数理解析研究所講究録
第106巻 1971年 109-120

壁面が動くときのナビエ・ストークス方程式について

東大理　藤田宏

§1 序

ナビエ・ストークス方程式の noncylindrical な (t, x)-領域における初期値問題は，動く壁面によって囲まれる容器内（のさらに動く物体が存在している場合）の非圧縮流体の非定常流を定める問題に対応する．本論説の目的は，この問題の Hopf-class の弱解が存在することをいわゆる処罰法 (penalty method) によって示すことである．証明の技術的な部分の詳細は割愛せざるを得ないが，それに関心のある方には N. Sauer 氏と筆者との共著の論文（Fujita-Sauer [3], [4]）を見て戴く．（もっとも [3] も要約のみである．）

上の弱解は 2 次元流の場合には一意となる．

§2 問題の記述など．

時刻 t ($0 \leq t \leq T$) において流体が占める空間(平面)領域を $\Omega(t)$ で表わす．ただし，$\Omega(t) \subset R^m$ ($m=2$ または $m=3$) であり，$\Omega(t)$ は有界，$\Omega(t)$ の境界 $\Gamma(t)$ は滑らかであると仮定する．なお，T は正の定数であり，我々は $t=0$ から $t=T$ までの流れに関心を持つ．$\Gamma(t)$ は時間的変化についても滑らかに変化するものとする．$\Gamma(t)$ が一点に帰着したり，$\Gamma(t)$ の成分が接触したりする病理的な場合は考えない[注1]。

(t,x)-空間内に $\Omega(t)$ が生成する領域を $\hat{\Omega}$，$\Gamma(t)$ が生成する(超)曲面を $\hat{\Gamma}$ で表わす．すなわち，

$$(2.1) \quad \begin{cases} \hat{\Omega} = \bigcup_{t \in [0,T]} t \times \Omega(t) \subset R^{m+1}, \\ \hat{\Gamma} = \bigcup_{t \in [0,T]} t \times \Gamma(t) \subset R^{m+1}. \end{cases}$$

物理定数を然るべく取り，外力を f，$\hat{\Gamma}$ 上の流速の境界値を β，$t=0$ における流速の初期値を a で表わせば，流速 $u=u(t,x)$，圧力 $p=p(t,x)$ ($(t,x) \in \hat{\Omega}$) を支配する方程式は古典的な形では次のように書かれる:

$$(2.2) \quad u_t = \Delta u - \nabla p - (u\nabla)u + f(t,x),$$

$$(2.3) \quad \operatorname{div} u = 0.$$

$$(2.4) \qquad u|_{\hat{\Gamma}} = \beta(t,x),$$

$$(2.5) \qquad u|_{t=0} = a(x).$$

(2.2)〜(2.5) からなる初期値問題を (Pr. NC) で表わし，$\Omega(t) \equiv$ 一定 なる特別な場合は (Pr. C) で特記する。

一応上のように書いたものの本講演では，弱解の存在証明には本質的関係がないので記述の冗長さをさけて，次の（些か非物理的な）簡単化の仮定を設ける：

$$(2.6) \qquad f \equiv 0, \quad \beta \equiv 0.$$

この意味で今後 (Pr. NC) のかわりに $(\mathrm{Pr.\,NC})_0$ と書く。

我々の目的は $(\mathrm{Pr.\,NC})_0$ の Hopf-class の弱解の証明であるが，$u = u(t,x)$ が $(\mathrm{Pr.\,NC})_0$ の古典解ならば，(Pr. C) の場合と同様に，次のエネルギー等式が成立することを注意しておく。

$$(2.7) \qquad \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega(t))} + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L_2(\Omega(s))} ds = \|a\|^2_{L_2(\Omega(0))}$$

ここで $u(t)$ は $u(t,\cdot)$ の意味である。今後は $L_2(\Omega)$ のノルムを単に $\|\ \|_\Omega$ と書く。さらに，前後関係から Ω が明らかであるときは添字 Ω もはぶく。なお，本講演では数，関数いずれも実なるものとする。

注 1. Hopf-class の解の non-uniqueness を論じた O.A.

Ladyzhenskaya の最近の注目するべき論文 [6] においては $\overline{\Omega}(0)$ が一点に帰着している.

§3 弱解の定義と弱解に関する定理

本節では (Pr.C) における E. Hopf の扱い [5] にならつて, $(\mathrm{Pr.NC})_0$ の弱解の定義をする.

