数理解析研究所講究録
第 106 巻 1971 年 18-75

確率過程と非線型方程式

阪大　理　　池田信行

§1. はじめに。粒子の衝突，個体の相互依存，物質の化学反応，神経伝播，乱流等の自然界の沢山の問題で非線型方程式によって律せられるものが沢山認識されつゝある。そしてその中のいくつかの問題は密度や割合に関係したもので，分子論的な考え方ではいわゆる確率の概念にかゝわっている。

一方実例の豊富さに比べて，系統的な考察で非線型特有の構造を確立するに到ったものは少ないように思える。(I. M. Gelfand [7])。確率過程論の立場からみた非線型方程式の取扱いも体系化されたものは多くはない。それのみならずその様な立場の考察が非線型方程式の中，どのような範囲まで可能かということにすらまだ定見はないように思える。しかしいくつかの題材については古くから確率論的な試みがなされており，実際応用上の成果も得ている。たとえば分裂現象についての分枝過程を用いる研究はそのような例の1つと言えるだろう。また非線型偏微分方程式についての典型的な研究

の1つと思える A.N. Kolmogorov – I. Petrovsky – N. Piscounoff [17] の研究等も，もともとは確率論的な考察から出て来たものである。このような事実からおして非線型方程式の研究がこれから進むにつれ，確率論との関係も一層深まることは充分期待される。それのみならず，当面確率過程論に関連しそうな範囲は非線型としてはいたって簡単なものであるが，それでも線型と違った事情の系統的な把握の出発点としては大いに役に立ちそうに思える。

このような現状を考えに入れてこの報告では現在確率論で取扱われている非線型に関係しそうな問題が，微分方程式論または解析一般の立場ではどんなことに関連しているかを出来るだけ簡単な例を通して説明して行きたい。しかし日常は確率論の研究には直接にはたずさわっていない人達を中心にした集まりでの報告であるので，説明の仕方としては可能な限り確率論的な手法をさけて行きたい。その結果，どうしても問題の考え方が中心になって具体的な結果の話が少なくなると思うが，やむを得ないと思う。しかも出て来る微分方程式は簡単なものだけで，その方の研究者には全く役に立たない可能性もあるが，違った方向の研究者の間の交流の第一歩になれば幸いである。

§2。<u>semi-linear な方程式の線型化 ---- (I)</u>。 確率過程の中，最も良く研究されているものは Markov 過程であるが，それは原理的には線型の発展方程式に関連している。したがって Markov 過程と非線型方程式を関連づけて考えようと思うと，まずその方程式を線型化して考えることが必要になる。こゝで線型化という時は単に近似ではなくて，与えられた方程式と同等な線型方程式を得ることを言う。semi-linear な方程式の中にはそのような線型化が比較的簡単に出来る時がある。まずその考えを非線型項に重点のある例を用いて説明することから始めよう。分裂問題を始め多くの現象の取扱いで

(2.1)
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u(t)^2 - u(t) \\ u(0) = \lambda \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty),$$

またはその一般化が出て来る。こゝで $0 < \lambda \leq 1$ の時を考えることにする。この解は

(2.2)
$$u(t) = \frac{\lambda e^{-t}}{1 - \lambda(1 - e^{-t})} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1}(u(0))^n$$

と書ける。いま $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ とし，上の解 $u(t)$ より

(2.3)
$$u(t, x) = (u(t))^x, \qquad x \in \mathbb{Z}_+$$

で $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$ 上の関数 $u(t, x)$ を定義すれば，それは次の方程式をみたすことが容易にわかる。

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = x\{u(t,x+1)-u(t,x)\}, & x \neq 0, \\ u(t,0) = u(0,0), & x = 0, \\ u(0,x) = \lambda^x 。 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{Z}_+,$$

はじめに与えた (2.1) は常微分方程式ではあったが、とにかく非線型であったのに対し、(2.3) の規則で $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+$ にうつすと線型な方程式 (2.4) が得られる。しかも単に線型であるのみならず、非常に特殊な発展方程式の型に属していることが実際次のようにしてわかる。

$$(2.5)\qquad \begin{cases} p(t,0,x) = \delta_{\{0\}}(x) \\ p(t,x,y) = \begin{cases} 0, & y < x, \\ A_{x,y}\, e^{-xt}(1-e^{-t})^{y-x}, & y \geq x, \end{cases} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

とおく。ただし $A_{x,y} = \#\{(n_1, n_2, \ldots, n_x);\ n_1+n_2+\cdots+n_x = y,\ n_j \in \mathbb{Z}_+\}$ とする。(2.5) の定義から明らかなように $p(t,x,y)$ は

$$(2.6)\qquad \begin{cases} p(t,x,y) \geq 0, \quad \displaystyle\sum_{y\in\mathbb{Z}_+} p(t,x,y) = 1, \\ p(t+s,x,y) = \displaystyle\sum_{z\in\mathbb{Z}_+} p(t,x,z)\,p(s,z,y), \end{cases}$$

をみたし (2.4) の基本解になっている。すなわち (2.4) の解 $u(t,x)$ は

$$(2.7)\qquad u(t,x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}_+} p(t,x,y)\,\lambda^y$$

と表わされる。また (2.2) の右辺の表現の核 $e^{-t}(1-e^{-t})^{y-1}$ は $p(t,1,y)$ になっていることがわかる。(2.6), (2.7) は後で示すように、(2.4) の発展方程式が $\underline{Z}_+$ 上の Markov 過程に対応していることを示している。その話は後に残して、この例と全く同じ考えで類型化出来る偏微分方程式の例に移ろう。

$$
(2.8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u(t,x) + k(x)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\,(u(t,x))^n, & x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x), \end{cases}
$$

なる初期問題は semi-linear な方程式で最もしばしば考えられるものである。前の例で出て来た $\underline{Z}_+$ に相当するものはこの例ではつぎのようにして構成される。

$S = \mathbb{R}^d$ とし、S の n-重の symmetric product を S^n と書き、それには通常の通り $S = \mathbb{R}^d$ より自然に導かれる位相を考える。S^n の元は $\underline{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $x_j \in S$, $j=1,2,\cdots,n$ で表わされる。また $S^0 = \{\partial\}$ は extra point を1つとって来る。

$$
\mathbb{S} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n
$$

は S^n, $n=0,1,2,\cdots$ の位相和とする。これが前の $\underline{Z}_+$ の役割を果たすことをみるのには S 上の関数 f より $\mathbb{S}$ 上の関数 $\hat{f}$ を次の形で定めるとよい。

$$
(2.9) \qquad \hat{f}(\underline{x}) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} f(x_j), & \underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathcal{S}^n, \ n \geq 1, \\ 1, & \underline{x} = \partial. \end{cases}
$$

この記号を用いると $u(t,x)$ が (2.8) の解である時 $u(t, \underline{x}) = \widehat{u(t,\cdot)}(\underline{x})$ はつぎの方程式

$$
(2.10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,\underline{x})}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u(t,\underline{x}) + \sum_{j=1}^{n} k(x_j) \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x_j)\, u(t, [x_1, \dots, x_{j-1}, \overbrace{x_j, \dots, x_j}^{m}, x_{j+1}, \dots, x_n]) \\ \qquad\qquad \underline{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathcal{S}^n, \quad n \geq 1, \\ u(t,\partial) = u(0,\partial) \\ u(0,\underline{x}) = \hat{f}(\underline{x}) \end{cases}
$$

をみたす。(2.10) は $\mathbb{R}_+ \times S$ 上の方程式としてみた時，線型であって (2.9) の規則によって (2.8) と同等なものである。(2.6) にのべた性質を得るにはこれだけの仮定では不充分で，$k(x)$, $\{p_k(x)\,;\, k=0,1,2,\dots\}$ にもう少し仮定が必要である。それについては後にふれることにして次に連立の時も同じことが可能なことを例をもって示そう。

$$
(2.11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_j(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u_j(t,x) + k^{(j)}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} p^{(j)}_{k_1,k_2}(x)\, (u_1(t,x))^{k_1} (u_2(t,x))^{k_2}, \\ u_j(0,x) = f_j(x), \qquad j = 1,2, \qquad x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}
$$

に対しては $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d \times \{1,2\}$ ととり，上と同様に S を定義する。S の点 $\underline{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ に対し， $z_j = (x_j, k_j)$, $x_j \in \mathbb{R}^d$,

$k_j \in \{1,2\}$ とする。いま

$$k(x,j) = k^{(j)}(x) , \qquad p_{m_1,m_2}(x,j) = p^{(j)}_{m_1,m_2}(x)$$

$$u(t,(x,j)) = u_j(t,x) , \qquad f(x,j) = f_j(x) ,$$

とおいて、 $u(t,\xi) = \widehat{u(t,\cdot)}(\xi)$ とすれば

$$(2.12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,\xi)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u(t,\xi) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} k(z_j)\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty} p_{m_1,m_2}(z_j)\, u(t,[z_1,\cdots,z_{j-1},\overbrace{(x_j,1),\cdots,(x_j,1)}^{m_1}, \\ \qquad\qquad \overbrace{(x_j,2),\cdots,(x_j,2)}^{m_2}, z_{j+1},\cdots,z_n]) \\ \qquad\qquad , \quad \xi = [z_1,z_2,\cdots,z_n] \in S^n , \\ u(t,\partial) = u(0,\partial) \\ u(0,\xi) = \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

をみたす。ただし

$$\Delta v(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{m\neq j} v(z_m)\, \Delta_{x_j} v(x_j,k_j) ,$$

$$\xi = [(x_1,k_1),(x_2,k_2),\cdots,(x_n,k_n)] ,$$

とする。もっと一般にしても類似のことがどこまで出来るかは上の3つの例をみるとほゞ明らかであろう。こゝまで来ると個別的に考えるより上の考察の逆の経路をたどることが有効なことが次第に明らかになる。そのことについては次の節でのべる。

§3。<u>branching semi-group</u>。いま $\mathbb{C}_0(\Xi_+)=\{f\,;\,f:\Xi_+\to\mathbb{R}^1$, 連續, $\lim_{x\to\infty}f(x)=1\}$ とし, $p(t,x,y)$ は (2.5) で与えられるものとすれば,

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} &T_t:\mathbb{C}_0(\Xi_+)\longrightarrow \mathbb{C}_0(\Xi_+),\\ &T_tf(x)=\sum_{z\in\Xi_+}p(t,x,z)f(z) \end{aligned}$$

で定まる $\{T_t\,;\,t\geq 0\}$ は $\mathbb{C}_0(\Xi_+)$ 上の線型作用素の作る半群で, しかも強連續, 非負で contraction semi-group である。このことは§2の (2.6) でのべたことに主として起因している。このような性質を持った半群を§2の他の例でさがすのには条件が足りない。いま (2.8) で, まず

$$(3.2)\qquad 0\leq k(x)<\infty,\qquad k\not\equiv 0$$

を仮定しよう。さらに

$$F[x\,;\,\xi]=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)\xi^n,\qquad 0\leq\xi\leq 1$$

