数理解析研究所講究録
第108巻 1971年 58-71

超函数論の代数的基礎付け

東大理学部　　柏原　正樹

§1. 序論

超函数の理論に於いて，色々な local cohomology，相対 cohomology の消滅が土台になることが屢々ある。例えば，超函数の定義は、$\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{C}^n$ に於ける純余次元性（即ち $\mathcal{H}^k_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ が $k \neq n$ のとき 0 になる）に基いている。実解析的 parameter をもつ超函数は，$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^m$ に於ける純余次性を拠り所として定義される。そこで我々は次の問題を考えよう。

問題A．Gが $\mathbb{C}^n$ の局所閉集合とする時，$\mathcal{H}^k_G(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})=0$ となる為の条件は何か？

この問題を大局化すれば，次の問題になる

問題B，Gが $\mathbb{C}^n$ の局所閉集合の時，$H^k_G(\mathbb{C}^n; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})=0$ となる為の条件は何か。

以下，Gの形が特別な場合に，問題A,B を考えよう。

§2. "q-propre"

実解析的parameterをもつ超函数を扱う際には，普通の複素解析多様体だけでなくて，$\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^m$ のような複素解析多様体と実解析多様体の積を考える必要がある。そこでいささか大袈裟であるが次の定義をしよう。

定義　$(X;\mathcal{O}_X)$を$\mathbb{C}$上の付環空間とする。Xが開集合の族U_λで被覆され，各λに対して解析空間X_λとその閉集合A_λがあって$(U_\lambda;\mathcal{O}_X|U_\lambda)$が$(A_\lambda;\mathcal{O}_{X_\lambda}|A_\lambda)$に同型とする。その時，$(X;\mathcal{O}_X)$を準解析空間と呼ぶ。

2つの準解析空間X,Yに対して，その積$X\times Y$が定義できる。実は，paracompact準解析空間は，解析空間のその閉集合への制限と同型である。

Xが準解析空間で，Zがその局所閉集合である時，相対cohomology $H^i_Z(X;\mathcal{O}_X)$ のかわりに $H^i[Z]$ と書く。又$\mathcal{H}^k[Z]$を$\mathcal{H}^k_Z(\mathcal{O}_X)$のかわりにもちいる。更に$Z'$が$Z$の閉集合ならば次のexact sequenceを得る。

$$\cdots\cdots\to H^k[Z']\to H^k[Z]\to H^k[Z-Z']\to H^{k+1}[Z']\to\cdots$$

$$\cdots\to\mathcal{H}^k[Z']\to\mathcal{H}^k[Z]\to\mathcal{H}^k[Z-Z']\to\mathcal{H}^{k+1}[Z']\to\cdots$$

定義　Xを解析多様体，Zをその局所閉集合とする。$z\in Z$　qを整数とする。$H^k[Z]=0$が$k\leqq n-q$　$(n=\dim X)$に対して成立する時，Zはq-propreであるという。$\mathcal{H}^k[Z]_z=0$が$k\leqq n-q$について成りたてばZが，点zにおいてlocally

q-propre であるという。任意の準解析空間 Y に対して $H^k[Z\times Y]=0$ （resp. $\mathcal{H}^k[Z\times Y]|_{\mathfrak{z}\times Y}=0$ ）が $k\leq n-q$ に対して成立する時，Z は普遍的に q-propre（resp. 普遍的に $\mathfrak{z}$ で locally q-propre）であるという。

次に Z が q-propre となる為の必要条件をだす為に2つの補題を掲げよう。

補題　$Z, X, \mathfrak{z}, q,$ を上の通りとする。X' を X の閉部分多様体とする。

i) Z が $\mathfrak{z}$ において（普遍的に）locally q-propre ならば，$Z\cap X'$ は X' の中で（普遍的に）locally q-propre である。

ii) Z が（普遍的に）q propre で，X' が完全交叉ならば，$Z\cap X'$ は X' の中で（普遍的に）q-propre である。

補題　$Z, X, \mathfrak{z}, q, n$ を上の通りとする。Z が q-propre（resp. $\mathfrak{z}$ で locally q-propre）ならば，$\Omega^{\pm}_{\mathfrak{z}}$ が trivial の時，$H^k_Z(X;\mathbb{C})=0$（resp. $\mathcal{H}^k_Z(\mathbb{C})=0$）が $k\leq n-q$ に対して成立する。