まず, 記号の導入からはじめる. Ω を R^m の任意の有界領域として

$$D_\sigma(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega,\ \operatorname{div}\varphi = 0\},$$

$H_\sigma(\Omega) =$ "$D_\sigma(\Omega)$ の $L_2(\Omega)$ での完備化",

$H_\sigma^1(\Omega) =$ "$D_\sigma(\Omega)$ の $W_2^1(\Omega)$ $(= H^1(\Omega))$ での完備化",

とおく. なお, $(\mathrm{Pr.NC})_0$ においては $a \in H_\sigma(\Omega(0))$ を仮定する.

(t, x)-領域で定義されたベクトル関数に関しては次のものを用いる. $\hat{\Omega}$ は (2.1) におけるものである.

$$\hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}) = \{\varphi \in C^\infty(\hat{\Omega}) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset \hat{\Omega},\ \operatorname{div}\varphi = 0\},$$

$\hat{H}_\sigma^1(\hat{\Omega}) =$ "$\hat{D}_\sigma(\hat{\Omega})$ の $\nu(\cdot)$-norm での完備化",

ただし,

$$(3.1) \qquad \nu(\varphi)^2 = \int_0^T \|\nabla\varphi\|_{\Omega(t)}^2\, dt \qquad (\varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega})).$$

注意するべきことは $\hat{\Omega}$ が $t=0$, $t=T$ では閉じているので $\varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega})$ であっても $\varphi|_{t=0}$, $\varphi|_{t=T}$ は必らずしも0とならないことである. もちろん, $\varphi|\hat{\Gamma}=0$. また $u \in \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega})$ に対して, trace の意味で $u|\hat{\Gamma}$ は意味を持ち $u|\hat{\Gamma}=0$ となる.

弱い方程式における試験関数は次の class からえらばれる:

$$(3.2) \quad \hat{\mathcal{D}}(\hat{\Omega}) = \{\varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}) \mid \varphi|_{t=T} = 0\}.$$

一方, 弱解は次の class にぞくするものとされる.

$$(3.3) \quad \mathcal{U}(\hat{\Omega}) = \{u \in \hat{H}^1_\sigma(\hat{\Omega}) \mid \operatorname*{ess.\,sup}_{0 \le t \le T} \|u(t,\cdot)\|_{\Omega(t)} < +\infty\}.$$

(定義) u が $(\mathrm{Pr.\,NC})_0$ の弱解であるとは次の (i), (ii) が成立することである.

(i) $u \in \mathcal{U}(\hat{\Omega})$,

(ii) すべての $\varphi \in \hat{\mathcal{D}}(\hat{\Omega})$ に対して

$$(3.4) \quad F(u,\varphi) \equiv \int_0^T \{(u,\varphi_t) + (u,\Delta\varphi) + (u,(u\nabla)\varphi)\}\,dt$$

$$= -(a,\varphi(0)).$$

さて, 我々の結果は次の定理である.

(定理 1) (Fujita-Sauer [3], [4]) 任意の $a \in H_\sigma(\Omega(0))$ に対し $(\mathrm{Pr.\,NC})_0$ の弱解が存在する.

（定理2）（Fujita [2]）　$m=2$　ならば $(\mathrm{Pr.NC})_0$ の弱解は一意である．

§4. Penalty method による近似

弱解の存在定理である定理1の証明には一種の penalty method を適用する．

まず，$\Omega(t) \subset B$ $(0 \leq t \leq T)$ なる R^m の有界領域 B を固定し

$$
(4.1)\quad \begin{cases} \hat{B} = [0, T] \times B \\ \hat{E} = \hat{B} - \hat{\Omega} \\ \chi = \text{“}\hat{E}\text{ の特性関数”} \end{cases}
$$

とおく．また，a を $\Omega(0)$ の外では 0 とおいて B 内に拡張し，それを $\bar{a}$ で表わす．

n を自然数として，$(\mathrm{Pr.NC})_0$ におけるナビエ・ストークス方程式の右辺に penalizing term $-n\chi \cdot u$ を加える．このとき得られる初期値問題を $(\mathrm{Pr.AP})_n$ で表わそう．すなわち，$(\mathrm{Pr.AP})_n$ は古典形では次のように書かれる．

$$
(4.2)\quad \begin{cases} u^n_t = \Delta u^n - \nabla p^n - (u^n \nabla) u^n - n\chi(t,x)\, u^n, \\ \operatorname{div} u^n = 0, \\ u^n|_{\partial B} = 0, \qquad u^n|_{t=0} = \bar{a}. \end{cases}
$$