とした時

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} &F[x,0]=F[x,1]=0,\\ &F[x,\xi]<0,\qquad 0<\xi<1, \end{aligned}$$

と仮定する。そうすると (2.8) で初期条件 f が $0\leq f\leq 1$ をみたせば解 $u(t,x)=u(t,x\,;\,f)$ は

$$(3.4)\qquad 0\leq u(t,x)\leq 1$$

をみたすことが言える。通常 (2.8) を semi-linear な方程式としてだけみて考える時は (3.2), (3.3) より導かれる (3.4) の性質

だけに注目することが多い。しかしわれわれが注目したいのはもう少し深い性質である。(3.4) より任意の $0\leq\lambda\leq 1$ と $0\leq f\leq 1$ に対して

$$(3.5)\qquad 0\leq u(t,x;\lambda f)\leq 1$$

が成立つ。いま形式的には

$$v_n(t,x;f)=\left(\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}v(t,x;\lambda f)\right)_{|\lambda=0}$$

が定義出来る。問題は任意の正整数 $n\geq 1$ に対して

$$(3.6)\qquad v_n(t,x;f)\geq 0$$

が成立つかどうかに深い関係がある。もしわれわれが (3.2) の他に

$$(3.7)\qquad \begin{cases} p_0(x)=0, \quad p_1(x)=-1, \quad p_n(x)\geq 0, \quad n\geq 2 \\ \displaystyle\sum_{n\geq 2} p_n(x)=1 \end{cases}$$

を仮定すれば実際 (3.6) を導くことが出来る。その事情は例えば N. Ikeda - M. Nagasawa - S. Watanabe [10] に詳しいが、いま簡単のため $k(x)\equiv 1$ としてその事情の概略をみてみよう。まず記号として、S, $\mathbb{S}$ は §2 の通りとして、

$$\langle f|g\rangle(\underline{x})=\begin{cases} 0, & \underline{x}=\partial, \\ g(x), & \underline{x}=x\in S, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k-1}f(x_j)\,g(x_k)\prod_{j=k+1}^{n}f(x_j), & \underline{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\in S^n, \\ & n\geq 2, \end{cases}$$

を導入する。また半群 $\{T_t^0;\ t\geq 0\}$ は

$$\widehat{(T_t^\circ f)_{|\mathcal{S}}}(\underline{x}) = T_t^\circ \hat{f}(\underline{x})$$

をみたし,

$$T_t^\circ f(x) = e^{-t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}} f(y)\,dy \quad , \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

で与えられるとする。こゝで $g_{|\mathcal{S}}$ は $\mathcal{S}$ 上の関数 g の $\mathcal{S}$ 上への制限を意味するとする。良く知られているように $(t,\underline{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ を固定した時 $\mathcal{S}$ 上の substochastic な測度 $T^\circ(t,\underline{x},d\underline{y})$ が存在し

$$T_t^\circ f(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} T^\circ(t,\underline{x},d\underline{y}) f(\underline{y})$$

と書ける。いま行列に関する permanent についての公式と近似定理に注意すれば $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ 上の非負な substochastic な測度 $\Phi(\underline{x};ds\,d\underline{y})$ が存在し, 任意の $\mathcal{S}$ 上の連続関数(有界)に対し

$$\int_0^t \int_{\mathcal{S}} \Phi(\underline{x};ds\,d\underline{y})\hat{f}(\underline{y}) = \int_0^t \left\langle T_s^\circ f \,\Big|\, \int_{\mathcal{S}} T^\circ(s,\cdot,dz) \sum_{m \geq 2} p_m(z) f(z)^m \right\rangle (\underline{x})\,ds$$

が成りたつ。これを用いると (2.10) と同筆な積分方程式

$$(3.8) \qquad u(t,\underline{x}) = T_t^\circ \hat{f}(\underline{x}) + \int_0^t \int_{\mathcal{S}} \Phi(\underline{x};ds\,d\underline{y})\,u(t-s,\underline{y}) \quad , \quad (t,\underline{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$$

が得られる。ところがこれは線型であるので通常の場合同様にノイマン級数式に解が得られる。実際つぎのようにすればよい。

$$\nu_0(\xi;t,d\eta)=\delta_{\{\xi\}}(d\eta),\quad \nu_1(\xi;t,d\eta)=\int_0^t \Phi(\xi;ds\,d\eta)$$

$$\nu_n(\xi;t,d\eta)=\int_0^t\int_S \Phi(\xi;ds\,d\zeta)\,\nu_{n-1}(\zeta;t-s,d\eta)$$

$$\int_0^t \Phi^{(n)}(\xi;ds\,d\eta)=\nu_n(\xi;t,d\eta)$$

$$T^{(n)}(t,\xi,d\eta)=\int_S\int_0^t \Phi^{(n)}(\xi;ds\,d\zeta)\,T^0(t-s,\zeta,d\eta)$$

として逐次定義して行けば (3.8) の解は

$$(3.9)\qquad T(t,\xi,d\eta)=\sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)}(t,\xi,d\eta)$$

$$u(t,\xi)=\int_S T(t,\xi,d\eta)\hat{f}(\eta)\qquad (\equiv T_t\hat{f}(\xi))$$

として得られる。しかも ν_n, $\Phi^{(n)}$, $T(t,\xi,d\eta)$ の定義より

$$(3.10)\qquad u(t,\xi)=T_t\hat{f}(\xi)=\widehat{(T_t f)_{|S}}(\xi)$$

を示すことが出来る。このことは当然期待出来ることだが，主として (3.7) から，任意に固定した $(t,\xi)\in\mathbb{R}_+\times S$ に対して $T(t,\xi,d\eta)$ は S 上の測度で，非負でさらに

$$T(t,\xi,S)\le 1$$

が示される。再び (2.6) に相当する性質が示されたことになる。(3.7) の条件なしにはこれらの性質は期待出来ないことは，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u^2(u-1)\qquad,\qquad x\in\mathbb{R}^1,$$

としらべると形式的に $\mathfrak{A}$, T_t を定義することは出来るが，(3.6) の性質がこわれて，$T(t, \xi, d\eta)$ は非負の性質を持たなくなることからわかる。

これまでの2つの例をふくめて一般的事情をはっきりさせるために，特定の空間でなく一般に compact な距離空間 $\mathcal{S}$ をとって来る。（具体的な例では必要ならば適当な方法で，与えられた空間を compact 化しておく。）。$\mathcal{S}$ から出発して $\mathcal{S}^n$, S の作り方はこれまでと同じにする。さらに

$$\hat{S} = S \cup \{\Delta\}$$

は S の一点 compact 化とし，S 上の関数 $\hat{f}$ も

$$\hat{f}(\Delta) = 0$$

として $\hat{S}$ 上に拡張しておく。$\mathcal{S}$ および $\hat{S}$ 上の連続関数全体の作る Banach 空間を $\mathbb{C}(\mathcal{S})$, $\mathbb{C}(\hat{S})$ の記号で表わす。また $\mathbb{C}_0(\hat{S}) = \{ f ; f \in \mathbb{C}(\hat{S}), f(\Delta) = 0 \}$ とする。ここで非負, contraction, 線型作用素

$$T_t : \mathbb{C}_0(\hat{S}) \longrightarrow \mathbb{C}_0(\hat{S})$$

の作る強連續な semi-group $\{ T_t ; t \geq 0 \}$ を考える。この場合良く知られているように，各 $(t, \xi) \in \mathbb{R}_+ \times \hat{S}$ に対して，$\hat{S}$ 上の substochastic な測度 $T(t, \xi, d\eta)$ が存在し，

$$(3.11) \qquad T_t f(\xi) = \int_{\hat{S}} T(t, \xi, d\eta) f(\eta) , \qquad f \in \mathbb{C}_0(\hat{S}),$$

と書ける。さらに，任意の $f \in \mathbb{C}(S)$, $0 \leq f < 1$ に対して

$$(3.12) \qquad T_t\hat{f}(\underline{x}) = \widehat{(T_t\hat{f})_{|S}}(\underline{x}), \qquad \underline{x} \in \hat{S},$$

が成りたつならば，上に与えた半群 $\{T_t \,;\, t \geq 0\}$ は分枝半群 (branching semi-group) と呼ばれる。そうすると§2の方程式に関連して構成した (3.1) と (3.10) の半群は分枝半群の特別の場合になる。

一般に compact な距離空間（必要に応じてもう少し一般化出来る） E があるとし，その上の連続関数全体の作る Banach 空間 $\mathbb{C}(E)$ と contraction の性質を持った非負な線型作用素

$$T_t : \mathbb{C}(E) \longrightarrow \mathbb{C}(E)$$

の作る強連続な semi-group $\{T_t \,;\, t \geq 0\}$ を考える。この時，$(t, a) \in \mathbb{R}_+ \times E$ に対して E 上の substochastic な測度，$T(t, a, db)$ が存在し

$$T_t f(a) = \int_E T(t, a, db) f(b), \qquad f \in \mathbb{C}(E)$$

と書ける。さらに $w : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ なる第1種不連続で右連続な関数全体の作る空間を W とし，それのすべての cylinder set をふくむ最小の σ-algebra を $\mathbb{B}$ とする。ここで W の cylinder set とは次のように与えられる集合のことである。

任意の n と任意の $0 \leq t_1 < t_1 < \cdots < t_n$ なる組 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$、と任意の E の Borel subset $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して

$$G = \{ w ;\ w \in \overline{W},\ \ w(t_1) \in A_1, \cdots, w(t_n) \in A_n \} \tag{3.13}$$

。

上の semi-group $\{T_t ; t \geq 0\}$ があれば $\{\overline{W}, \mathbb{B}\}$ 上の確率測度の系 $\{P_a ; a \in E\}$ が存在しつぎの関係をみたす。(3.13) の形の任意の cylinder set に対して

$$P_a[G] = \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} T(t, a, db_1) T(t_2 - t_1, b_1, db_2) \cdots T(t_n - t_{n-1}, b_{n-1}, db_n)$$

。

こうして出来る組 $\{\overline{W}, \mathbb{B}, P_a ; a \in E\}$ を state space E を持つ Markov 過程とよび、$T(t, a, db)$ をその推移確率とよぶ。

ところで分枝半群 $\{T_t ; t \geq 0\}$ がある時は任意の $f \in \mathbb{C}(\hat{S})$ に対して $T_t f(\Delta) = f(\Delta)$ として $\mathbb{C}(\hat{S})$ 上に拡張出来る。そうすると上に説明したように state space $\hat{S}$ を持つ Markov 過程が存在する。この Markov 過程 $\{\overline{W}, \mathbb{B}, P_{\underline{x}} ; \underline{x} \in \hat{S}\}$ を分枝半群 $\{T_t ; t \geq 0\}$ に対応する分枝 Markov 過程とよぶ。この用語を用いると方程式 (2.1) または条件 (3.2), (3.7) をみたす方程式 (2.8) に対応して分枝 Markov 過程 $\{W, \mathbb{B}, P_{\underline{x}} ; \underline{x} \in \hat{S}\}$ がそれぞれ作られたことになっている。しかもそれらの解 $u(t, x)$ はその分枝 Markov 過程の推移確率 $T(t, \underline{x}, d\underline{y})$ より

