

二点接続問題

広島大理河野實彦

1. 単独線型常微分方程式

$$(1) \quad t^n \frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{l=1}^n t^{n-l} \left(\sum_{r=0}^{2l} a_{l,r} t^r \right) \frac{d^{n-l} x}{dt^{n-l}}$$

に関する大域解に ついて 考察する。

上の微分方程式は 複素全平面において $t=0$ で
確定特異点を, $t=\infty$ で rank 2 の不確定特異
点を 持つ 2 つ いる。 先ず, どれどれの特異点の近傍
での解に ついて 述べ る。

確定特異点, $t=0$ の近傍においては,

$$(2) \quad x_j(t) = t^{\rho_j} \sum_{m=0}^{\infty} G_j(m) t^m \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

で表現される基本解が 存在する 事実 は 周知の事
である。 ところで, ρ_j は 特性方程式

$$(3) \quad E(p) = [p]_n - \sum_{l=1}^n a_{l,0} [p]_{n-l} = 0$$

$$[p]_p = p(p-1) \cdots (p-p+1)$$

の根を $p_j - p_k \neq \text{整数} (j \neq k)$ と仮定して置く。

他方、不確定特異点 $t = \infty$ の近傍には $t = 0$ がある一つの $t = 0$ に中心をもち扇状領域 S において、基本解 $x_S^k(t)$ ($k=1, 2, \dots, n$) が存在し、これら解の行動を表現するものとして、

$$(4) \quad x_S^k(t) \cong x^k(t) \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad \text{in } S$$

なる漸近関係が成立する事も良く知られた結果

である。そこで、 $x^k(t)$ ($k=1, 2, \dots, n$) は微分方程式 (1) の形式解で

$$(5) \quad x^k(t) = \exp\left(\frac{\lambda_k}{2} t^2 + \alpha_k t\right) t^{\mu_k} \sum_{s=0}^{\infty} h^k(s) t^{-s}$$

なる形を有す。特性定数 $\lambda_k, \alpha_k, \mu_k$ については

説明を加えれば、 λ_k は特性方程式

$$(6) \quad F(\lambda) = \lambda^n - \sum_{l=1}^n a_{l,2l} \lambda^{n-l} = 0$$

の根で、 $\lambda_j \neq 0, \lambda_j \neq \lambda_k (j \neq k)$ と仮定する。

すると, α_k, μ_k は次の式によって決められる定数である。

$$(7) \quad \alpha_k = \sum_{l=1}^n a_{l, 2l-1} \lambda_k^{n-l} / F'(\lambda_k)$$

$$(8) \quad \mu_k = \left\{ - \binom{n}{2} (\lambda_k^{n-1} + \lambda_k^{n-2} \alpha_k^2) \right. \\ + \sum_{l=1}^n a_{l, 2l} \binom{n-l}{2} (\lambda_k^{n-l-1} + \lambda_k^{n-l-2} \alpha_k^2) \\ + \sum_{l=1}^n a_{l, 2l+1} (n-l) \lambda_k^{n-l-1} \alpha_k \\ \left. + \sum_{l=1}^n a_{l, 2l-2} \lambda_k^{n-l} \right\} / F'(\lambda_k).$$

上の特性定数 $\rho_j, \lambda_k, \alpha_k, \mu_k$ の決め方からわかる事は微分方程式(1)に一つの不変式が存在する事である。それは

$$(9) \quad \sum_{j=1}^n \rho_j = \sum_{k=1}^n \mu_k + n(n-1)$$

であり, この関係式は後に重要な役割を演ずる事になる。

さて, 話を元に戻して, 一つの扇状領域 S における基本解 $x_S^k(t)$ の漸近行動は一般に S に依存する, 即ち $x_S^k(t)$ は S と異なつた