(4.2)の解 u^n が存在し，$\{u^n\}$ あるいはその部分列が $n\to\infty$ に際して何等かの意味で収束するならば，その極限 u^* を $\hat{\Omega}$ に制限したものが $(\mathrm{Pr.NC})_0$ の解であることを期待するのは不自然なことではない．何故なら，—— u^n が滑らかであるとして形式的に計算すると —— (2.7) と同様に次のエネルギー不等式が成立するからである．

$$(4.3)\quad \|u^n(T)\|_B^2+2\int_0^T\|\nabla u^n\|_B^2\,dt\ +2n\iint_{\hat{E}}|u^n|^2dx\,dt$$
$$=\|\bar{a}\|_B^2=\|a\|_{\Omega(0)}^2$$

実際，(4.3) から直ちに判ることは $n\to\infty$ のとき u^n は（それを $\hat{E}$ に制限したものは）$L_2(\hat{E})$ において 0 に収束することである．したがって，u^n の極限 u^* が $\hat{\Gamma}$ への trace をもつならば $u^*|\hat{\Gamma}=0$ となり望む境界条件が満足されることになる．一方，$\hat{\Omega}$ の内部においては $\chi\equiv 0$ であるので，u^n は $(\mathrm{Pr.NC})_0$ におけるものと全く同じ方程式を満足している．したがって，極限 u^* も同じ方程式を満足することになるであろう．すなわち，$u^*|\hat{\Omega}$ が $(\mathrm{Pr.NC})_0$ の解となることが期待される．

実際には（少くとも $m=3$ の場合には）~~Pr.A~~ $(\mathrm{Pr.AP})_n$ の滑らかな解が存在することが保証されないので，§3 に準じて $(\mathrm{Pr.AP})_n$ の弱解を定義し，u^n はその意味に解釈されね

ばならない. このような v^n の存在は (Pr. C) の場合と全く同様に Galerkin 法によつて証明される. また, 弱解 v^n は (4.3) の $=$ を $\leq$ でおきかえたエネルギー不等式を満足するので上記の見通しに従つて議論をすゝめることが可能である. エネルギー不等式から得られる次の評価を書いておこう.

$$(4.4) \qquad \|v^n(t,\cdot)\|_B \leq \|a\| \qquad (0 \leq t \leq T),$$

$$(4.5) \qquad \int_0^T \|\nabla v^n(t)\|_B^2 dt \leq \|a\|^2/2,$$

$$(4.6) \qquad \|v^n\|^2_{L_2(\hat{E})} = \iint_{\hat{E}} |v^n|^2 dx dt \leq \|a\|^2/2n.$$

§5 証明のいくつかの部分

(4.4)—(4.6) の評価から $\{v^n\}$ の適当な部分列 $\{v^{n'}\}$ がある $v^* \in \hat{H}^1_\sigma(\hat{B})$ に $L_2(\hat{B})$, $\hat{H}^1_\sigma(\hat{B})$ における弱収束の意味で収束することが判る. また, $v^*|\hat{E} = 0$ であり, 従つて $v^*|\hat{\Gamma} = 0$ なることが判る. これより標準的な議論によつて $v^*|\hat{\Omega} \in \hat{H}^1_\sigma(\hat{\Omega})$ となることが導かれる.

$u = v^*|\hat{\Omega}$ とおいて, これが (Pr. NC)$_0$ の解であることを示そうとすれば問題は u が (3.4) を満足するかということになる. $\varphi \in \mathcal{D}(\hat{\Omega})$ をとれば弱解 v^n は

$$(5.1) \qquad F(u^n, \varphi) = -(a, \varphi(0))$$

を満足する．ここで，F は (3.4) におけるものである．

(5.1)における極限移行を検討すると次の事柄が証明の核心であることが判る：

$$(5.2) \qquad \{u^n|\hat{\Omega}\} \text{ は } L_2(\hat{\Omega}) \text{ においてコンパクト．}$$

事情は (Pr.C) の場合に平行であるが，より微細な議論が必要となる．たとえば (Pr.C)の場合にそのまま使えた Aubin[ ] の compactness theorem も下の補題の形に modify されねばならないし，さらに，その補題の適用で事がおわるわけではない．（詳しくは [ ] 参照） 実際，Aubin型定理である補題から判ることは次の事柄である．

(命題5.1) 区間 (α,β) ~~および~~ および 領域 $\Omega\subset R^m$ を $(\alpha,\beta)\times\Omega\subset\hat{\Omega}$ なるようにとれば

$$(5.3) \qquad w_n(t) = P(\Omega)\left(u^n(t,\cdot)|\Omega\right) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