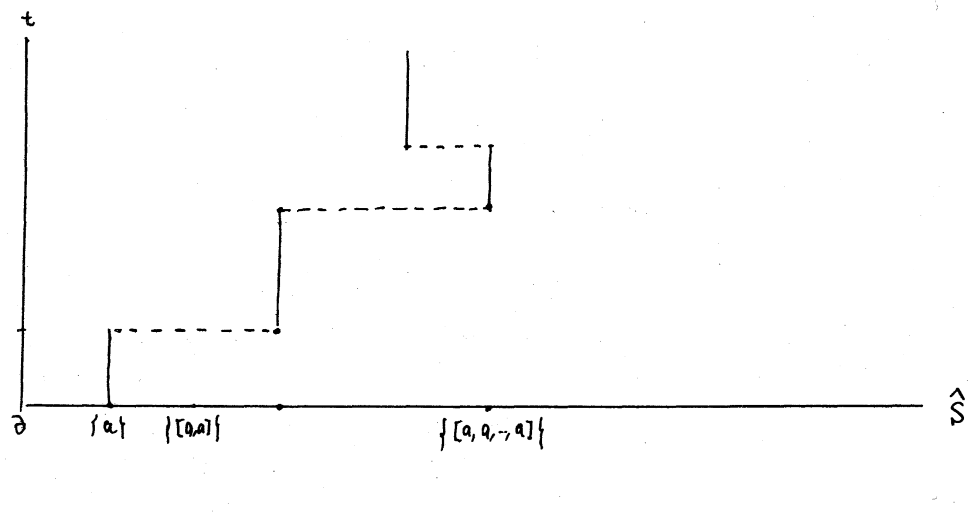
$$(3.14)\qquad u(t,x)=\int_{\hat{S}} T(t,x,d\xi)\,\hat{f}(\xi),\qquad f\in C(S),\ 0\le f<1,$$

の形で作られることがわかる。逆に言うとそれらの方程式は分枝Markov過程より(3.14)の形で解が構成される非線型方程式のクラスに属しているということになる。とにかく，われわれは確率過程のクラスに対応して非線型方程式の1つのクラスを設定することが出来たことになる。これは線型作用素の作る半群で言えば分枝半群のクラスに相当している。

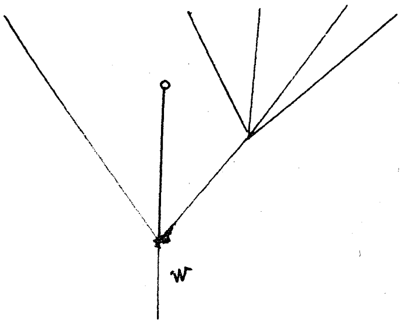
確率論的な話にはあまり深入りしない方針であるが，なぜ分枝Markov過程の用語が用いられるかだけ簡単にのべることにしよう。Sが一点だけの集合$\{a\}$の時は$\hat{S}$は

$$\{\partial\},\ \{a\},\ \{[a,a]\},\ \text{------},\ \{[\underbrace{a,a,\cdots,a}_{n}]\},\ \text{----},\ \Delta$$

なる点の集まりである。Wの元wは$w(0)=a$ならば例えば下の図のような形をしている。したがってtにおける$w(t)$



は下の tree の高さ t の枝の数で表わされる。すなわち W の



元 w は tree と同一視出来る。ところで tree は粒子が分裂を繰返して増加して行く状態を記述していると考えられる。上の同一視で分枝 Markov 過程の P_x, $x \in \hat{S}$ は tree の集りの上に定義されていると考えられるので，分枝 Markov 過程は random なある法則に従って分裂して行く粒子の集まりについての数学的模型と考えられる。一般の場合も類似の説明が出来，S^n は粒子が n 個になった時の粒子の軌跡がえがかれるべき空間である。特に $\{\partial\}$ は粒子がなくなってしまう所で，Δ は粒子の数が無限大になったことを表わす集合になっている。もちろんこのような説明はあくまで数学的事実と応用上の現象をつなぐ直観的な話にすぎないが，分枝 Markov 過程についての数学としての研究を進める時の筋道の理解に非常に役に立つことが多いことは注意するに値することだろう。

ここで分枝 Markov 過程は分裂現象の模型とのべたが，形式的に統一して来たので，実際は分裂は全くなく吸収のみの場合をふくんでいる。たとえば $S = \{a\}$ として，$S = Z_+$ の場合を考えると，

$$\begin{cases} \dfrac{du(t,n)}{dt} = n\,(u(t,n-1) - u(t,n)) \\ u(0,n) = \lambda^n \end{cases}$$

が考えられるが，その解は

$$u(t,n) = \left[(1-e^{-t}) + \lambda e^{-t} \right]^n$$

であるので，

$$T_t f(n) = \sum_{k \geq 0} T(t,n,k) f(k), \qquad f \in \mathbb{C}_0(\hat{S}),$$

$$T(t,n,k) = \begin{cases} \binom{n}{k} (1-e^{-t})^{n-k} e^{-kt}, & k \leq n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

なる半群を持った分枝Markov過程が存在する。上の推移確率の形から，

$$P_n[\{w;\ w(t) \geq n+1 \text{ なる } t \text{ が存在する}\}] = 0$$

が言える。従って先に行った現象的説明にならえば粒子の数は増加することはない。それのみならずMarkov過程についての基礎的な事実を用いると，粒子の数は逐次1つづつ減って行くことが容易に示される。

§4. <u>semi-linear な方程式の線型化。</u>----(II)。 本質的には§3で取扱った場合と同じであるが，もう少し強い条件になっている multiplicative な性質に対応する非線型方程式のクラスがある。§2の方程式と似ているが，例として初期値問題

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\psi(t)}{dt} = -\dfrac{\beta}{2}\psi(t)^2 + \alpha\psi(t) \\ \psi(0) = \lambda \end{cases}$$

を考えてみよう。ここで $0<\beta<\infty$ とする。その解は

$$\psi(t,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{\alpha t}\left(1-\dfrac{\beta\lambda}{2\alpha}(1-e^{\alpha t})\right)^{-1}, & \alpha \neq 0, \\ \lambda\dfrac{1}{1+\frac{\beta t}{2}\lambda}, & \alpha = 0, \end{cases}$$

で与えられる。いま

$$(4.2)\qquad u(t,x) \equiv u(t,x;\lambda) = e^{-x\psi(t,\lambda)}, \qquad x\in\mathbb{R}_+,$$

とおけば $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 上の関数が得られ，それは

$$(4.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = x\left\{\dfrac{\beta}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + \alpha\dfrac{\partial}{\partial x}u(t,x)\right\}, \\ u(0,x) = e^{-\lambda x}, \end{cases} \qquad x\in\mathbb{R}_+$$

をみたす。これは今回も線型の方程式である。ここで(4.2)の性質は(2.3)に相当するが，前者は $\mathbb{R}_+$ での条件なのに后者は Ξ_+ のみでの条件になっている。それに応じて(2.4)は $\mathbb{R}_+\times\Xi_+$ 上の方程式であるのに対し(4.3)は $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 上の方程式になっている。Markov 過程論で良く知られているよう

に (4.3) は一次元拡散過程に対応する発展方程式である。(K. Ito - H.P. McKean [12] 参照)。

もう少し一般な例としてはつぎのようなものが得られる。$]0,\infty[$ 上の非負な測度 $n(d\eta)$ で

$$\int_0^\infty \frac{\eta^2}{1+\eta^2} n(d\eta) < \infty$$

を考え、関数 $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^1$ を

$$h(\xi) = c_0 + c_1\xi - c_2\xi^2 - \int_0^\infty \left(e^{-\xi\eta} - 1 + \frac{\xi\eta}{1+\eta} \right) n(d\eta)$$

で定める。ここで c_i は定数で, $c_0,\ c_2 \geqq 0$ である。このような h を1つ定めて初期値問題

$$(4.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta \psi(t,x) + h(\psi(t,x)) , & \\ \psi(0,x) = f(x) , & x \in \mathbb{R}^d , \end{cases}$$

を考える。これは (4.1) の一般化であるが, (4.3) に相当するものはつぎのようにして得られる。$\mathbb{R}^d$ の一点 compact 化を S とし, その上の非負な Radon 測度の作る空間を $\mathfrak{S}$ とする。この $\mathfrak{S}$ には標準的な方法で位相が定義出来, Markov 過程の議論を進めるには充分な性質を持っている。現在は形式的な話を重点にしているのでその点にはふれず, 必要なことは成立しているとして前に進む。$\mathfrak{S}$ の一点 compact 化を $\hat{\mathfrak{S}}$ とする。(2.9) にならって, S 上の関数 f から $\hat{\mathfrak{S}}$ 上の関数を

$$\varphi_f(\mu) = \begin{cases} \exp\left[-\int_S f(x)\mu(dx)\right], & \mu\in\mathfrak{S}, \\ 0, & \mu=\Delta, \end{cases}$$

で定める。ただし Δ は $\mathfrak{S}$ の compact 化で附加された点とする。$\hat{\mathfrak{S}}$ 上の連続関数の作る Banach 空間を $\mathbb{C}(\hat{\mathfrak{S}})$ で表わし，$\mathbb{C}_0(\hat{\mathfrak{S}}) = \{F;\ F\in\mathbb{C}(\hat{\mathfrak{S}}),\ F(\Delta)=0\}$ とする。いま $0<f<\infty$, $f\in\mathbb{C}(S)$ をとって来て，それに対応する (4.4) の解 ψ_t から

$$T_t[\varphi_f](\mu) = \varphi_{\psi_t}(\mu)$$

として $\{T_t;\ t\geq 0\}$ を作れば $T_t[T_s[\varphi_f]](\mu) = T_{t+s}[\varphi_f](\mu)$ をみたし，$\mathbb{C}_0(\hat{\mathfrak{S}})$ 上の非負，強連続な contraction semi-group に自然な形で拡大される。（S. Watanabe [30] 参照）。このことは確率論では良く知られた無限分解可能な確率分布のラプラス変換の性質にもとづいて示されることだがここでは事実を認めて先に進むことにする。こうして出来る半群の生成作用素を A とすれば，compact support を持つ 2 回連続的微分可能な f で $f>0$ なるものに対し

$$A\varphi_f(\mu) = -\varphi_f(\mu)\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{2}\Delta f + k(f)\right)(x)\mu(dx)$$

となることに注意すれば，そのような f に対し

$$u(t,\mu) = T_t[\varphi_f](\mu)$$

とおけば

$$
(4.5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -u(t,\mu)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\left(\tfrac{1}{2}\Delta\psi(t,x) + h(\psi(t,x))\right)\mu(dx) \\ u(0,\mu) = \varphi_f(\mu) \end{cases}
$$