上の2つの lemma をあわせれば

命題 2.1.　$Z\subset\mathbb{C}^n$ が q-propre（resp. $\mathfrak{z}$ において locally q-propre）ならば，$\mathbb{C}^n$ の任意の m 次元閉部分多様体 X（resp. $\mathfrak{z}$ を含む $\mathbb{C}^n$ の m 次元部分多様体 X）に対して

$H^k_{Z\cap X}(X;\mathbb{C})=0$　（resp. $\mathcal{H}^k_{Z\cap X}(\mathbb{C}_X)=0$）が

$k \leq m-q$ に対して成立する。

この命題は $Z \subset \mathbb{C}^n$ が q-propre 或は locally q-propre になる~~為の~~必要条件を与えている。この条件は、十分条件であろうか。即ち

問題 C　$Z \subset \mathbb{C}^n$ の局所閉集合, z をその点, q を 0 と n の間の整数とする。Z が次の条件(*) を満たすとする。

(*) 任意の z を含む m 次元部分多様体 E に対して, $\mathcal{H}^k_{Z\cap E}(\mathcal{O}_E)_z = 0$ が $k \leq m-q$ に対して成立する。

その時, Z は z において局所的に q-propre か?

問題 D　$Z \subset \mathbb{C}^n$ を局所閉集合, q を 0 と n の間の整数とする。Z が次の条件(**) を満すとする。

(**) 任意の $\mathbb{C}^n$ の m 次元閉部分~~空~~多様体 E に対して, $H^k_{Z\cap E}(E;\mathcal{O}) = 0$ が $k \leq m-q$ に対して成立する。

その時, Z は q-propre か?

恐らくこれらの問題自体は虚であろう。しかし, ほかの付加的な条件のもとでこれらの問題が肯定的に解ける場合がある。その例をいくつか与えよう。

a) $q=n$ の時は, 問題 C, D は肯定的である。

b) $q=n-1$ ~~の~~, Z が $\mathbb{C}^n$ の閉集合で tube の時、

(i.e. $Z = \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}G$ の形をしている)

問題 D は肯定的である。

（証明）$\mathbb{R}^n$の任意の（線型）超平面Eに対して$H^0_{E\cap G}(E;\mathbb{C})=0$である。従ってG$\not\supset$Eである。従って ~~Gの~~ $\mathbb{R}^n-G$の凸包は$\mathbb{R}^n$である。又$H^1_G(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})=0$だから，$\mathbb{R}^n-G$は連結である。よってBochner's定理によって$H^1[G]=0$

C) Gが$\mathbb{C}^n$の閉凸集合の時，問題C, Dは肯定的に解ける。

D) Gが$\mathbb{C}^n$の２つの閉凸集合の差になっている時，問題Dは殆ど成立する。("殆ど"をいれたのは，まだ証明できていない部分がある為)

以下の部分で，上のc), d）の証明とそれに関係した話題を中心に話を進める。

尚，ZがXの解析集合のときは，その"locally q-propre"という性質はZの次元に関する条件で完全に記述できる。(Scheja, Trautmann)

§3 Cohomologyの射影的極限

ここでの目的は次の命題を証明することである。

命題3.1. $Z_m\subset X$を解析空間Xの局所閉集合の減少列とする。$Z=\cap Z_m$とおく。各Z_mが（普遍的に）q-propreならば，Zは（普遍的に）q-propreである。

その為に次の定義をする。

定義（EGA 0_{III} §13.1, §13.2 ~~を参照~~ による）$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$を有向集合$\Lambda$を添字集合とする射影系とする。$\{A_\lambda\}$が条件(ML)

を満たすというのは、任意の$\lambda_0 \in \Lambda$に対して$\lambda_1 \geqq \lambda_0$が存在して，$f_{\lambda_0\lambda}(A_\lambda) = f_{\lambda_0\lambda_1}(A_{\lambda_1})$がすべての$\lambda \geqq \lambda_1$に対して成立することである。（MLは Mittag Leffler の略）

射影的極限は左完全であるが，一般に完全列を完全列に移すとは限らない。しかし，

補題3.2 Λを、共終な可算部分集合をもつ有向集合とする。$0 \to A_\lambda \to B_\lambda \to C_\lambda \to D_\lambda$ は，Λを添字集合とするアーベル群の射影系の完全列とする。もしも，$\{A_\lambda\}$が（ML）を満たせば，

$$0 \to \varprojlim A_\lambda \to \varprojlim B_\lambda \to \varprojlim C_\lambda \to \varprojlim D_\lambda$$