によって定義される $w_n : (\alpha,\beta)\longrightarrow H_\sigma(\Omega)$ は $L_2((\alpha,\beta); H_\sigma(\Omega))$ においてコンパクト集合をなす．なお，$P(\Omega)$は $L_2(\Omega)$ から $H_\sigma(\Omega)$への正射影である．

この命題の証明に用いられる補題は次のものである．

(補題) (Fujita-Sauer, [ ]) M_i $(i=0,1,2)$ をヒルベルト空間とし，作用素 $P: M_0\to M_1$ および $S: M_0\to M_2$ はいずれも線形コンパクトであるとする．また，

$$(5.4) \qquad Sv = 0 \implies Pv = 0 \qquad (v \in M_0)$$

が成立することを仮定する. さらに $X_i = L_2((\alpha,\beta); M_i)$ $(i=0,1,2)$ とおいて, $\hat{P}: X_0 \to X_1$, $\hat{S}: X_0 \to X_2$ を

$$(\hat{P}v)(t) = Pv(t), \qquad (\hat{S}v)(t) = Sv(t)$$

によって定義する. このとき $v_n \in X_0$ の列 $\{v_n\}$ に関し

(i) $\{v_n\}$ は X_0 で有界,

(ii) $\{\frac{d}{dt}\hat{S}v_n\}$ は X_2 で有界,

ならば $\{\hat{P}v_n\}$ は X_1 でコンパクトである.

さて, 補題を使用する際の(命題5.1の証明のために)記号の対応は次の通りである.

$$M_0 = \{u \in W_2^1(\Omega) \mid \operatorname{div} u = 0\},$$
$$M_1 = H_\sigma(\Omega)$$
$$M_2 = \mathcal{D}(A)' = \mathcal{D}(A) \text{ の dual space}.$$

ただし, A は Ω におけるストークスの作用素, すなわち

$$\mathcal{D}(A) = W_2^2(\Omega) \cap H_\sigma^1(\Omega), \quad A\varphi = -P\Delta\varphi \quad (\varphi \in \mathcal{D}(A))$$

によって定義される H_σ 内の自己共役作用素である. $\mathcal{D}(A)$ をヒルベルト空間とみなすときには $\|A\varphi\|_{H_\sigma(\Omega)}$ を $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ のノルムとして用いるものとする.

P, S は次のようにとる:

$$(5.5) \qquad P = P(\Omega) \ (W_2^1(\Omega) \text{ の } L_2(\Omega) \text{ への injection})$$

$$(5.6) \qquad Su(\varphi) = \langle Su, \varphi \rangle = (u, \varphi)_{L_2(\Omega)}, \quad (u \in M_0, \varphi \in \mathcal{D}(A))$$

肝心の v_n としては

$$v_n(t) = u^n(t,\cdot)|\Omega \quad \in W_2^1(\Omega) \qquad (\text{a.e. } t) \tag{5.7}$$

をとる。この v_n に対して補題の仮定の有界性が満足されていることは，(i) については (4.5) から直接判るが，(ii) については，不等式

$$|((w\nabla)\varphi, w)_\Omega| \leq C\, \|\nabla\varphi\|_{L_3(\Omega)}\, \|w\|_{L_2(\Omega)}\, \|w\|_{L_6(\Omega)}$$

$$\leq C\, \|A\varphi\| \cdot \|w\|_{L_2(B)} \cdot \|\nabla w\|_{L_2(B)}$$

が，すべての $w \in H_\sigma^1(B)$, $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ に対して成立することと，(4.4) とから得られる評価

$$\left\| \frac{d}{dt}\hat{S} v_{n(t)} \right\|_{M_2} \leq C\, \|\nabla u^n(t,\cdot)\|_B \qquad (\text{a.e. } t) \tag{5.8}$$

にふたたび (4.5) を考慮することによって判る。

引用文献

[1] Aubin, J. P., Un théorème de compacité, C.R. Acad. Sci. Paris 256 (1963), 5042-5044.

[2] Fujita, H., Remarks on the 2-dimensional non-stationary solutions of the Navier-Stokes equation in non-cylindrical domains, (in preparation).

[3] Fujita, H. and N. Sauer, Construction of weak

solutions of the Navier-Stokes equation in a noncylindrical domain, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 465-468

[4] ———, On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundaries, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 吉田記念号 (1970).

[5] Hopf, E. Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, Math. Nachr. 4 (1951), 213-231.

[6] Ladyženskaja, O. A., Example of nonuniqueness in the Hopf class of weak solutions for the Navier-Stokes equations, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. Tom 33 (1969) No. 1.: (English Translation) Math. USSR-Izvestija, Vol. 3 (1969), No. 1.