が成りたつ。

このように (4.1) と (4.4) に対しては §3 と非常に良く似たことが成りたっていることがわかって来たので、つぎのような一般化が自然に導かれる。非負な線型作用素

$$
T_t : \mathbb{C}_0(\hat{G}) \longrightarrow \mathbb{C}_0(\hat{G}),
$$

の作る強連続な contraction semi-group $\{T_t ; t \geq 0\}$ で、

$$
(4.6)\qquad T_t[\varphi_f](\mu) = \varphi_{T_t[\varphi_f]|_\delta}(\mu), \qquad 0 < f < \infty
$$

をみたすものを continuous branching semi-group と呼ぶ。ただし $F|_\delta(x) = F(\delta_{\{x\}})$ とする。§3 でのべたような Markov 過程の一般論より continuous branching semi-group に対応して、Markov 過程で $\hat{G}$ を state space とする $\{W, \mathbb{B}, P_\mu, \mu \in \hat{G}\}$ が存在するがそれを continuous branching Markov process とよぶ。こうして上にのべた例の逆をたどれば continuous branching Markov process がある時 $u(t,x) = T_t[\varphi_f]|_\delta(x)$ のみたすものとして非線型方程式の新たなクラスが得られることになる。これが §3 の条件を強めたものであることを知るには

写像 ν

$$\nu:\quad S \ni \underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \delta_{\{x_i\}} \in \mathfrak{G}$$

を考えるとよい。$\nu(S)$ は離散測度の作る $\mathfrak{G}$ の部分集合で和に関して閉じている。一方 (4.6) より

$$T_t[\varphi_f](\mu_1+\mu_2) = T_t[\varphi_f](\mu_1)\, T_t[\varphi_f](\mu_2) \tag{4.7}$$

がみたされるが，これを $\nu(S)$ に限って考えると §3 で考えた場合に相当している。

$\mathfrak{G}$ の部分集合で和に関して閉じているクラスをとって来れば (4.7) の性質が定義可能になる。$\mathcal{S}$ とそのようなクラスのとり方を工夫することによってまた別の multiplicative な性質が定義出来る。そしてそれに応じて非線型方程式の1つのクラスが定まることになる。そのような例としては例えば T. Fujimagari – M. Motoo [4] の Cascade semi-group 及び cascade process の議論がある。

なお (4.5) は測度の空間の方程式でわかりにくいが，$\mathcal{S}$ が有限個の点からなる時はこの節の初めの例でみたように有限次元の空間の方程式になる。

§5。 Boltzmann 型の方程式。 関数空間における積のとり方に工夫をすれば，それに応じた multiplicative な性質ごとに非線型方程式のクラスがきまって来ることをすでにのべた。最近 H. Tanaka [27] は Boltzmann 型の方程式に関連した multiplicative な性質を導入し，その方程式の Markov 過程と関連した取扱いを行った。その概略をのべる前に簡単な例の話から始めよう。いま

$$\ell^{(1)}(\mathbb{Z}_+) = \{\xi ;\ \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} |\xi(n)| < \infty,\ \xi \in \mathbb{C}(\hat{\mathbb{Z}}_+)\}$$

とし，ここに convolution $\otimes$ を定義しよう。すなわち $\xi, \eta \in \ell^{(1)}(\mathbb{Z}_+)$ に対して

$$\xi\otimes\eta(n) = \sum_{i=0}^{n} \xi(i)\eta(n-i) \tag{5.1}$$

とおく。一方 state space $\hat{\mathbb{Z}}_+$ を持つ分枝 Markov 過程 $\{W, \mathbb{B}, P_x ; x\in\hat{\mathbb{Z}}_+\}$ を考え，それに対応する半群を $\{T_t ; t\geq 0\}$ としよう。それから T_t の dual な線型作用素 H_t を

$$\sum_{x\in\hat{\mathbb{Z}}_+} H_t f(x)\, g(x) = \sum_{x\in\hat{\mathbb{Z}}_+} f(x)\, T_t g(x), \qquad f\in\ell^{(1)}(\mathbb{Z}_+),\ g\in\mathbb{C}(\hat{\mathbb{Z}}_+) \tag{5.2}$$

で定める。$\{T_t ; t\geq 0\}$ の性質から $\{H_t ; t\geq 0\}$ は半群を作っている。分枝 Markov 過程の一般論より $\{T_t ; t\geq 0\}$ の生成作用素 A はつぎのように表わされる。

$$Af(n) = n\Big\{\sum_{\substack{k\neq n\\ k\geq n-1}} p_{k-n+1} f(k) - f(n)\Big\}, \quad n\geq 1, \quad Af(0) = 0,$$

ただし，

$$p_k \geqq 0, \quad p_1 = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

をみたす。また $\hat{Z}_+$ 上で考える時は $Af(\infty) = 0$ とする。以下話を簡単にするために

$$p_0 = 0$$

と仮定することにする。ここで $\{H_t ; t \geqq 0\}$ の生成作用素を $\mathfrak{G}$ とすれば形式的には

$$\sum_{x \in \hat{Z}_+} \mathfrak{G} f(x)\, g(x) = \sum_{x \in \hat{Z}_+} f(x)\, A g(x)$$

が成りたつので，f と g を意味のあるクラスの中でとれば

$$(5.3) \qquad \mathfrak{G} f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ -f(x) & x = 1, \\ \sum_{n=1}^{x-1} n\, p_{x-n+1}\, f(n) - x f(x), & x \neq 1,\ x \in Z_+, \\ 0, & x = \infty, \end{cases}$$

であることがわかる。いま $k \leqq x-1$ に対して

$$g(x, k) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ \dfrac{k}{x}\, p_{x-k+1}, & x \geqq 1, \quad x \in Z_+, \end{cases}$$

とおけば $g(x, k) \geqq 0$, $\sum_{k=1}^{x-1} g(x, k) \leqq 1$ が言えるので，$\{H_t ; t \geqq 0\}$ は $\mathbb{C}_0(\hat{Z}_+)$ 上の強連続で非負な contraction semi-group と考えられ，§3 でのべたように Markov 過程

が対応している。しかも $\{H_t ; t \geq 0\}$ は

$$(5.4) \qquad H_t\, \xi \otimes \eta = H_t \xi \otimes H_t \eta$$

なる multiplicative な性質を持っている。このことは convolution の generating function はそれぞれの generating function の積という，ラプラス変換の性質の反映に他ならない。実際任意の $0<f<1$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_t(\xi\otimes\eta)(n)\,\hat{f}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi\otimes\eta(n)\ \widehat{T_t\hat{f}(1)}(n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \xi(n)\ \widehat{T_t\hat{f}(1)}(n) \sum_{m=0}^{\infty} \eta(m)\ \widehat{T_t\hat{f}(1)}(m)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} H_t\xi(n)\,\hat{f}(n) \sum_{m=0}^{\infty} H_t\eta(m)\,\hat{f}(m)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (H_t\xi)\otimes(H_t\eta)(n)\,\hat{f}(n) .$$

よって (5.4) が成りたつ。それのみならずこの時は (5.4) と branching の性質は同等である。というのは (5.4) をみたす $\{H_t ; t\geq 0\}$ があった時 (5.2) で $\{T_t ; t \geq 0\}$ を定義すれば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi\otimes\eta(n)\ T_t\hat{f}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} H_t(\xi\otimes\eta)(n)\,\hat{f}(n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (H_t\xi)\otimes(H_t\eta)(n)\,\hat{f}(n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \xi(n)\ T_t\hat{f}(n) \sum_{m=0}^{\infty} \eta(m)\ T_t\hat{f}(m)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\geq 0}} \xi(i)\,\eta(j)\ T_t\hat{f}(i)\ T_t\hat{f}(j)$$

がなりたつ。$0<g<1$ をとって $\xi(i)=\eta(i)=g^i$ ととれば

$$(5.5) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) g^n T_t\hat{f}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} T_t\hat{f}(i) T_t\hat{f}(j)$$

がなりたつ。(5.5) を g に関し微分して

$$(5.6) \qquad (n+1) T_t\hat{f}(n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} T_t\hat{f}(i) T_t\hat{f}(j) \quad , \qquad n \in \mathbb{Z}_+ ,$$

を得る。(5.6) で $n=0$ として $T_t\hat{f}(0) = 0$ or 1 を得るが $T_t\hat{f}(0) = 1$ としてよいので、順次決めて行くと (5.6) より

$$T_t\hat{f}(n) = (T_t\hat{f}(1))^n$$

を得る。すなわち $\{T_t ; t \geq 0\}$ が branching semi-group になっている。したがって方程式

$$(5.7) \qquad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \displaystyle\sum_{n \geq 2} p_n (u(t))^n - u(t) \\ u(0) = f \end{cases}$$

は $\{H_t ; t \geq 0\}$ に対応していると考えてもよい。いま (5.7) の解を $u(t)$ とし、その他に

$$\xi_{(n)} = (0, 0, \cdots, 0, \overset{\overset{n}{\downarrow}}{\xi_n}, 0, \cdots\cdots)$$

を考えると、

$$(5.8) \qquad \widehat{u(t)}(n)\, \xi_n = \sum_{m=n}^{\infty} \hat{f}(m)\, H_t \xi_{(n)}(m)$$

なる式を得る。これは $u(t) = T_t\hat{f}(1)$ と H_t の定義を用いた簡単な変形から得られる。なお定義より明らかなように、

(5.3) および (5.8) の式は考えている $\hat{\Xi}_+$ 上の分枝 Markov 過程に対応する forward equation に関連している。(N. Ikeda–M. Nagasawa – S. Watanabe [9], III, §4.5, Example 4.3 参照)。

H. Tanaka [27] は branching の形ではなく、上の $\{H_t ; t \geq 0\}$ のみたす (5.4) の multiplicative の性質に注目し、S が一般の場合もそれに相当するものを導き Boltzmann 型の方程式に応用することを考えている。ここでは話を非常に簡単な場合に限り、しかも $S = \{-1, 1\}$ でつぎのような方程式について H. Tanaka の考えの概略を説明したい：

$$(5.9) \qquad \frac{du(t,x)}{dt} = \sum_{y \in S} \Big\{ \sum_{z \in S} \pi(y, z ; x) u(t, z) - \delta(x, y) \Big\} u(t, y) \,。$$

ここで

$$\pi(\xi, \eta ; 1) = \begin{cases} 1, & \xi = \eta \\ 0, & \xi \neq \eta \end{cases} , \qquad \pi(\xi, \eta ; 0) = \begin{cases} 1, & \xi \neq \eta , \\ 0, & \xi = \eta . \end{cases}$$

実は (5.9) で $0 \leq u(t, x) \leq 1$, $\sum_{x \in S} u(t, x) = 1$ なる解を考える。そうすると (5.9) は

$$\frac{du(t,x)}{dt} = \begin{cases} u(t,-1)^2 + u(t,1)^2 - u(t,1), & x = 1 \\ 2u(t,1)\,u(t,-1) - u(t,-1), & x = -1 \end{cases}$$