は完全列である。

補題3.3 $0 \to A_\lambda \to B_\lambda \to C_\lambda \to 0$ がアーベル群の射影系の完全列とする。その時

(i) $\{B_\lambda\}$が(ML)を満せば，$\{C_\lambda\}$も(ML)を満す。

(ii) $\{A_\lambda\}$と$\{C_\lambda\}$が(ML)を満せば，$\{B_\lambda\}$も(ML)を満す。

補題3.4 Λを補題3.2と同じ条件を満す有向集合とする。$(K_\lambda^{\cdot})_{\lambda\in\Lambda}$をアーベル群の複体の射影系とする。

$$h^n : H^n(\varprojlim K_\lambda^{\cdot}) \to \varprojlim H^n(K_\lambda^{\cdot})$$

を canonical な準同形とする。その時

(i) $(K_\lambda^{n-1})_{\lambda\in\Lambda}$ が (ML) を満せば，h^n は surjective である。

(ii) $(K_\lambda^{n-2})_{\lambda\in\Lambda}$，$(K_\lambda^{n-1})_{\lambda\in\Lambda}$，$(H^{n-1}(K_\lambda^{\cdot}))_{\lambda\in\Lambda}$ が (ML) を満せば，

h^nはbijectiveである。

以上の証明は EGA 0_{III} §13参照

補題3.5 $A_\lambda \to B_\lambda \to C_\lambda \to D_\lambda$ をアーベル群の射影系の完全列とする。$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は(ML)を満すとする。更に，任意のλと$\mu \geqq \lambda$に対して，$D_\eta \to D_\lambda$ が単射となるようなり$\eta \geqq \mu$が存在すると仮定する。その時 $\{B_\lambda\}$は(ML)を満す。

以上の補題がわかれば，次の定理を証明できる。

定理3.6，Xを位相空間，Zをその閉集合 $\{U_n\}_{n=1,2,\cdots}$ をXの開集合の増大列で，$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ を満すとする。$\mathcal{F}$をX上の(アーベル群の)層とする。すると，$h^k: H_Z^k(X;\mathcal{F}) \to \varprojlim_n H_{Z\cap U_n}^k(U_n;\mathcal{F})$ というcanonical homomorphismがある。

(i) h^k は全射である。

(ii) $\{H_{Z\cap U_n}^{k-1}(U_n;\mathcal{F})\}_n$ が(ML)を満せば，h^k は全単射。

定理3.7 Xを位相空間，$\mathcal{F}$をその上の(アーベル群の)層，$\{Z_n\}$ をXの閉集合の減少列，Zをその共通集合とする。

$h^k: H_Z^k(X;\mathcal{F}) \to \varprojlim H_{Z_n}^k(X;\mathcal{F})$ をcanonical なhomomorphismとする。

(i) $\{H_{Z_n}^k(X;\mathcal{F})\}_n$ が(ML)を満せば，h^k は全射．

(ii) $\{H_{Z_n}^{k-1}(X;\mathcal{F})\}_n$ が(ML)を満せば，h^k は単射である。

定理3.7の(i)だけ簡単に証明しよう。$\{H^k_{Z_n}(X;\mathcal{F})\}_n$ が(ML)を満すから，補題3.5と相対cohomologyの完全系列を用いれば $\{H^{k-1}(X-Z_n;\mathcal{F})\}$ も(ML)を満す。定理3.6と補題3.2から

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{k-1}(X-Z;\mathcal{F}) & \to & H^k_Z(X;\mathcal{F}) & \to & H^k(X;\mathcal{F}) & \to & H^k(X-Z;\mathcal{F}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\
\varprojlim H^{k-1}(X-Z_n;\mathcal{F}) & \to & \varprojlim H^k_{Z_n}(X;\mathcal{F}) & \to & H^k(X;\mathcal{F}) & \to & \varprojlim H^k(X-Z_n;\mathcal{F})
\end{array}$$