扇状領域 S' において $x^k(t)$ をその漸近展開式として持たないのである。この事実は Stokes 現象と呼ばれる。

こうした Stokes 現象の解明にも、大域解の構成が必要である。そこで大域解の構成の一つの方法として、接続という手段が浮い上って来る。これは、不確定特異点の近傍における基本解 $x_S^k(t)$ と、確定特異点の近傍における基本解 $x_j(t)$ の一次結合で表現しようとするのである。

$$(10) \quad x_S^k(t) = \sum_{j=1}^n C_j^k(S) x_j(t) \quad \text{in } S$$

における定数 $C_j^k(S)$ ($j, k=1, 2, \dots, n$) を決定してやるべきである。

そこで、逆に収束中間数解 $x_j(t)$ の任意の扇状領域 S' における漸近行動を調べる事により、例えば

$$(11) \quad x_j(t) \cong \sum_{k=1}^n \Gamma_j^k(S) x^k(t) \quad \text{as } t \rightarrow \infty \quad \text{in } S$$

なる関係式が得られたとすれば、定数 $C_j^k(S)$ は $\Gamma_j^k(S)$ から直ちに導かれるし、その上先の Stokes 現象も

$$(12) \quad x_S^k(t) \cong \sum_{j=1}^n G_j^k(S) \sum_{l=1}^m \mathcal{P}_j^l(S') x^k(t) \quad \text{as } t \rightarrow \infty \text{ in } S'$$

なる関係式から解明される事になる。

結局、我々の目的としては、巾函数と整函数との積として表現された確定特異点の近傍における基本解 $x_j(t)$ を調べ、定数 $\mathcal{P}_j^k(S')$ ($j, k=1, 2, \dots, m$) (Stokes 係数) を決定するところになる。

2. 一般に整函数の $t \rightarrow \infty$ における行動を知るには、その展開式の係数を綿密に調べる必要がある。その意向にそって、上の微分方程式 (1) の解 $x_j(t)$ について言えば、その展開式 (12) の係数 $G_j(m)$ ($j=1, 2, \dots, n$) は

$$(13) \quad [p_j + m]_m G_j(m) = \sum_{l=1}^n \sum_{r=0}^{2l} a_{l,r} [p_j + m - r]_{m-l} G_j(m-r)$$

なる $2n$ 階差分方程式を満足してゐる事は容易にわかるが、さてその後どう解析するか。

そこで、我々は $2n$ 階差分方程式 (13) の解 $G_j(m)$ の、低階の差分方程式の解による展開表現を試みるのである。余談であるが、こゝして研究は Fuchs 型微分方程式については K. Heun

A. Erdélyi の論文に見られる。Heun 型微分方程式の解は超幾何函数により展開出来るし、超幾何函数が巾級数展開出来るのは巾函数が二つの確定特異点を持つ微分方程式の解であるからである。

低階の差分方程式としては二階の差分方程式

$$(14) \quad (m+p, -\mu_k) g_1^k(m) = \alpha_k g_1^k(m-1) + \lambda_k g_1^k(m-2)$$

を導入する。これは微分方程式の不確定特異点の rank により必然的に導かれるものであり基本差分方程式と呼んでも良からう。

さて、展開の話に入るが、その前に形式解 $x^k(t)$ の展開係数について説明しておかなければならない。いきなり、(5)式を微分方程式に代入し、その係数 $h_p^k(s)$ の満たす差分方程式を導こうと努力しても、徒勞に終りそうなので、先ず

$$(15) \quad x_p^k(t) = t^{-p} \frac{d^p x^k}{dt^p} = \exp\left(\frac{\lambda_k}{2} t^2 + \alpha_k t\right) t^{\mu_k} \sum_{s=0}^{\infty} h_p^k(s) t^{-s}$$

とおいて、 $h_p^k(s)$ に関する差分方程式を導く。

こうすると

$$(16) \quad h_p^k(s) = \lambda_k h_{p+1}^k(s) + \alpha_k h_{p+1}^k(s-1) + (\mu_k + p + 1 - s) h_{p+1}^k(s-2)$$

$$(17) \quad h_n^k(s) = \sum_{l=1}^n \sum_{r=0}^{2l} a_{l,r} h_{n-l}^k(s+r-2l)$$

の \Rightarrow の差分方程式が得られる。そこで、(16)式から

$$(18) \quad h_p^k(s) = \sum_{q=0}^{2p} \left\{ \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \binom{p}{q-r} \lambda_k^{p-q+r} \alpha_k^{q-2r} H^k(p,q;r;s) \right\} h^k(s-q)$$