となり H. P. McKean [19] が導入した 2-state model of Maxwellian gas の方程式になる。

$S^{(n)}$ は S の n-fold product space とし、direct sum の位

間 $\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)}$ を考える。Φ_k は $S^{(k)}$ 上の有界関数の空間で、Φ は Ω 上の関数の空間で $S^{(k)}$ への制限が Φ_k に属するような元からなるものとする。

$$\Phi \ni \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots)$$

なる記号を用いる。その時

$$\|\varphi\|_k = \sum_{j \le k} \|\varphi_j\|, \qquad \|\varphi_j\| = \sup_{x \in S^{(j)}} |\varphi_j(x)|$$

なる semi-norm を考えると Φ は Fréchet space になる。$\mathcal{M}$ は S 上の確率測度の全体とする。Ξ_k は $\mathcal{M}$ 上の関数で

(5.10) $$\xi(f) = \int_{S^{(k)}} f^k(dx)\, \varphi_k(x), \qquad \varphi_k \in \Phi_k,$$

と表わされるものの全体とする。ここで f^k は $f \in \mathcal{M}$ の k 重の直積測度とする。上の $\xi(f)$ の norm を (5.10) で特に φ_k を symmetric にとり、それに対し $\|\xi\|_k = \|\varphi_k\|$ とすれば Ξ_k は Banach space になる。Ξ は $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$, $\xi_j \in \Xi_j$ の作る空間とする。$\sigma : \Phi \longrightarrow \Xi$ をつぎの形で定義する。

$$(\sigma\varphi)_k(f) = \int_{S^{(k)}} f^k(dx)\, \varphi_k(x), \qquad \varphi \in \Phi.$$

次に Ξ の元に積 $\xi \otimes \eta$ を

(5.11) $$(\xi \otimes \eta)_k = \sum_{i+j=k} \xi_i \eta_j$$

で定義する。ここで、

$$\mathfrak{G} : \Phi \to \Phi$$

を

$$(5.12) \quad (\mathfrak{G}\varphi)_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \begin{cases} -\varphi(x_1), & k = 1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{z \in S} \pi(x_i, x_k; z)\, \varphi_{k-1}(x_1, \cdots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \cdots, x_{k-1}) - k\varphi_k(x_1, x_2, \cdots, x_k), & k \geq 2 \end{cases}$$

で定義する。また $\mathfrak{A} : \Xi \to \Xi$ は

$$\mathfrak{A}\sigma\varphi = \sigma\mathfrak{G}\varphi$$

で定義する。いま $\mathbb{1} = (1, 1, \cdots)$ なる恒等的に 1 の値をとる関数に $\mathfrak{G}$ をほどこすと $\mathfrak{G}\mathbb{1} \leq 0$ になることに注意すると、$\mathfrak{G}$ に対応して自然な意味で minimal な Φ 上の非負の積型作用素 H_t の強連続な contraction semi-group $\{H_t ; t \geq 0\}$ が存在する。少し注意すればこれに対し Markov 過程 $\{W, \mathfrak{B}, P_{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \mathbf{Q}\}$ が存在することがわかる。その推移確率を $P(t, \mathbf{x}, \cdot)$ と書くことにしよう。上に定義した $\mathfrak{A}$ は derivation になっている。すなわち、$\xi, \eta \in \Xi$ に対して

$$(5.13) \qquad \mathfrak{A}(\xi \otimes \eta) = (\mathfrak{A}\xi) \otimes \eta + \xi \otimes (\mathfrak{A}\eta)$$

をみたす。このことは実際つぎのようにして示される。一般に $\Xi \ni \xi$ に対して (5.10) の関係にある Φ の元を $\varphi^{(\xi)}$ と書くことにしよう。(symmetric にとれば一意的に決まる)。そうすると定義から

$$\varphi^{(\xi \otimes \eta)}_k = \sum_{p+q=k} \varphi^{(\xi)}_p \varphi^{(\eta)}_q \quad (\text{またはその対称化})$$

となる。そうすると、$k=1$ の時は自明であるので、$k\geqq 2$

として、

$$(\alpha\xi\otimes\eta)_k(f)+(\xi\otimes\alpha\eta)_k(f)$$

$$=\sum_{x_1,\dots,x_k\in S} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_k)\sum_{p+q=k}\Big\{\varphi_p^{(\alpha\xi)}(x_1,\dots,x_p)\,\varphi_q^{(\eta)}(x_{p+1},\dots,x_k)$$

$$+\varphi_p^{(\xi)}(x_1,\dots,x_p)\,\varphi_q^{(\alpha\eta)}(x_{p+1},\dots,x_k)\Big\}$$

$$=\sum_{x_1,\dots,x_k\in S} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_k)\sum_{p+q=k}\Big\{\mathfrak{G}\varphi_p^{(\xi)}(x_1,\dots,x_p)\,\varphi_q^{(\eta)}(x_{p+1},\dots,x_k)$$

$$+\varphi_p^{(\xi)}(x_1,\dots,x_p)\,\mathfrak{G}\varphi_q^{(\eta)}(x_{p+1},\dots,x_k)\Big\}$$

$$=\sum_{x_1,\dots,x_k\in S} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_k)\sum_{p+q=k}\Big\{-k\,\varphi_p^{(\xi)}(x_1,\dots,x_p)\,\varphi_q^{(\eta)}(x_{p+1},\dots,x_k)$$

$$+\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{z\in S}\pi(x_i,x_p;z)\,\varphi_{p-1}^{(\xi)}(x_1,\dots,x_{i-1},z,x_{i+1},\dots,x_{p-1})\,\varphi_q^{(\eta)}(x_{p+1},\dots,x_k)$$

$$+\sum_{i=p+1}^{k-1}\sum_{z\in S}\pi(x_i,x_k;z)\,\varphi_p^{(\xi)}(x_1,\dots,x_p)\,\varphi_{q-1}^{(\eta)}(x_{p+1},\dots,x_{i-1},z,x_{i+1},\dots,x_{k-1})\Big\}$$

$$=\sum_{x_1,\dots,x_k\in S} f(x_1)\cdots f(x_k)\Big\{\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{z\in S}\pi(x_i,x_k;z)\,\varphi_{k-1}^{(\xi\otimes\eta)}(x_1,\dots,x_{i-1},z,x_{i+1},\dots,x_{k-1})$$

$$-k\,\varphi_k^{(\xi\otimes\eta)}(x_1,x_2,\dots,x_k)\Big\}$$

$$=\sum_{x_1,\dots,x_k\in S} f(x_1)\cdots f(x_k)\,(\mathfrak{G}\varphi^{(\xi\otimes\eta)})_k(x_1,x_2,\dots,x_k)\,。$$

よって (5.13) が示されたことになる。

いま $\mathfrak{U}$ に対応する semi-group を $\{S_t\,;\,t\geq 0\}$ とすれば定義より

$$S_t\,\sigma\,\varphi = \sigma(H_t\,\varphi)$$

となるが，(5.13) より S_t は multiplicative な性質，すなわち

(5.14) $$S_t(\xi\otimes\eta) = S_t\xi\otimes S_t\eta$$

をみたす。これは (5.4) の性質の自然な拡張になっている。

このことを用いると方程式 (5.9) の解の性質をみるに有効な次の表現式を得る。$f\in\mathcal{M}$ を初期条件とする (5.9) の解を $u(t,x)$ とする。その時任意の $\varphi\in\Phi_k$ に対して

(5.15) $$\sum_{\underline{x}\in S^{(k)}} u^k(t,\underline{x})\varphi(\underline{x}) = \sum_{m=k}^{\infty}\ \sum_{\underline{x}\in S^{(m)}} f^m(\underline{x})(H_t\,\boldsymbol{\varphi})_m(\underline{x})$$

ただし，ここで $\boldsymbol{\varphi} = (0,\cdots,0,\overset{k}{\varphi},0\cdots)$ とする。この証明はここでは省略するが，H. Tanaka [27]，§3 の Theorem 1 の証明の step 3 にあり，(5.14) を用いて示される。

もっと一般の S の場合に (5.14) をみたす semi-group を研究すること，及びその結果の非線型方程式への応用については H. Tanaka [27] 参照。とにかく，ここでも (5.14) の性質を通して非線型方程式のあるクラスが (5.15) の表現を持つものとして定まって来る。

終りに $\hat{S}_+$ 上の branching semi-group に対する (5.4) の性

質はそれの固有値問題を考えるのに利用されていることを注意しておく。その時は前の仮定と違って $0<p_0<1$ としておいた方がよいが、しかも

$$e = \lim_{t\uparrow\infty} T_t \hat{1}$$

は常に存在するが、$0<e(1)<1$ と仮定する。明らかに $e(n) = \hat{e}_\delta(n)$ をみたす。$0 < c \equiv \frac{1}{e(1)}\sum_{n\neq 1} p_n e(n) - 1 < \infty$ も仮定すると、

$$H_t\varphi = e^{-ct}\varphi$$

なる Ξ_T 上の関数 φ が存在する。(5.4) より

$$H_t \underbrace{\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi}_{n} = e^{-nct}\underbrace{\varphi\otimes\cdots\otimes\varphi}_{n}$$

となる。このことは $T_t^* f = \frac{1}{\hat{e}} T_t[\hat{e} f]$ で定義される新たな branching semi-group の固有値問題に非常に有効に使われる。これらについては S. Karlin – J. McGregor [15], Y. Ogura [24], N. Ikeda – M. Nagasawa – S. Watanabe [9] 補足 II, 2 等参照。

また (5.4) の性質は convolution を $\mathbb{R}_+$ の場合に移すことによって、その拡張が continuous branching semi-group で $S=\{a\}$ の場合に成りたつこともまた明らかである。たとえばこの事実は Y. Ogura [24] の Theorem 3.1, Lemma 2.1, 2.2 等々で利用されている。この節については田中洋氏との討論に負う所が多い。

§6。<u>creationについて</u>。 すでに§3でsemi-linearな方程式の線型化の方法を1つ示したが，直接的にMarkov過程と対応するには(3.2)，(3.7)のような性格の条件が必要であった。これらの条件のいくつかがこわれていたらどうなるかは当然問題になる。たとえば§2で考えた

$$(6.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = u(t)^2 - u(t) \\ u(0) = \lambda \end{cases}$$

のかわりに

$$(6.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = u(t)^2 \\ u(0) = \lambda \end{cases}$$

を考えたらどうなるか。いま $u(t)$ を(6.2)の解として，$S=\{1\}\times\mathbb{Z}_+$ とした時の $\hat{S}$ 上の関数

$$u(t, [(1,k_1), \cdots, (1,k_n)]) = 2^{k_1+\cdots+k_n}(u(t))^n$$

を考えれば(6.2)は

$$(6.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,(1,0))}{\partial t} = 2\left[\frac{1}{2}u(t,[(1,0),(1,0)]) + \frac{1}{2}u(t,(1,1)) - u(t,(1,0))\right] \\ u(0,(1,0)) = \lambda \end{cases}$$

と書きかえられる。これならば§3の方法で $\mathbb{C}(\hat{S})$ 上の非負な線型作用素の強連続なcontraction semi-group $\{T_t; t\geq 0\}$ を対応させることが出来る。ただしその作用素が正の測度による核で表現されていることに注意して T_t が $\mathbb{C}(\hat{S})$ 上のみ

