数理解析研究所講究録
第106巻 1971年 76-87

ある種の化学反応式系に関連した半線型楕円型方程式について

甲南大・理　三村 昌泰
立命大・理工　中岡　明

§1. 序

ある種の化学反応系を記述する方程式として次のような degenerate diffusion system

$$(1)\quad \begin{cases} U_t = D_0 \Delta U + D_1 F(U) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ U(x,0) = \Phi(x) \geq 0 \end{cases}$$

が，Mikawa，Mimura 及びその他の人々によって種々の実験を通して導かれた。

ここで

$$U = {}^t(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D_1 = \begin{bmatrix} -d_1 & -d_2 & 0 \\ 0 & d_2 & -d_3 \\ 0 & -d_2 & d_3 \\ -d_1 & 0 & -d_3 \end{bmatrix}$$

$$F(U) = {}^t(u_1u_4,\ u_1u_3,\ u_2u_4)$$

そして

$$\Phi(x) = {}^t(\phi_1(x),\ \phi_2(x),\ 0,\ \phi_4(x))$$

である。 上のCauchy問題(1)の大局解は，連続有界な関数のクラスですでに保証されている。

ここでは，その解について，$t \to \infty$の時の様々なasymptotic behaviourに関連した事柄を述べることにする。

§2. Asymptotic behaviourに関連して導かれたある種の半線型楕円型方程式について.

(1)の解の漸近挙動を調べるには，次の比較定理が有効である。

補題 2.1　次の3つのCauchy問題

(P₁) $\quad U_t = D_0 \Delta U + D_1 F(U) \quad , \quad U(x,0) = \Phi(x)$

(P₂) $\quad V_t = D_0 \Delta V + D_2 F(V) \quad , \quad V(x,0) = \Phi(x)$

(P₃) $\quad W_t = D_0 \Delta W + D_3 F(W) \quad , \quad W(x,0) = \Phi(x)$

ここで

$$D = \max(d_1, d_2, d_3) \quad , \quad d = \min(d_1, d_2, d_3)$$

$$D_2=\begin{bmatrix} -d & -d & 0 \\ 0 & d & -d \\ 0 & -D & D \\ -D & 0 & -D \end{bmatrix} \qquad D_3=\begin{bmatrix} -D & -D & 0 \\ 0 & D & -D \\ 0 & -d & d \\ -d & 0 & -d \end{bmatrix}$$

とする。この時，これらの解について，

i) $v_1(x,t) \geq u_1(x,t) \geq w_1(x,t) \geq 0$

ii) $v_1(x,t)+v_2(x,t) \geq u_1(x,t)+u_2(x,t) \geq w_1(x,t)+w_2(x,t) \geq 0$

iii) $w_3(x,t)+w_4(x,t) \geq u_3(x,t)+u_4(x,t) \geq v_3(x,t)+v_4(x,t) \geq 0$

iv) $w_4(x,t) \geq u_4(x,t) \geq v_4(x,t) \geq 0$

が成り立つ。

上の比較定理によって，(P_2)，(P_3)の解の漸近挙動を調べることは，(P_1)の解のそれを調べるのに大変有効であることがわかる。例えば，(P_2)において，Vの才1成分$v_1(x,t)$についての関係式

$$v_1(x,t)-\frac{d}{D}\phi_4(x)\exp\left(-D\int_0^t v_1(x,\tau)d\tau\right)-\phi_1(x)+\frac{d}{D}\phi_4(x)$$
$$=\int_0^t \Delta v_1(x,\tau)d\tau$$

が導かれるが，ここで

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{\infty} v_1(x,\tau)\,d\tau\,dx < +\infty \qquad (2.1)$$

を仮定すると，$v(x)=\int_0^{\infty} v_1(x,\tau)\,d\tau$ が distribution sense に
みたす方程式

$$\Delta v = \frac{d}{D}\Phi_4(x)\left\{1-\exp(-Dv)\right\} - \Phi_1(x)$$

が得られる。 W についても同様である。 従って，いかなる $\Phi_1(x)$, $\Phi_4(x)$ のもとで，上の半線型楕円型方程式が解（まだその意味は明確でないが）をもつか，又はもたないかという問題がでてくる。