という完全系列の可換図式を得る。五補題から(i)がでる。

定理3.1は上の定理3.7の系である。

§4 q-propre の例とそのつくり方

この§では，具体的に，$\mathbb{C}^n$の与えられた局所閉集合が q-propreであることを計算する手段を述べよう。その鍵は次の一般的な定理にある。

定理4.1 X_0, X_1を解析空間，Z_0, Z_1を夫々の閉集合とする。更に a) $Z_1 \neq X_1$, X_1 は compact（$H^0(X_1;\mathcal{O}_{X_1})=\mathbb{C}$）; b) $H^k[Z_0 \times Y]=0$ が $k<r$ なる任意の k と任意の解析空間（resp. 準解析空間）Y に対してなりたつ；を仮定する。その時、

$H^k[Z_0 \times Z_1 \times Y]=0$ が任意の $k<r+1$ と任意の解析空間（resp 準解析空間）Y に対して成立する。

［証明］

$$H^{k-1}[Z_0\times(X_1-Z_1)\times Y]\to H^k[Z_0\times Z_1\times Y]\to H^k[Z_0\times X_1\times Y]\to H^k[Z_0\times(X_1-Z_1)\times Y]$$

というexact sequenceを考えよう。仮定(b)によって，第一項と第3項は $k\leqq r-1$ のとき消える。従って $H^k[Z_0\times Z_1\times Y]=0$

が $k<r$ のときに成立つ。又、$k=r$ のとき，

$$0\to H^r[Z_0\times Z_1\times Y]\to H^r[Z_0\times X_1\times Y]\xrightarrow{\beta} H^r[Z_0\times(X_1-Z_1)\times Y]$$

という完全系列を得る。従って，β が単射であることを言えば十分である。$f: X_0\times X_1\times Y\to X_0\times Y$ を射影としよう。Grauertの定理（coherent sheafの direct image に関する）を用いれば，$R^kf_*(\mathcal{O}_{X_0\times X_1\times Y})=H^k(X_1;\mathcal{O}_{X_1})\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{X_0\times Y}$ である。（直接証明する事も困難でない。）そこで次の Spectral Sequence を考えよう。

$$E_2^{pq}=H^p_{Z_0\times Y}(X_0\times Y;R^qf_*(\mathcal{O}_{X_0\times X_1\times Y}))\underset{p}{\Rightarrow}H^{p+q}_{Z_0\times X_1\times Y}(X_0\times X_1\times Y;\mathcal{O})$$

$$E_2^{pq}=H^p_{Z_0\times Y}(X_0\times Y;\mathcal{O})\otimes_{\mathbb{C}}H^q(X_1;\mathcal{O}_{X_1})=H^p[Z_0\times Y]\otimes_{\mathbb{C}}H^q(X_1;\mathcal{O}_{X_1})$$

である。一方 H^n term は　$H^n[Z_0\times X_1\times Y]$ となる。仮定 b) によって，$E_2^{pq}=0$ for $p\leqq r-1$ である。従って

$$e: H^r[Z_0\times X_1\times Y]\to E_2^{r,0}=H^r[Z_0\times Y]\otimes_{\mathbb{C}}H^0(X_1;\mathcal{O}_{X_1})=H^r[Z_0\times Y]$$

今 $p\in X_1-Z_1$ とする。層の homomorphism $\mathcal{O}_{X_0\times X_1\times Y}\to\mathcal{O}_{X_0\times p\times Y}\cong\mathcal{O}_{X_0\times Y}$ から，homomorphism

$$\gamma: H^r[Z_0\times(X_1-Z_1)\times Y]\to H^r[Z_0\times Y]$$

を得る。$\gamma\circ\beta: H^r[Z_0\times X_1\times Y]\to H^r[Z_0\times Y]$ は e に同じ。従って同型である。故に β は単射となる。　QED.

定理4.1を繰り返し用いれば，$H^k[Z]=0$ for $k\leqq r$ となるような Z がたくさんつくれる。その出発点 $H^0[Z\times Y]=0$ をだす為に次の補題に注意しよう。

補題4.2. Zを解析空間Xの閉集合とする。$H^0[Z]=0$ならば，任意の準解析集合Yに対して$H^0[Z\times Y]=0$が成立する。

系　Z_0が$\mathbb{C}$の閉集合で$Z_0\neq\mathbb{C}$とする。Z_j ($j=1,\cdots,n$) は$\mathbb{C}$の有界閉集合とする。その時，$H^k[Z_0\times Z_1\times\cdots\times Z_n]=0$ for $k\leqq n$; i.e. $Z_0\times\cdots\times Z_n$は普遍的に1-propre