ならず非有界なある種の関数にほどこせることを用いる必要が出て来る。この考えはもっと一般に適用出来るが、たとえば

$$
(6.4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u(t,x) + k(x) \displaystyle\sum_{n \geq 1} p_n(x)\, (u(t,x))^n \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}^d
$$

で、さらに

$$
(6.5)\quad k(x) \geq 0, \quad k \not\equiv 0, \quad p_n(x) \geq 0, \quad \sum_{n \geq 1} p_n(x) = 1
$$

がみたされている時には方程式を形式的に次のように変形して考えるとよい。$S = \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_+$ として $\hat{S}$ 上の関数

$$
u(t, [(x_1, k_1), \cdots, (x_n, k_n)]) = 2^{k_1 + \cdots + k_n}\, \widehat{u(t,\cdot)}(\underline{x})
$$

$$
\underline{x} = [x_1, \cdots, x_n]
$$

を考えると、

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,(x,0))}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u(t,(x,0)) + 2k(x)\Big[\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n \geq 1} p_n(x)\, u(t, [\overbrace{(x,0), \cdots, (x,0)}^{n}]) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2} u(t,(x,1)) - u(t,(x,0))\Big] \\ u(0,(x,0)) = f(x) \end{cases}.
$$

となるので后は§3の方法を適用すればよい。

(6.4)を更に連立の場合にしたり、S や Δ の部分を一般化することも§3と同じ考え方で出来る。このような方法を偏微分方程式の解をしらべるのに実際適用した例としては、M. Nagasawa – T. Sirao [23] の結果がある。それは H. Fujita [5] で論じられた問題を上のような変形を基礎に分枝 Markov 過程

を作って解いたものである。なお (6.1) と (6.2) の間の関係は Markov 過程論では普通 creation と呼ばれる一般的な方法で相互に移るのだが，今は方程式が線型でないのでそのまゝは適用出来ず，しかも出来上ったものが共に分枝 Markov 過程になっているようにするために特別の工夫をしているわけである。しかし考え方としては基本に於いて同じであるので，上のような変形をして分枝 Markov 過程の話に持ちこむことを creation によると言っている。

こうして (3.2), (3.7) がなくても (6.5) があれば creation の考えと §3 の方法を併せて分枝 Markov 過程につながり，逆にたどることにより新たな semi-linear なクラスが出て来ることになる。

§7。符号のついた場合。たとえ §6 の creation を入れても，

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + u(1-u)^2 \tag{7.1}$$

の取扱いは出来ない。この方程式は Fisher が集団遺伝に関して導いたもので，A. Kolmogorov - I Petrovsky - N. Piscounoff [17] の興味深い研究の出発点になっているものである。これまではもっぱら state space の変形で multiplicative な性質と関連させて来たが，その他にもっと一般な方程式で解空間を制限

して与えられた方程式が出て来たと見ることも出来る。例えば (7.1) ならば

$$v = 1 - u$$

を新たに導入すると (7.1) は

$$(7.2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + u^3 + 2uv - u \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta v + v^3 + vu - v \end{cases}$$

となる。すなわち (7.2) で解 (u, v) が $u+v=1$ をみたす時を考えれば u は (7.1) をみたし, v は

$$(7.1)'\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta v - v^2(1-v)$$

なる (7.1) の dual とも言うべき方程式をみたす。(7.2) ならば §6 の creation と §3 の考えを併せ適用すれば分枝 Markov 過程に対応させることが出来る。この考えは, 例えば

$$(7.3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + F(u), \\[2ex] F[\xi] = \displaystyle\sum_{n=1}^{n_0} a_n \xi^n, \qquad F(1) = 0 \end{cases}$$

ならば適用出来る。実際　$v = 1-u$　とおけば

$$(7.4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + \displaystyle\sum_{n+m\geq 2} p_{n,m}\, u^n v^m - c_1 u \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + \displaystyle\sum_{n+m\geq 2} q_{n,m}\, u^n v^m - c_2 v \end{cases}$$

$$p_{n,m} \geqq 0, \quad q_{n,m} \geqq 0$$

と変形される。もちろんこの型の変形は1通りではない。(7.3)から(7.4)を導くのに重要なのは、(7.3)では $0 \leqq u(0,x) \leqq 1$ ならば $0 \leqq u(t,x) \leqq 1$ が成立していることで他は形式的な計算である。(7.4)は§6と§3の考えで分枝Markov過程につながるものである。

この考えを連立の場合に適用しようとすると事情は非常に複雑になる。しかしいくつかの例についてはやはり適用出来る。たとえば超伝導のorder parameterについてのE. Abrahams – T. Tsuneto [1] の

$$(7.5) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 + (1 - u_1^2 - u_2^2) u_1 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + (1 - u_1^2 - u_2^2) u_2 \end{cases}$$

については

$$v_1 = 1 - u_1, \quad v_2 = 1 - u_2$$

とおけば

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 + u_1(1+u_1)v_1 + u_1(1+u_2)v_2 - u_1 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + u_2(1+u_1)v_1 + u_2(1+u_2)v_2 - u_2 \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \Delta v_1 + u_1 u_2^2 + 2v_1^2 + u_1 v_1^2 - 2v_1 \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} = \Delta v_2 + u_1^2 u_2 + 2v_2^2 + u_2 v_2^2 - 2v_2 \end{cases}$$

となる。また M. Mimura − A. Nakaoka [21] 等で取扱われている

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \Delta u_1 - d_1 u_1 u_4 - d_2 u_1 u_3 \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \Delta u_2 - d_3 u_2 u_4 + d_2 u_1 u_3 \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} &= \qquad\quad d_3 u_2 u_4 - d_2 u_1 u_3 \\
\frac{\partial u_4}{\partial t} &= \qquad -d_1 u_1 u_4 - d_3 u_2 u_4
\end{aligned}
\right. \qquad , \quad d_i \geq 0 ,
$$

の時も $(u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2)$ を

$$
v_1 = 1 - u_1, \quad v_2 = 1 - u_2, \quad v_3 = 1 - u_3, \quad v_4 = 1 - u_4
$$
$$
w_1 = 1 - (u_1 + u_2), \qquad w_2 = 1 - (u_3 + u_4)
$$

とおけば自明の変形が出来る。

こうして連立の次数を高めて semi-linear な方程式を branching semi-group と対応するものとそうでないものとしてとらえることは出来ることになった。まず第1に注意することはそうしても微分方程式の立場で考えると恐らく semi-linear の中で非常に特別のクラスだけが出て来るだろうということである。第2に注意することはとにかく方程式を branching semi-group と関連づけて考えられるというだけであって、そのことからどれだけ生産的な結論を引出せるかわからないことである。例えば解の漸近行動等をしらべるのにここでのべた考えが有効であった話を少くとも私は全く知らない。

§8。爆発の問題について。 これまでは与えられた方程式にいかにしてMarkov過程を対応させるかに重点をおいて形式的なことをのべて来た。そしてそのような対応の考えられるものは非線型方程式の中では比較的単純なものであることも既に注意した。ところがそのようなクラスでも線型とは違った事情がある。そのような事情を調べる出発点みたいなものを与えるものとして分枝Markov過程との関連で非線型方程式の2,3の問題をつぎにみてみよう。最初はいわゆる爆発の問題を考える。これまで何回も考えた方程式

$$
(8.1)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{du(t)}{dt} = F[u(t)] - u(t) \\
&F[\xi] = \sum_{n\geq 2} p_n \xi^n, \qquad p_n \geq 0, \qquad F[1] = 1
\end{aligned}
$$

を考えてみる。これには§3の意味で state space $\hat{\Xi}_+$ を持つ分枝Markov過程 $\{W, \mathbb{B}, P_{\underline{x}}, \underline{x} \in \hat{\Xi}_+\}$ と branching semi-group $\{T_t ; t \geq 0\}$ が対応している。記号をそろえるために(8.1)と同等だが, $v = 1-u$ のみたす

$$
(8.2)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{du(t)}{dt} = G[u(t)] - u(t) \\
&G[\xi] = 1 - \sum_{n\geq 2} p_n (1-\xi)^n
\end{aligned}
$$

を考えよう。そうすると常微分方程式論で古くから良く知られているように，解の一意性という定性的なことがある積分

の発散収束で判定される。具体的に言えば，初期条件

(8.3) $$u(0) = 0$$

の下での (8.2) の解は

(8.4) $$\int_{0+} \frac{d\xi}{G(\xi)} = \infty \quad , \quad (< \infty)$$

に応じ一意的（一意的でない）となる。このことを分枝 Markov 過程でみるとつぎのようなことになる。今 $w \in W$ の t 座標を確率論の慣習に従って $x(t)\,(\equiv x(t,w))$ と書き

(8.5) $$e(w) = \inf\{t \,;\, x(t,w) = \Delta\}$$

とおく。ここで Δ は $\hat{S}_+ = S_+ \cup \{\Delta\}$ なる点で $+\infty$ と考えてよい。そうすると

(8.6) $$e(t) \equiv 1 - T_t\hat{1}(1) = P_1[\{w \,;\, e(w) \leq t\}]$$

とおけば $e(t)$ が (8.3) の下での (8.2) の最大解になる。（この事実は §3 をみれば直接的にも容易に示されるが，もっと一般には例えば N. Ikeda-M. Nagasawa-S. Watanabe [10] 参照）。

したがって上にのべた一意性の問題は

$$e(t) = 0 \quad , \quad t \in R_+ ,$$

かどうかの問題と同等になる。ところが簡単にわかることは

$$\lim_{t \uparrow \infty} e(t) = e$$

が常に存在し，しかも

(8.7) $$e = 0 \quad \text{または} \quad 1$$

が言える。故に上の一意性の問題は $e = 0$ であるかどうか

と同等になる。一方定義より

$$e = P[\{w;\ e(w)<\infty\}]$$

が容易に言えるので，$e(w)$ が分枝 Markov 過程の道 $x(t,w)$ が始めて $+\infty$ に到達する時間，すなわち分枝 Markov 過程が爆発する時間であることに注意すれば，(8.3) の下での (8.2) の解が一意的なことと分枝 Markov 過程の爆発が有限時間内には確率 1 で起きないことと同等であることが言える。それのみならず，その判定条件の (8.4) については

(8.8) $$\int_W e(w)P_1(dw) = \int_{0+} \frac{d\xi}{G(\xi)} + (\text{有限な量})$$

の関係式が分枝 Markov 過程についての標準的な計算によって示される。この式は，上の判定条件を使えばもし

(8.9) $$P_1[\{w;\ e(w)<\infty\}]=1$$

ならば

(8.10) $$\int_W e(w)P_1(dw) < \infty$$

を意味している。また逆に確率論的な考察から (8.9) より (8.10) を示し，(8.8) と併せて上の判定条件を導くことも出来る。（N. Ikeda [8]）。これらの事実は偏微分方程式の場合にも，一定の仮定の下で成りたつ。たとえば T. Savits [26] は次のような場合に一意性の問題と対応する分枝 Markov 過程の爆発の問題の関係をしらべている：

$$(8.11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + k(x)\left(G(x\,;\,u(t)) - u(t) \right), & \\ u(0,x) = 0 \text{。} & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