以下，我々は次の方程式

$$\Delta u = a(x)(1-e^{-u}) - f(x) \qquad (2.2)$$

を考察する。 ここで

$$a(x)\in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n), \quad \alpha^2 \geq a(x) \geq 0$$

$$f(x)\,(\geq 0) \in L_1(\mathbb{R}^n)$$

である。 (2.1) を考慮すれば，(2.2) を $L_1(\mathbb{R}^n)$ で取り扱うのが妥当であろう。

定義 2.1　$u(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ が (2.2) の解であるとは、$u(x) \geqq 0$ であってかつ (2.2) を distribution としてみたす場合を云う。

(注意)　以下の考察から又、最初の Cauchy 問題からもわかるように、$f(x)$ ($\Phi(x)$ の第一成分に相当する) が恒等的に 0 の場合には、(2.2) は $u(x) \equiv 0$ なる unique solution をもつので、$f(x) \not\equiv 0$ として話を進める。

§3. 一般的準備

まず簡単な補題から始めよう。

補題 3.1

$k(x) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{\alpha^2 + 4\pi^2|\xi|^2}\right]$ とおく。ここで $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$ であり、$\mathfrak{F}^{-1}$ はフーリエ逆変換である。

この時

i) $k(x) > 0$ かつ $k(x)$ は $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ のみに depend する。

ii) $k(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$

iii) $\|k\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = 1/\alpha^2$

iv) $\dfrac{dk}{d|x|} < 0$

である。

補題3．2

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)\varphi(y)\,dy$$ とおく。

i) $\varphi(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ とすると

$$\| K\varphi \|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\alpha^2} \| \varphi \|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

特に $\varphi(x) \geq 0$ ならば,

$$\| K\varphi \|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{\alpha^2} \| \varphi \|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

ii) $\varphi(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\beta(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ とすると

$$\| K(\beta\varphi) \|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\alpha^2} \| \beta \|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \| \varphi \|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

がなりたつ。

我々は (2.2) を次のような逐次近似列 $\{u_\mu(x)\}$ によって考察する。

$$\begin{cases} \Delta u_\mu - \alpha^2 u_\mu = a(x)(1 - e^{-u_{\mu-1}}) - \alpha^2 u_{\mu-1} - f(x) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots) \\ u_0(x) \equiv 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

上の関数列に関して次の命題、及び定理が成り立つ。

命題３．１

各 $u_\mu(x)$ は non-negative であって，$L_1(\mathbb{R}^n)$ に属し，かつ μ について単調増加である。

定理３．１

(2.2) が解をもつための必要十分条件は，μ に無関係な正の数Mがあって

$$\| u_\mu \|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq M$$

がなりたつことである。

§４．存在定理，及び解の一意性

この節では，(2,2) が解をもつための一つの十分条件を述べる。

定理４．１

ある正の数 $Q < \alpha^2$ に対して，

$$m\mathcal{E}^a_Q = m\{x\ ;\ a(x) \leq Q\} < +\infty$$

であれば，(2.2)の解 $u(x)$ は一意に存在する。

上の定理は以下の補題及び命題をあわせることによって証明される。

補題4．1

任意に fix された正の数 γ に対して

$$\delta(\gamma) = \sup_{mB \le \gamma} \int_B k(x)\,dx < \frac{1}{\alpha^2}$$

である。ここで，supremum は $\mathbb{R}^n$ におけるすべての可測集合で $mB \le \gamma$ なるものについてとる。

補題4．2

$\psi(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の measurable function で，

i) $0 \le \psi(x) \le \alpha^2$

ii) ある正の数 $S\,(<\alpha^2)$ に対して

$$m\mathcal{E}^{\psi}_{\alpha^2 - S} = m\left\{ x\,;\ \psi(x) \ge \alpha^2 - S \right\} < +\infty$$

