数理解析研究所講究録
第 106 巻 1971 年 145-152

半線型 Schrödinger 方程式について

大阪市立大 工　亀高 惟倫

1.

超流動の方程式は次の様な半線型 Schrödinger 方程式である
([1], [2])

$$
(1) \quad \begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + [p * |u|^2]u + g(x,t) & (x,t) \in R^3 \times [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in R^3 \end{cases}
$$

$u(x,t)$ は臨界温度以下でボース，アインシュタイン凝縮を起こしている ^4He の系を考えた時，^4He 一原子の波動函数である。([3]) 2原子間相互作用ポテンシャル $p(x)$ に対して次の様に仮定する。$p(x) = p_0(x) + p_1(x)$ ，$p_0(x) = p_0(-x) \geq 0$
$p_0(x) \in \mathcal{E}^1_{L^2}$ ，$p_1(x) \in L^\infty$ 。このとき

[定理 1.]

$f(x) \in \mathcal{E}^\infty_{L^2}$ ，$g(x,t) \in \mathcal{E}^\infty_t(\mathcal{E}^\infty_{L^2})$ とすると Cauchy 問題 (1) は一意的な大域解 $u(x,t) \in \mathcal{E}^\infty_t(\mathcal{E}^\infty_{L^2})$ を持つ。

2、

原子核のまわりの電子に対するHartree-Fockの方程式は次の様な半線型楕円型方程式系に対する固有値問題である。

$$(2)\quad \varepsilon_{j\sigma} u_{j\sigma} = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta u_{j\sigma} - \frac{Ze^2}{|x|} u_{j\sigma}$$

$$+\sum_{k,\sigma'} u_{j\sigma}\left[\frac{e^2}{|y|} \underset{y}{*} |u_{k\sigma'}|^2\right] - \sum_{k,\sigma'} u_{k\sigma}\left[\frac{e^2}{|y|} \underset{y}{*} \bar{u}_{k\sigma} u_{j\sigma}\right]$$

$$x \in R^3$$

$u_{j\sigma}$ は スピン σ の j 番目の電子に対する波動函数 $\varepsilon_{j\sigma}$ は固有値パラメーター, $M, \hbar, Z, e$ はいずれも正の定数である。([4] p.23 , [5] p.266) 原子核と電子, 及び電子同志の相互作用ポテンシャルはクーロンポテンシャルであって強い特異性を持っている。

3、

少し強引であるが定常問題がポテンシャルに対する仮定はもっと強める(すなわち特異性をもっとやわらげる)が(2)の形になる様な時間に依存する問題を考える

$$(3)\quad \begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + A[u,u]\,u + g(x,t) & (x,t) \in R^3\times[0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in R^3 \end{cases}$$

$u = {}^t(u_1,\cdots,u_N)$ $\quad g = {}^t(g_1,\cdots,g_N)$ $\quad f = {}^t(f_1,\cdots,f_N)$

$A[u,u] = A^{(0)}[u,u] + A^{(1)}[u,u]$

$$= \left(\sum_{l,m=1}^{N} a^{(0)}_{jklm}(y) \underset{y}{*} \bar{u}_l(y),\ u_m(y) \right)$$

$$+ \left(\sum_{l,m=1}^{N} a^{(1)}_{jklm}(y) * \bar{u}_l(y)\ u_m(y) \right) \qquad N\times N \text{ 行列.}$$

$$a^{(0)}_{jklm}(x) = a^{(0)}_{lmjk}(-x) \in \mathcal{E}^{1}_{L^1}, \qquad a^{(1)}_{jklm}(x) \in L^\infty$$

$$\sum_{j,k,l,m=1}^{N} \bar{\xi}_j \xi_k\, a^{(0)}_{jklm}(x)\, \bar{\eta}_l \eta_m \geq 0 \qquad {}^\forall x \in R^3,\ {}^\forall \xi, \eta \in C^N$$

$$\text{Imaginary part}\left[\sum_{j,k,l,m=1}^{N} \bar{\xi}_j \xi_k\, a^{(1)}_{jklm}(x)\, \bar{\eta}_l \eta_m \right] = 0, \qquad {}^\forall x \in R^3,\ {}^\forall \xi, \eta \in C^N$$