こゝで　G　は

$$G(x\,;\,\xi) = 1 - \sum_{n\geq 2} p_n(x)(1-\xi)^n, \qquad p_n(x) \geq 0, \ \sum_{n\geq 2} p_n(x) = 1$$

とする。彼が考えたのは例えば　$0 < K_1 \leq K_2 < \infty$　が存在し，

$$(8.12)\qquad 0 < K_1 \leq k(x) \leq K_2 < \infty$$

がみたされる場合である。また全空間でなくなめらかな境界 ∂D を持った有界領域 D で (8.11) を考え，吸収壁の境界条件を持つ時は H. Fujita - S. Watanabe [6] で論じられている。

ところが semi-linear な方程式の解の一意性の問題については，これまでと違った事情の起る典型的な２つの場合がある。（N. Ikeda - S. Watanabe [11]）。これらについて証明は省略して結果をのべて事情を明らかにしよう。

(i) の場合。　D をなめらかな境界 ∂D を持つ有界領域とし，

$$(8.13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u, & x \in D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \alpha(G(u) - u), & x \in \partial D, \qquad \alpha > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & \end{cases}$$

を考える。こゝで $\frac{\partial}{\partial n}$ は外法線微分で，G は (8.2) に同じ。

(ii) の場合。(8.11) の特別の場合で (8.12) が成立しない時。

たとえば，

$$(8.14) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + |x|^{\gamma}(u - u^2) , & x \in \mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0} = 0 . \end{cases}$$

(i) の場合は (8.11) で言えば $k(x)$ に相当するものが関数でなく測度になっているような時で，対応する分枝 Markov 過程は D の内部では分裂しないで道 $X(t, w)$ が ∂D を訪問している時にだけ分裂する。一意性についてはたとえば

$$G(\xi) \simeq \xi\left(\log \frac{1}{\xi}\right)^{p}, \qquad p>0$$

の時を考えると $p < 1/2$ の時に unique で $p > 1/2$ の時に non-unique である。

(ii) の場合については $\mathbb{R}^1$ の時に K. Ito – H. P. McKean [12] で示された，

$0 \le \gamma \le 2$ ならば unique

$\gamma > 2$ ならば non-unique

ということが成りたつ。これは (8.11) で $k(x) = |x|^{\gamma}$ となった時で (8.12) の条件がこわれている。この時は $G(\xi) = 2\xi - \xi^2$ であるのでもし (8.11) が成立しておれば常に一意的であるが，k が有界でないために一意性がこわれることがある。この時は対応する分枝 Markov 過程は $\mathbb{R}^d$ の外側に行けば行くほどしばしば分裂するようになっている。(8.12) の条件の下で問題を考えると偏微分方程式とは言いながら一意的でなくなる

要因は非常に常微分方程式的であるのに比して，この場合はその要因が真に偏微分方程式的とも言える場合である。

この場合についての K. Ito – H. P. McKean [12] の証明と本質的には同じにして，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = x^{-a}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^{b}(u-u^2), & x \in]0, \infty[\\ u_{|t=0} = 0 \end{cases}$$

に対してつぎのような結果が得られる。こゝで 0 に於いては必要ならば境界条件をおいて考える。

(A) $b>0$ の時。

(a) $b>|a+2|$ ならば non-unique

(b) $a>-1$，$b \leq a+2$ または $a<-2$，$b<-a-2$ ならば unique

(B) $b<0$ の時。

(a) $a \leq -2$，$b<a+2$ または $a>-2$，$b \leq -a+2$ ならば non-unique

(b) $a<-3$，$b \geqq a+2$ または $a>-2$，$b>-a-1$ ならば unique

(C) $b=0$ の時常に unique。

(N. Ikeda – S. Watanabe [11] 参照)。

こゝで考えた semi-linear な方程式の解の一意性の問題は分枝 Markov 過程または branching semi-group $\{T_t ; t \geq 0\}$ の互

場で言えば実は境界条件の問題に関連して来る。

[I] 一般に真に局所 compact な空間で Markov 過程を考える時はそれに応じた境界と境界条件が自然に導かれることは Markov 過程の一般的事実として知られている。現在の場合も，(8.12) の下での (8.11) または (8.13) では方程式が与えられることは "$\wedge$" の写像を考えに入れても，実は S での ことしか規定していないことになる。それから自然に Δ での状態が規定されることもあるが，そうでない時もおこるということが non-unique がおきることである。したがってその時は Δ に境界条件を附して始めて $\hat{S}$ 上で規定したことになる。実際可能な境界条件は $t>0$ に対して

$$\lim_{\xi\to\Delta} u(t,\xi)=1 \quad \text{あるいは} \quad \lim_{\xi\to\Delta} u(t,\xi)=0$$

である。ただし問題を一般に考えれば境界 点を Δ の1点とすることすら不自然になり，それに応じて境界条件も複雑になる。このような考察が可能なことは (8.11) のような方程式を対型化して考える自然さを或る意味で表わしているとも言える。

[II]. (ii) の場合は S を構成する基礎になる $\mathcal{S}$ が真に局所 compact で対型の時には出て来ない，非対型項のためにおこる要因で $\mathcal{S}$ の境界の点で境界条件が必要になる。$\hat{S}$ で言えば $\mathcal{S}$ の compact 化を $\mathcal{S}^*$ とすれば $\mathcal{S}^*-\mathcal{S}$ の点の関連す

る $\sum_{n\geq 2} \delta^{*n}$ の部分集合で境界条件が必要になることを意味している。

このように常微分方程式では古くから知られている解の一意性と現象との関連が，偏微分方程式の時も分枝 Markov 過程が対応する時は同様に示せることがわかる。それのみならず偏微分であるために新たな事情も出て来ることがわかった。もちろん上の結果の中，確率論的な部分を取除いた通常の意味で解析的なものは，分枝 Markov 過程が対応しなくても成りたつことが多い。たとえば (8.12) の条件の下での (8.11) の結果等はその例である。そのためには証明法を branching semi-group にたよらないで結果を導く必要があるが，現在までのところ上にのべた (ii) の場合の結果の一部分についてはそのような証明が得られていない。

さらに §4 で論じた continuous branching process についても，関連する方程式の解の一意性と爆発問題の関連がおきる。その時も分枝 Markov 過程の時用いたのと殆んど同じ考えでいくつかの結果を示すことが出来る。

§9。解の成長の問題。　分枝 Markov 過程を対応させて考えることから引出される semi-linear な方程式についてのもう1つの問題を考えてみよう。すでに繰返し使って来たように方程式

$$(9.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u(t,x) + u(t,x)^2 - u(t,x), & x\in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = f(x), \end{cases}$$

に対しては $S=\mathbb{R}^d$ の時の $\hat{S}$ 上の分枝 Markov 過程 $\{W, \mathbb{B}, P_{\underline{x}}\,;\,\underline{x}\in\hat{S}\}$ が対応する。いま S 上の関数 f に対し

$$\check{f}(\underline{x}) = \begin{cases} 0, & \underline{x} = \partial \text{ または } \Delta, \\ \sum_{j=1}^{n} f(x_j), & \underline{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]\in S^n,\ n\geq 1, \end{cases}$$

で $\hat{S}$ 上の関数を定義する。いま集合 $D\subset \mathbb{R}^d$ の indicator function とする時，有界 Borel 集合 D に対して

$$(9.2)\qquad Z_t^D(w) = \check{I}_D(X(t,w))$$

とおけば集合 D の中に時間 t のときいる粒子数を現わすと考えられる。このような量の性質をしらべることは応用上も必要であるので分枝 Markov 過程の研究では種々の型について試みられ多くの結果が得られている。たとえば S. Watanabe [29] によれば一般的な研究の例として (9.2) の $Z_t^D(w)$ の漸近状態についてつぎの結果が示されている。

$\{W, \mathbb{B}, P_{\underline{x}}\,;\,\underline{x}\in\hat{S}\}$ 上の可測関数 $\xi(w)$ で $P_x[\xi(w)>0]=1$

, $x\in S$, なるものが存在し,

$$(9.3)\quad P_x\left[\left\{w;\ \lim_{t\to\infty}\frac{Z_t^D(w)}{e^t t^{-d/2}}=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}|D|\,\xi(w)\right\}\right]=1,\quad x\in S,$$

となる。(併せて S. Watanabe [28] 参照)。ここで $|D|$ は D の Lebesgue 測度。これは実はどんな有界 Borel 集合でもその測度が正ならば,その中にある粒子の個数は増大し無限大に近づくこと,およびその近づく早さを示している。この事実を用いるとつぎのことを示すことが出来る。

f は S 上で有界連続な関数で $0<f\leq 1$ で,しかも $f\not\equiv 1$ とする。その f を初期条件にもつ (9.1) の解を $u(t,x)=u(t,x;f)$ とすれば

$$(9.4)\qquad \lim_{t\to\infty}u(t,x;f)=0,\qquad x\in\mathbb{R}^d,$$

となる。この事実はもし $0<f\leq\delta<1$ ならば常微分方程式についてのことと比較定理を用いることで簡単に示される。自明でないのは

$$\{x;\ 1-f(x)>0\}$$

が compact な集合で空でない場合である。この場合も (9.3) を前提にすればつぎのようにすればよい。(9.1) に対応する branching semi-group を $\{T_t;\ t\geq 0\}$ とすれば,まず

$$u(t,x;f)=T_tf(x)=\int_W \hat{f}(x(t,w))\,P_x(dw)$$

がなりたつことに注意する。 $g(x) = -\log f(x)$ とおけば

$$\int_W \hat{f}(X(t,w))\,P_x(dw) = \int_W e^{-\check{g}(X(t,w))}\,P_x(dw), \qquad x \in S.$$

一方 f についての仮定より空でない開集合 D と定数 $c>0$ が存在し，

$$g \geq c\,I_D$$

となっている。故に

$$u(t,x;f) = \int_W e^{-\check{g}(X(t,w))}\,P_x(dw) \leq \int_W e^{-c\,\check{I}_D(X(t,w))}\,P_x(dw).$$

ここで Lebesgue の収束定理を用いると

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x;f) \leq \lim_{t\to\infty}\int_W e^{-c\,\check{I}_D(X(t,w))}\,P_x(dw) = \int_W e^{-c\lim_{t\to\infty}\check{I}_D(X(t,w))}\,P_x(dw) = 0$$

となり結論が言える。この証明では実は (9.3) のように詳しい性質は必要なく単に $P_x[\{w;\ \lim_{t\to\infty} Z_t^D(w) = \infty\}] = 1$ があれば充分である。事実 (9.3) の証明には詳しい事を沢山用いており，(9.4) の証明にそれを用いるのは実は話が逆行しているうらみがある。そこで (9.3) のような確率論的な結果を使わず (9.4) をもっと直接的に示す問題が出て来る。その説明に進む前に (9.4) の意味についてもう少しふれよう。

普通の話とそろえるために，$v = 1-u$ のみたす，

$$
(9.5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + u - u^2 \\ u(0,x) = f \end{cases}
$$