をみたしているものとする。　この時

$$\sup_x \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)\psi(x)\,dy < 1$$

である。

補題4．3

$w_\mu = u_\mu - u_{\mu-1}$ ($\mu = 1, 2, \cdots$) とおくと，$\mu \geq [\frac{n}{2}]+1$ の時，w_μ は x に関して有界である。

補題4．4

$a(x)$ は定理4．1の条件をみたしているものとする。この時，$\mu \geq [\frac{n}{2}]+1$ であれば，ある定数 c ($0<c<1$) があって

$$A_{\mu+1} \leq c A_\mu$$

がなりたつ。 ここで $A_\mu = \sup_x w_\mu$ である。

命題4．1

(3．1)によって作られた $\{u_\mu(x)\}$ について

$$u_\mu(x) \leq A + \sum_{s=1}^{[\frac{n}{2}]} K^s f \qquad (\mu = 1, 2, \cdots)$$

がなりたつ。 ここで A は定数，K^s は K を s 回 iterate した作用素を表わす。

以上の補題，命題をあわすことによって，$\int_{R^n} u_\mu(x)dx$ の

一様有界性が従い，定理３．１によって解の存在が従う。
又，(2.2) の解（それは $\lim_{\mu\to\infty} u_\mu$ として得られる。）は一意的であることがわかる。

§5．解の非存在

前節では解が存在するための十分条件を述べたが，この節では解の非存在について述べる。すなわち，次の定理がなりたつ。

定理

$a(x)$ $(0 \leq a(x) \leq \alpha^2)$ が $L_1(\mathbb{R}^n)$ に属しているとする。
もしも，

$$\|a\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

がなりたっているならば，(2.2) の解は存在しない。

（証明）　(3.1) によって

$$u_\mu = Kf + K(\alpha^2 u_{\mu-1} + a(e^{-u_{\mu-1}} - 1))$$

であるが，補題３．２によって，

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_\mu dx - \int_{\mathbb{R}^n} u_{\mu-1} dx = \frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathbb{R}^n}(f-a)dx + \frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathbb{R}^n} a e^{-u_{\mu-1}} dx$$

を得る。仮定によって，$\int_{\mathbb{R}^n}(f-a)\,dx \geq 0$ であるから，

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u_\mu - u_{\mu-1})\,dx \geq \frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathbb{R}^n} a e^{-u_{\mu-1}}\,dx$$

となる。さて，もし解が存在するとすれば，$\int_{\mathbb{R}^n} u_\mu dx$ が収束列であるから．$\lim_{\mu\to\infty} u_\mu = u$ とおけば，

$$\int_{\mathbb{R}^n} a e^{-u}\,dx = 0$$

を得る。

ここで．もし $m(\mathrm{supp}.\, a(x)) > 0$ ならば，ある null set を除いて $u(x)$ は $\mathrm{supp}.\, a(x)$ で $+\infty$ となるから，$u(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ に反する。又 $m(\mathrm{supp}.\, a(x)) = 0$ ならば，

$$\| u_\mu \|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \frac{\mu}{\alpha^2} \| f \|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

となり，$\| f \|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \neq 0$ だから $\| u_\mu \|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \infty \ (\mu \to \infty)$ となり，定理 3、1 に反する。（証了）

REFERENCES

(1) Katz,S.M and etc.;Textile Research Journal. 20 (1950), 754-760

(2) Gelfand,I.M;Uspehi. Mat. Nauka. 14 no,2,(86) (1959), 87-158

(3) Mimura,M;The Pub. of R.I.M.S. 5,(1) (1969), 11-20

(4) Mimura,M;応用力学連合会講演録 (1969),39-40 (in japanese)

(5)Mikawa,H and etc.;Japanese J. of Allergology 18 (5) (1969),78-80 (in japanese)

(6) Keller,H,B and Cohen,D,S,;J. of Math. and Mech.,16 (1967) 1361-1367