と仮定する。（もっと仮定をゆるくする事もできるが…）定常問題との関連は不明であって筆者が聞いた範囲では(3)が直接に物理的意味を持つという証言は得られなかった。しかし超流動の方程式(1)の未知函数の個数を増す方向での一般化にはなっている。むしろそうなる事を指針に(2)をながめながら上の様な仮定を置いた訳である。

【定理. 2】

$f(x) \in \mathcal{E}^\infty_{L^2}$, $g(x,t) \in \mathcal{E}^\infty_t(\mathcal{E}^\infty_{L^2})$ とする時 Cauchy 問題(3)は一意的な大域解 $u(x,t) \in \mathcal{E}^\infty_t(\mathcal{E}^\infty_{L^2})$ を持つ。

4.

(1)に対して物理的な取り扱いをする時には、2原子間相互作用ポテンシャル V は近距離にだけ働き、それに比して波動函数 $u(x,t)$ の空間的な変動はゆるやかであると考える。すな

わち函数 $f(x)$ を $\int f(x)\,dx = 1$ と思ってディラックの δ で置き代える訳である。この時にも (1) に対すると同様の存在定理を得たい所であるが空間3次元で考えると空間次元が高いための困難が現われる様なのでここでは大きく譲歩して空間1次元で考える。

$$(4)\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u + g(x,t) & (x,t) \in R^1 \times [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in R^1 \end{cases}$$

5.

非線型光学の方程式は ([6], [7])

$$(5')\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u - |u|^2 u + g(x,t) & (x,t) \in R^2 \times [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in R^2 \end{cases}$$

媒質の屈折率が電場の強度に依存して変化するという非線型効果がレーザー光線の場合の様に電場の強度の非常に大きい電磁波に対しては無視できなくなる。(5) は単色波が t 方向（この場合 t は時間にあらず！）に伝播すると考えた時の振巾の空間的な変動 $u(x,t)$ を記述する方程式である。この場合にもなめらかな大域解の存在を保障しようと思うと空間1次元で考えなければならない様である。

$$(5)\quad \begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^2 u + g(x,t) & (x,t)\in R^1\times[0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x\in R^1 \end{cases}$$

6.

(4)及び(5)は又電場を変えてながめると、プラズマの中を伝わるある種の波の場合（[8]）の様に非線型波動の伝播を記述する簡単なモデル方程式として非常に重要である。（[9]）
(4)及び(5)を特別の場合として含む様なもう少し広いわくで考える。

$$(6)\quad \begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(|u|^2)u + g(x,t) & (x,t)\in R^1\times[0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$p(z)\in C^\infty[0,\infty)$ とし $P(z)=\int_0^z p(\zeta)\,d\zeta$ とおいたとき適当な $z_0>0$ に対して適当な定数 $C\geq 0$, $P_0\geq 0$, $P_1\geq 0$ を取れば $^\forall z\geq z_0$ に対し不等式 $|p(z)|\sqrt{z}\leq C P(z)+P_0 z+P_1 z^2$ が成り立つものとする。（もっと広いわくで考える事ができる）この時、

[定理. 3]

$f(x)\in \mathcal{E}^\infty_{L^2}$, $g(x,t)\in \mathcal{E}^\infty_t(\mathcal{E}^\infty_{L^2})$ とすると Cauchy 問題 (6) は一意的な大域解 $u(x,t)\in \mathcal{E}^\infty_t(\mathcal{E}^\infty_{L^2})$ を持つ。

7.

