tau}=\rho(\mathfrak{A}^{\tau})+CJ$ であるから，結局 $\nu(\mathfrak{A})$ が $\nu(\mathfrak{A}^{\tau})$ で稠密なことを示せばよい．以下の議論は [1] で試みられた議論と本質的に同一の証明を行えばよい．しかし議論には unbounded な作用素，あるいは observable の性質を使う必要がある．

§4. Observable algebra の構造

Observable の集合 $\mathfrak{M}$ に対して，$\mathfrak{M}$ を含む最小の閉

凸集合を$Co(X)$，で，$\mathfrak{M}$を含む最小の閉線型空間を$[\mathfrak{M}]$であらわす．Preobservable algebra $\mathfrak{A}$に対して，$[\mathfrak{A}\xi]$への射影作用素をP，$\pi(A)=0$をみたす$\mathfrak{A}$の要素全体を$N(\mathfrak{A})$，$[\lambda(N(\mathfrak{A}))]$への射影作用素を$N$とし，

$$F=P(I-N),\ S=PN,\ Z=(I-P)N,\ V=(I-P)(I-N)$$

とおけば，F, S, Z, Vは$F+S+Z+V=I$をみたす互に直交する射影作用素である．これらを用いて次のような$\mathfrak{A}$の部分集合および部分代数を定義する．

$$\mathfrak{A}_F=(\pi(A)+F\lambda(A)+(F\lambda(A^*))^* : A\in\mathfrak{A}),$$

$$N(S)=(x+y^* : x, y\in \text{Range of } S),$$

$$\mathfrak{A}_Z=(Z\lambda(A)+(Z\lambda(A^*))^* : A\in\mathfrak{A}),$$

$$\mathfrak{A}_P=(\pi(A)+P\lambda(A)+(P\lambda(A^*))^* : A\in\mathfrak{A}),$$

$$\mathfrak{A}^H=(A\in\mathfrak{A} : A=A^*),$$

$$\mathfrak{A}^+=Co(A^*A : A\in\mathfrak{A}).$$

このとき次の定理が成立する．

定理．(a)．$N(\mathfrak{A})$は$\mathfrak{A}$のradicalで，$\mathfrak{A}_F$は商環$\mathfrak{A}-N(\mathfrak{A})$に等長同型なobservable subalgebra

である。(b)、$\mathfrak{A}_Z$ は $X\mathfrak{A}=\mathfrak{A}X=0$ となる $\mathfrak{A}$ の要素 X 全体の作る observable algebra に等しい。(c)、$\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}_P$ と $\mathfrak{A}_Z$ の直和である。(d)、$\mathfrak{A}_P=[\mathfrak{A}^+]=[\mathfrak{A}^2]$ が成立する。(e)、$N(S)$ は $\mathfrak{A}_P$ の radical で、$\mathfrak{A}_P=\mathfrak{A}_F+N(S)$ が成立する。(f)、$N(S)^H=\mathfrak{A}^+\cap N(\mathfrak{A})$ であり、$\mathfrak{A}^+=(A\in\mathfrak{A}_P^H:\pi(A)\geqq 0)$ となる。

上の定理は一般の ~~observ~~ preobservable algebra が semi-simple な observable algebra $\mathfrak{A}_P$ からどのようにして構成されるかを決定するものである。これと von Neumann, Kaplansky 型定理の応用によって無限 observable algebra $\mathfrak{A}$ とその commutant $\mathfrak{A}^\rho$ の関係が次のように述べられる。$\mathfrak{A}$ を preobservable algebra として $\rho(\mathfrak{A}^\rho)$ に対して定義される射影をそれぞれ、$P_\rho, N_\rho, F_\rho, S_\rho, Z_\rho, V_\rho$ とおけば、

定理。任意の preobservable algebra $\mathfrak{A}$ に対して、次の関係式が成立する。

$$P_\rho=I-N,\quad N_\rho=I-P,$$

$$F=F_\rho,\quad S=V_\rho,\quad Z=Z_\rho,\quad V=S_\rho.$$

Preobservable algebra $\mathfrak{a}$ では $\mathfrak{a}$ が semi-simple であること(つまり $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_F$)と $\mathfrak{a}$ が非縮退(つまり $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_p = [\mathfrak{a}^2] = [\mathfrak{a}^+]$) とは同値でない. Lie 群 G 上の正定値超関数 μ について, 以上の構造論の意味するところを説明すれば次の通りである. まず $L^2(\mu)$ 上の observable 表現 で $\mathcal{D}(G)$ を表現して出来た observable algebra を $\mathfrak{L}$ とする. $L^2(\mu)$ 上で π は非縮退なので $\mathfrak{L}$ は非縮退である. ~~従って~~ これは $\mathfrak{a} = \mathcal{D}(G)$ として $[\mathfrak{a}^2]$ が $\mathfrak{a}$ で稠密であることに対応している. しかし, $\mathfrak{L}$ は必しも semi-simple でない. $\mathfrak{L}$ が semi-simple なことと次の条件は同値である.

(1). $\pi(a) \to \lambda(a)$ は closable, すなはち. $\pi(a_n) \to 0$ $\lambda(a_n) \to x$ ならば $x = 0$.

(2). $$\mu(a^*a) = \sup_{p \in \mathcal{F}(\mu)} p(a^*a)$$

が成立する. ただし, $\mathcal{F}(\mu)$ は $\mu \geq p \geq 0$ をみたす正定値関数全体である.

[1]. Standard forms of von Neumann algebras M. Tomita, 1967. 東北大学, Functional analysis symposium. 講究録.