定理4.1から得られるZ_1はcompactでなければならない。従って，non-compactな区をつくるのには使えない。そこで次の命題が必要になる。

命題4.3. $Z_1\subsetneqq\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$をclosed set，$Z_i$ ($i=2,\cdots,n$) を$\mathbb{C}$の真の閉部分集合とする。その時，$Z_1\times\cdots\times Z_n$は普遍的に1-propreである。

［証明］1次変換でZ_jを移してやって，$Z_1\subset\{z\in\mathbb{C};\rho\leqq|z|\leqq1\}$
$Z_j\subset\{z\in\mathbb{C};\ 0<|z|\leqq1\}$としてよい。$f_l:\mathbb{C}^n\hookrightarrow\mathbb{C}^{n+1}$を$(z_1,\cdots,z_n)\rightsquigarrow(z_0,\cdots,z_n)$　$z_0=z_1^l z_2\cdots z_n$とする。$P_l=\{(z_0,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^{n+1};\ z_j\in Z_j,\ \rho^l<|z_0|\}$とする。系によって$P_l$は普遍的に1-propre，従って$D_l=f_l^{-1}(P_l)$も普遍的に1-propreである。他方，$D_l$は増大列で$Z=Z_1\times\cdots\times Z_n=\bigcup D_l$，$D_l$は$Z$でopenである。従って定理3.6により$Z$も普遍的に1-propreである。QED

系　$Z=\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n;\mathrm{Im}\,z_j\leqq0$ for $j=1,\cdots,n\}$，$\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n;-1<\mathrm{Im}\,z_1\leqq0$
$\mathrm{Im}\,z_j\leqq0\}$は普遍的に1-propre.

§5 GLOBAL COHOMOLOGY の消滅

§2に掲げた問の解答として次の定理が成立つ。

定理5.1　Gを$\mathbb{C}^n$の凸開集合とする。その時，次の2条件は同値である。（qは整数≥1）

(i) 任意のq次元 (complex) linear variety Lは，Gに含まれない。

(ii) Gは，普遍的にq-propreである。

（証明）

ii)⇒i)　命題2.1により$H^q_{G\cap L}(L;\mathbb{C})=0$。従って$G\not\supset L$。

i)⇒ii)　G°をGのpolar $\{l\in(\mathbb{C}^n)^*;\ \mathrm{Im}\,l(z)\leq 1 \text{ for } \forall z\in G\}$とする。（$G\ni 0$と仮定する）。$G$が$q$次元linear subspaceを含まないから，G°は$(n-q)$次元linear subspaceに含まれない。従って$(n-q+1)$コの1次独立なlinear forms $l_1,\cdots,l_{n-q+1}$がG°にある。即ち$G\subset\{z;\ \mathrm{Im}\,l_j\leq 1 \text{ for } j=1,\cdots,n-q+1\}$。$l_j=z_{j+q-1}$と仮定してよい。よって$G\subset\{z;\ \mathrm{Im}\,z_j\leq 1 \text{ for } j=q,\cdots,n\}$。$G$は凸開だから，$G=\bigcap_{m=0}^{\infty}G^{(m)}$，$G^{(0)}=\{z;\ \mathrm{Im}\,z_j\leq 1 \text{ for } j=q,\cdots,n\}$，$G^{(m)}=G^{(m-1)}\cap\{z\in\mathbb{C}^n;\ \mathrm{Im}\,l_m(z)\leq 1\}$，$l_m\in G^\circ$とできる。

$f_m:\mathbb{C}^n\hookrightarrow\mathbb{C}^{n+m}$を$(z_1,\cdots,z_n)\mapsto(z_1,\cdots,z_n,l_1,\cdots,l_m)$とおく。

$P_m=\{(z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_m)\in\mathbb{C}^{n+m};\ z\in G^{(0)},\ \mathrm{Im}\,w_j\leq 1\}$とおけば$P_m$は普遍的に　q-propreである。従って$G^{(m)}=f_m^{-1}(P_m)$は普遍的にq-propreとなる。命題3.1によって，Gはq-propreである。Q.E.D.