なる表現式が得られるので、これを(17)式に代入すれば、 $h^k(s)$ の満たす差分方程式が得られるという事になる。準備が出来たので

$$(19) \quad f_{j,p}^k(m) = \sum_{s=0}^{\infty} h_p^k(s) g_j^k(m+s) \quad (p=0,1,\dots,n)$$

なる展開式を考えよう。

(16)(17)式の両辺に $g_j^k(m+s)$ をかけ、 $s=0,1,2,0$ から ∞ までの和を取れば

$$(20) \quad f_{j,p}^k(m) = (m + \rho_j + p + 1) f_{j,p-1}^k(m+2)$$

$$(21) \quad f_{j,n}^k(m) = \sum_{l=1}^n \sum_{r=0}^{2l} a_{l,r} f_{j,n-l}^k(m+2l-r)$$

が得られ、更に(20)から得られる

$$(22) \quad f_{j,p}^k(m) = [m + \rho_j + 2p]_p f_{j,0}^k(m+2p)$$

を (21) 式に代入すれば

$$(23) \quad [m+\rho_j+2n]_n f_{j,0}^k(m+2n) \\ = \sum_{l=1}^n \sum_{r=0}^{2l} a_{l,r} [m+\rho_j+2n-r]_{n-l} f_{j,0}^k(m+2n-r)$$

を得る。これは取りも直さず、 $f_{j,0}^k(m)$ が差分方程式 (13) の特殊解である事を示しているのである。基本差分方程式 (14) には二つの独立な解が存在するから、結局 $2n$ 個の特殊解が得られた事になる。そこで上の形式的計算に意味づけをしなければならぬ。

(i) $f_{j,p}^k(m)$ ($p=0,1,2,\dots,n$) は well-defined であるか。

(ii) $2n$ 個の特殊解が差分方程式 (13) の基本解となるか。

肯定的答を得るためには (i) では級数 (19) の収束性を示さなければならぬし (ii) では Casorati-行列を検討する訳であるが、これには $g_1^k(m)$, $h_p^k(s)$ の m, s が充分大きるときに行動を調べなくてはならない必要がある。計算は省略するが、こうして次の結果を得る事が出来る。

定理 係数 $G_j(m)$ ($j=1, 2, \dots, n$) は $f_j^k(m) \equiv f_{j,0}^k(m)$, $f_j^{k*}(m) \equiv f_{j,0}^{k*}(m)$ ($k=1, 2, \dots, n$) の一次結合として表現される。

$$(24) \quad G_j(m) = \sum_{k=1}^n \pi_j^k f_j^k(m) + \sum_{k=1}^n \pi_j^{k*} f_j^{k*}(m)$$

すなわち, Stokes 係数 π_j^k, π_j^{k*} , は次の一次式によって決定される定数である。

$$\begin{pmatrix} G_j(0) \\ G_j(-1) \\ \vdots \\ G_j(-2n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j^1(0) & \dots & f_j^n(0) f_j^{1*}(0) & \dots & f_j^{n*}(0) \\ f_j^1(-1) & \dots & f_j^n(-1) f_j^{1*}(-1) & \dots & f_j^{n*}(-1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_j^1(-2n+1) & \dots & f_j^n(-2n+1) f_j^{1*}(-2n+1) & \dots & f_j^{n*}(-2n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_j^1 \\ \vdots \\ \pi_j^n \\ \pi_j^{1*} \\ \vdots \\ \pi_j^{n*} \end{pmatrix}$$

3. $\pm z$ 二点接続問題の話に入る。

上の結果によつて, 微分方程式 (1) の収束巾級数解 $x_j(z)$ ($j=1, 2, \dots, n$) は, 下記定義される $2n$ 個の函数 $x_j^k(z), x_j^{k*}(z)$ ($k=1, 2, \dots, n$) の一次結合として表わされる。即ち

$$(25) \quad x_j(z) = t^{\beta_j} \sum_{m=0}^{\infty} G_j(m) z^m$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \Gamma_j^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_j^k(m) t^{m+\beta_j} \right) + \sum_{k=1}^n \Gamma_j^{k*} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_j^{k*}(m) t^{m+\beta_j} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \Gamma_j^k x_j^k(t) + \sum_{k=1}^n \Gamma_j^{k*} x_j^{k*}(t)
\end{aligned}$$