定理2の証明の概略を示しておこう。$f(x)\in \mathcal{E}_{L^2}^{2k}$, $g(x,t)\in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^{2k})\cap \mathcal{E}_t^1(\mathcal{E}_{L^2}^{2k-2})\cap\cdots\cap \mathcal{E}_t^{k-1}(\mathcal{E}_{L^2}^2)$ とするとき ($k=1,2,3,\cdots$)

$$u_0(x,t)\equiv f(x)$$

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u_n}{\partial t} = -\Delta u_n + A[u_{n-1}, u_{n-1}]\,u_n + g(x,t) & (x,t)\in R^3\times[0,\infty) \\ u_n(x,0)=f(x) & x\in R^3 \qquad n=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

なる手続きで近似解の列 $u_n(x,t)\in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^{2k})\cap\cdots\cap \mathcal{E}_t^k(L^2)$ が定まる。$\|f\|_{\mathcal{E}_{L^2}^{2k}}$ 及び $\max\limits_{0\le t\le 1}\sum\limits_{i+j\le k-1}\left\|\dfrac{\partial^j g}{\partial t^j}\right\|_{\mathcal{E}_{L^2}^{2i+2}}$ のみで決まる $t_k>0$ があって $n\to\infty$ とするとき u_n は $\mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^{2k})\cap\cdots\cap \mathcal{E}_t^k(L^2)$ $[0,t_k]$ で極限 u に収束する事がわかり $u(x,t)$ は $[0,t_k]$ において Cauchy 問題 (3) の解となる

8.

任意に定めた $T>0$ に対して区間 $[0,T]$ において Cauchy 問題 (3) の解が存在する事をいうためには 7 の手続きで求めた局所解を次々につないで T まで到達できればよいが、この事を保証するには常套手段に従って (3) の解に対するアプリオリ評価があればよい。

[命題]

$k=1,2,3,\cdots$ に対し $u(x,t)\in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^{2k})\cap \mathcal{E}_t^1(\mathcal{E}_{L^2}^{2k-2})\cap\cdots\cap \mathcal{E}_t^k(L^2)$ なる (3) の解は次の様なアプリオリ評価を持つ

$$\sum_{i+j\le k}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(t)\right\|_{\mathcal{E}^{2i}_{L^2}} \le U_{2k}\left(t,\ \|f\|_{\mathcal{E}^{2k}_{L^2}},\ \max_{0\le s\le t}\sum_{i+j\le k-1}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j g(s)\right\|_{\mathcal{E}^{2i+2}_{L^2}}\right)$$

ただし U_{2k} は非負値を取る非減少局所有界函数である。

以上の事から大域解 $u(x,t)\in\mathcal{E}^0_t(\mathcal{E}^{2k}_{L^2})\cap\cdots\cap\mathcal{E}^k_t(L^2)$ $[0,T]$ の存在がわかる。k は任意の自然数，T は任意の正数だから，定理2が示された事になる。

References

[1] Pitaevskii, L. P., Vortex lines in an imperfect Bose gas, Sov. Phys. JETP, 13 (1961) 451-454.

[2] Gross, E. P., Hydrodynamics of a superfluid condensate, J. Math. Phys., 4 (1963) 195-2o7.

[3] 日本物理学会編 「低温の物理」 (1969)

[4] サウレス 「多体系の量子力学」 (1965)

[5] ランダウ＝リフシッツ 「量子力学 1」 (1967)

[6] Kelley, P. L., Self-focusing of optical beams, Phys. Rev. Letters, 15 (1965) 1oo5-1oo8.

[7] Akhmanov, S. A., Sukhorukov, A. P., and Khokhlov, R. V., Self-focusing and self-trapping of intense light beams in a nonlinear medium, Sov. Phys. JETP, 23 (1966) 1o25-1o33.

[8] Taniuti, T.,and Washimi, H., Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma, Phys. Rev. Letters, 21 (1968) 2o9-212.

[9] Taniuti, T., and Yajima, N., Perturbation method for a nonlinear wave modulation. I, J. Math. Phys., 1o (1969) 1369-2o24.