定理5.1と全く同じ方向で次の定理を得る。

定理5.2. Gを$\mathbb{R}^n$の閉凸集合, $q \geqq 1$を整数とする。その時次の2条件は同値である。

(i) Gはq次元(real) linear varietyを含まない。

(ii) $T(G)=\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}G$は普遍的に$q$-propreである。

次に§2のd)の解答にあたる次の定理を掲げよう。

定理5.3. $G \subset \mathbb{C}^n$を,閉凸集合G_1, G_2の差G_1-G_2であるとする。$q \geqq 1$は整数である。その時,次の2条件は同値である。

(i) 任意のq次元linear subvariety Lに対して$H^0_{L \cap G}(L;\mathbb{C})=0$

(これは次のように述べることができる; Lの空でない開集合で, $L \cap G$で閉となるものが存在しない)

(ii) Gは普遍的にq-propreである。

定理5.4. $G \subset \mathbb{R}^n$を2つの閉凸集合の差とする。その時,次の2条件は同値

(i) 任意のq次元(real) linear variety Lに対して$H^0_{L \cap G}(L;\mathbb{C})=0$

(これは上と同様な言いかえができる)

(ii) $T(G)=\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}G$は普遍的に$q$-propreである。

詳しい証明は略するが,定理5.3の証明は完全ではない。次の予想が成立すれば,定理5.3が成立することがわかっている。

予想 $\{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; \operatorname{Im} z_j \leqq 0 \text{ for } j=1,\cdots,n,$ $\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Re} z_3 > 0\}$ は普遍的に ~~3~~ 1-propre である。

§6 Local Cohomology の消滅

次に，local q-propre に関する諸定理を述べよう。その為に次の補題を用意する。

補題6.1 $B_p = \{z \in \mathbb{C}^p ; \operatorname{Im} z_j \leqq 0 \text{ for } j=1,\cdots,p\}$ とする。その時，B_p における0の近傍 U_p があって，$U_p \times B_{n-p}$ が普遍的に1-propre である。（U_p は p にだけ依存して n によらない）

この補題を用いれば，定理5.1を局所化したものにあたる次の定理が証明できる。

定理6.1 G を $\mathbb{C}^n$ の閉凸集合，$z \in G$，$q \geqq 1$ を整数とする。その時，次の2条件は同値である。

(i) 任意の q 次元 (complex) linear subvariety $L \ni z$ に対して，$G \cap L$ は L に於ける z の近傍でない。(i.e. $\mathcal{H}^0_{G\cap L}(\mathcal{O}_L)=0$)

(ii) G は z において普遍的に locally q-propre である。

証明は次のようにしておこなわれる。z の十分小さい近傍 U と $G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset \cdots \supset G^{(m)} \supset \cdots$ という減少列で $G = \cap G^{(m)}$ となる閉凸集合の列で $U \cap G^{(j)}$ が普遍的 q-propre となるものを旨くみつけだす。すると $U \cap G$ は普遍的に q propre だから，

$H^k[(U\cap G)\times Y]=0$ for $k\leqq n-q$。ここでUを十分小さくとれたから，$\mathcal{H}^k[G\times Y]|_{\overset{\circ}{x}\times Y}=0$ を得る。

定理6.2 Gを$\mathbb{R}^n$の閉凸集合，$\overset{\circ}{x}\in G$，$q\geqq 1$ とする。その時，次の2条件は同値

(i) 任意の$\overset{\circ}{x}$を通るq次元 (real) linear subvariety に対して，$G\cap L$は$\overset{\circ}{x}$の近傍でない。(i.e. $\mathcal{H}^0_{G\cap L}(\mathcal{O}_L)=0$)

(ii) $T(G)=\mathbb{R}^n\times\sqrt{-1}G$は，Real parat が$\overset{\circ}{x}$となる各点に於て普遍的に locally q-propre。

$\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}^n$の場合は，定理2から，$\mathbb{R}^n$が普遍的に locally-1-propre なることがわかる。従って，$\mathcal{H}^k[\mathbb{R}^n\times Y]=0$ for $k\leqq n-1$ となる。このlocal cohomology が $k\geqq n+1$ で消えることは，$\mathbb{C}^n-\mathbb{R}^n$が$n$コの stein open set で被覆されることから直ちに得られる。従って，$\mathbb{R}^n\times Y$は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n\times Y}$ に関して純 n-余次元である。

付記 §5の末尾にあげた予想は，肯定的に証明された。従い，定理5.3は，完全に証明されたことを注意しておく。