そこで,

$$(26) \quad x_j^k(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} f_j^k(m) t^{m+\beta_j}$$

$$(27) \quad x_j^{k*}(t) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} f_j^{k*}(m) t^{m+\beta_j}$$

更に、上の巾級数展開式の係数 $f_j^k(m)$, $f_j^{k*}(m)$ は、基本差分方程式 (14) の解による巾級数展開式で与えられたこととを考慮すれば、例へば

$$\begin{aligned}
(28) \quad x_j^k(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} k^k(s) g_j^k(m+s) \right) t^{m+\beta_j} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} h^k(s) \left(\sum_{m=0}^{\infty} g_j^k(m+s) t^{m+\beta_j} \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} k^k(s) x_j^k(t, s)
\end{aligned}$$

となる。そこで、次の段階として、函数

$$(29) \quad x_j^k(t, s) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} g_j^k(m+s) t^{m+\beta_j}$$

の解析を行ふ。実際、函数 $x_j^k(t, s)$ は簡単な微分方程式

$$(30) \quad t \frac{d x_j^k(t, s)}{dt} = \left[\lambda_k t^2 + d_k t + (\mu_k - s) \right] x_j^k(t, s) \\ + \lambda_k g_j^k(s-1) t^{\rho_j+1} + (s + \rho_j - \mu_k) g_j^k(s) t^{\rho_j}$$

ε 満足 $\nu \geq 1$ なること ε 知り、求積法により、次のような積分による表現が得られる。

$$(31) \quad x_j^k(t, s) = \lambda_k g_j^k(s-1) t^{\rho_j+1} \chi(\sqrt{\lambda_k} t : s - \mu_k + \rho_j + 1 : \frac{d_k}{\sqrt{\lambda_k}}) \\ + (s + \rho_j - \mu_k) g_j^k(s) t^{\rho_j} \chi(\sqrt{\lambda_k} t : s - \mu_k + \rho_j : \frac{d_k}{\sqrt{\lambda_k}})$$

□ □ □

$$(32) \quad \chi(t; \nu; \delta) = \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2} t^2 (1-\tau^2) + \delta t (1-\tau)\right) \tau^{\nu-1} d\tau.$$

結局、微分方程式 (1) の収束巾級数解 $x_j(t)$ の解析は、(32) の積分によって定義される函数 $\chi(t; \nu; \delta)$ の解析へと移行したことになる。このようにして、次の定理を得る。

定理

(i) $\rho_j - \rho_k \neq \text{整数}$ ($j \neq k, j, k = 1, 2, \dots, n$)

(ii) $\rho_j - \mu_k \neq \text{整数}$ ($j, k = 1, 2, \dots, n$)

(iii) $0 < \frac{|\lambda_k|}{|\lambda_j - \lambda_k|} < \frac{1}{2(L_k |\lambda_k|)^2}$ ($j \neq k, j, k = 1, 2, \dots, n$)

 L_k : constants ε 仮定する。

$$S_p = \bigcap_{k=1}^n \left\{ p\pi - \frac{\pi}{2} \leq \arg \sqrt{\lambda_k} t \leq p\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

と仮定する。

(A) p が偶数のとき

$$(33) \quad z_j(t) \cong \sum_{k=1}^n \Gamma_j^{k*} e^{p(\rho_j - \mu_k) \pi i} \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\lambda_k^2}{2\lambda_j}\right) z^k(t) \\ + O(t^{\rho_j+1}) \quad t \rightarrow \infty \text{ in } S_p$$

(B) p が奇数のとき

$$(34) \quad z_j(t) \cong \sum_{k=1}^n \Gamma_j^{k*} e^{(p+1)(\rho_j - \mu_k) \pi i + \pi i} \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\lambda_k^2}{2\lambda_j}\right) z^k(t) \\ + O(t^{\rho_j+1}) \quad t \rightarrow \infty \text{ in } S_p$$

 $(j=1, 2, \dots, n)$

が成立する。

詳し $\langle 12$

M. Kohno : A two point connection problem for n -th order single linear ordinary differential equations with an irregular singular point of rank two, to appear.

至参照 \pm $\langle 11$ 。