の形にして考える。その他に (8.2) の G をもって来て

$$
(9.6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + G(u) - u \\ u(0,x) = f \end{cases}
$$

を考える。いま $G(\xi) - \xi \geqq \xi - \xi^2$, $0 \leqq \xi \leqq 1$, に注意すれば、$0 \leqq f \leqq 1$ に対する (9.6) の解は (9.5) の解より常に大きいか相等しい。したがって f が $0 \leqq f \leqq 1$ なる連続関数で $0 \not\equiv f$ ならばそれに対する (9.6) の解 $u(t,x;f)$ は

$$
(9.7)\qquad \lim_{t\to\infty} u(t,x;f) = 1
$$

なることが (9.4) と比較定理を用いて言えたことになる。これは (9.6) に関しては $u \equiv 0$ は非常に不安定な解で $u \equiv 1$ が安定な解になっていることを示している。その意味でいわゆる semi-linear な方程式に関する成長問題になっている。これらについては最近亀高氏等によって研究されているが、たとえば同氏によって示された特別の場合で、しかも E. Abrahams - T. Tsuneto [7] で期待されている超伝導についての (7.5) の方程式についてのつぎの結果も上のことから言える。

$0 \leqq u_1(0,x) \leqq 1$, $u_2(0,x) \equiv 0$ ならば (7.5) の解に対して

$$
\lim_{t\to\infty} u_1(t,x) = 1 ,
$$

言いかえると，

$$\lim_{t\to\infty}\left(u_1(t,x)^2+u_2(t,x)^2\right)^{1/2}=1$$

が言える。 成長問題はこの他にも W. E. Kastenberg－P. L. Chambré [16] 等，応用の方でいくつかの結果が期待されており，いくつかの数値実験もなされている。（J. Canosa [2] 参照）。

先にのべた成長問題を確率論の結果 (9.3) を使わないで行うことは実際亀高氏等によって実行されている。それらについては亀高氏による報告 [13] や亀高－池田 [14] にまとめられているが，原理的には (9.3) の証明の途中に出て来る考えを使う。亀高－池田 [14] に従って考えの基本をのべると次のようになる。たとえば G として一般に (i) $G(0)=0$, $G(1)=1$, (ii) $G(\xi)\geq\xi$, G は1回連続的微分可能で $[0,1]$ で強い意味で単調増大，(iii) $G'(\xi)$ は強い意味で単調減少 等をみたすものをとって来て，滑らかな境界 ∂E を持った有界領域 E で

(9.8)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\Delta u+\left(G(u)-u\right) & \text{on } E\\ u|_{\partial E}=0 & \\ u(0,x)=f & \end{cases}$$

を考え，それに対する成長問題を取扱う。この問題は実は S. Watanabe [28] や A. Pazy－P. H. Rabinowitz [25] 等々で研究

されているいわゆる non-linear eigenvalue problem（この呼び方が適当かどうかは別として）にかゝわっている。それは(9.8)の安定な解，すなわち

$$
(9.9)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u + (G(u)-u) = 0 & \text{on } E \\ u_{|\partial E} = 0 \end{cases}
$$

を取扱ったものである。それについては

$$
(\Delta + \lambda)\varphi = 0 \quad \text{on } E, \qquad \varphi_{|\partial E} = 0
$$

なる固有値問題の固有値 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ とすれば

$$
\alpha = G'(0) - 1 - \frac{\lambda_1}{2}
$$

とおくとき，$\alpha \leq 0$ ならば (9.9) の解は $u=0$ のみで，$\alpha > 0$ ならば (9.9) は2つの解 $u=0$ と $u_1(x) > 0$, $x \in E$ を持つことは S. Watanabe [28] にて示されている。(9.8) の成長問題は f が連續で $0 \leq f \leq 1$, $f \not\equiv 0$, $f_{|\partial E} = 0$ ならば (9.8) の解 $u(t,x;f)$ に対して，$\alpha > 0$ の時

$$
\lim_{t\to\infty} u(t,x;f) = u_1(x), \qquad x \in E,
$$

となることを主張するものである。この事実を基礎に始めの成長問題の解決が出来る。（詳しくは亀高－池田[14]参照）。

いま (9.6) で $d=1$，すなわち $\mathbb{R}^1$ で考え，

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}
$$

の時に，(9.6) の解 $u(t,x)=u(t,x;f)$ はこれに対応する分枝半群 $\{T_t\ ;t\geq 0\}$ を使えば

$$u(t,x;f)=1-T_t g(x),\quad g=1-f$$

と表わされる。したがって分枝 Markov 過程の言葉を使えば時間 t の時少くとも1つの粒子が正の半直線上にいる確率が $u(t,x;f)$ になっている。上にのべた成長問題の結果から

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x)=1$$

が言えるが，もっと詳しくその近づき方については A. N. Kolmogorov – I. Petrovsky – N. Piscounoff [17] の研究がある。それによると，$\alpha\equiv\sum_{n\geq 2} n p_n<\infty$ とすれば

(9.10) $$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2}-\sqrt{2\alpha}\frac{dv}{dx}+G(v)-v=0,\quad \lim_{x\to-\infty}v(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}v(x)=1,$$

の解が存在する。このような解は $x\to x+c$ の変換を除いて一意的に決まる。$u(t,x)$ は $\sqrt{2\alpha}$ に下から近づく速さで左に移動し，曲線の形は上の解に近づく。もし少し具体的には $\varphi(t)$ を定数 c に対して $u(t,\varphi(t))=c$ なるように定めると $u(t,x+\varphi(t))$ は $t\to\infty$ の時 x について一様に収束する。そして $d\varphi/dt\longrightarrow-\sqrt{2\alpha}$ で上の極限関数は (9.10) の解である。

この節の説明は亀高氏の未発表の最近の結果によっている点が多い。(亀高 [13] による)。またここであげた文献のいくつかも同氏の注意によって知った。

§10。種々の注意。　確率過程論に出て来る非線型方程式はここでのべた枠に入らないものが他にもあるし，また確率論に関係しそうでまだ確率過程が対応させられていないものがあったりする。それらについてふれることは出来ないが，ここでのべたのはあくまで非線型方程式の確率論的な取扱いの例として理解して頂くと良いと思う。また解空間の値の簡単な変換で基本的な確率過程に対応する方程式が得られる場合もある。たとえば J. Burgers の方程式に対する J. Cole [3] の論文で用いられた変換や E. W. Montroll [22] の論文で用いられた semi-linear な方程式に帰着するための変換はそのようなものの最も典型的な1つであろう。いまの所その変換そのものは解を求めるのに有効でしばしば解の性質をしらべるのにも使えるが，関連する確率論的な特性がどうなのか明らかでないようなのでここではこれ以上ふれないことにした。

また H. P. McKean [18], [20] はある種の関数方程式のいくつかのものについてその相互関係をつけるような試みを行っているが，ここではそこまで立入ることが出来なかった。

文献

[1] E.A. Abrahams - T. Tsuneto : Time variation of the Ginzburg-Landau order parameter. Phys. Rev. 152 (1966).

[2] J. Canosa : Diffusion in non-linear multiplicative media. Jour. Math. Phys. 10 (1969).

[3] J.D. Cole : On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. Quaxt. Appl. Math. 9 (1951).

[4] T. Fujimagari - M. Motoo : Cascade semi-groups and their characterization. to appear.

[5] H. Fujita : On the blowing up of solutions of the Caucly problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. Jour. of Fac. Sci. Univ. Tokyo. 13 (1966).

[6] H. Fujita - S. Watanabe : On the uniqueness and non-uniqueness of solutions of initial value problems for some quasi-linear parabolic equations. Comm. Pure. Appl. Math. 21 (1968).

[7] I.M. Gelfand : Some problems in the theory of quasi-linear equations. Amer. Math. Soc. Trans. Series. 2. Vol. 29 (1963).

[8] N. Ikeda : Branching Markov processes: Stanford Univ. Seminar Notes. 1966-67.

[9] N. Ikeda - M. Nagasawa - S. Watanabe : 分枝Markov過程の

基礎. Seminar on Prob. Vol. 23 (1966).

[10] N. Ikeda - M. Nagasawa - S. Watanabe : Branching Markov processes I, II, III, J. Math. Kyoto. Univ. 8 (1968), 9 (1969).

[11] N. Ikeda - S. Watanabe : On uniqueness and non-uniqueness of solutions for a class of non-linear equations and explosion problem for branching processes. Jour. Fac. of Sci. Univ. of Tokyo. 17 (1970).

[12] K. Ito - H.P. McKean : Diffusion processes and their sample paths. Springer. 1965.

[13] 亀高惟倫 : 拡散と飽和を伴う成長現象。(京都大学微分方程式セミナー発表)

[14] 亀高惟倫 — 池田信行。準備中.

[15] S. Karlin - J. McGregor : Spectral representation of branching processes. I. Z. Wahrscheinlichkeritstheorie verw. Geb. 5 (1966).

[16] W.E. Kastenberg - P.L. Chambré : On the stability of non-linear space-dependent reactor kinetics. Nuclear science and enginearing. 31 (1968).

[17] A.N. Kolmogorov - I. Petrovsky - N. Piscounoff : Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la

quantité de metiere et son application à un problème biologique. Bull. de l'Université d'état à Moscou, 1 (1937).

[18] H.P. McKean : Chapman-Enskog-Hilbert expansion for a class of solutions of the telegraph equation. Jour. Math. Phys. 8 (1967).

[19] H.P. McKean : A class of Markov processes associated with non-linear parabolic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 56 (1966).

[20] H.P. McKean : A simple model of the derivation of fluid mechanics from the Baltzmann equation. Bull. of Amer. Math. Soc. 75 (1969).

[21] M. Mimura - A. Nakaoka : On some degenerate diffusion system related with a certain reaction system. to appear.

[22] E.W. Montroll : On non-linear processes involving population growth and diffusion. Jour. Appl. Prob. 4 (1967).

[23] M. Nagasawa - T. Sirao : Probablistic treatment of blowing up of solution for a non-linear equation. Trans. Amer. Soc. 139 (1970).

[24] Y. Ogura : Spectral representation for branching processes on the real half line. Publ. Presearch Inst. Math. Sci.

Kyoto Univ. 5 (1970).

[25] A. Pazy - P.H. Rabinowitz : A non-linear integral equation with application to neutron transport theory. Arch. Rat. Mech. Analy. 32 (1969), 35 (1969).

[26] T.H. Savits : The explosion problem for branching Markov processes. Osaka Jour. Math. 6 (1969).

[27] H. Tanaka : Propagation of chaos for certain purely discontinuous Markov processes with interactions. Jour. Fac. Sci. Univ. of Tokyo 17 (1970).

[28] S. Watanabe : On the branching process for Brownian particles with an absobing boundary. Jour. Math. Kyoto Univ. 4 (1965).

[29] S. Watanabe : Limit theorem for a class of Branching processes. Markov processes and potential theory edited by J. Chover. 1967.

[30] S. Watanabe : A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes. Jour. Math. Kyoto Univ. 8 (1968).