数理解析研究所講究録
第108巻 1971年 84-288

超函数論（Hyperfunction）における Fourier 変換の理論とその応用

河合隆裕

目　次

Ch. 0. 序

„Generalized function"の理論は、δ-函数, 一般にsingular integral の意味付けと. Fourier変換の理論の拡張とを二つの動機として形成されてきたと言ってもよいだろう。前者の目的には超函数（以下この小文では、Hyperfunctionを超函数と呼び、Schwartzの„超函数"はdistributionと呼ぶことにする。）は極めて自然でありしかも偏微分方程式論にも極めて有用であることが既に知られている。（佐藤[41], [42], [43], 小松[27], [28], [48], Harvey[15], Schapira[45]等。）では、後者の目的の為には超函数的approachは如何に行えばよいであろうか。又、その解析学への有効性はどのような物であろうか。それに答えることを以下の目標とする。基本的ideaは佐藤[41] (p.23~p.25.)にある。方法は、Hörmander [19], 小松[26], [28], Martineau[36], [38]の影響が大きい。特にHörmander

[19] は決定的に有用であった。更に Ch. 2 においては、Ehrenpreis [4]~[7], Malgrange [33], [35], Hörmander [17], [18], の仕事を超函数論の枠の中で考えることにより一般化する。超函数論が偏微分方程式論で極めて有効であることが知られるであろう。特に、Ch. 2 §3 の論法は実解析函数の取り扱いにおいて、かなり有効な物であると思う。又、Ch. 2 §1 の結果は自然な物でさして驚くべき物ではないが、その方法論はかなり興味深いと思われる。尚 Ch. 2 §5 は、やや他の節とは異質であるが、§4 の後半と深く関係するので、この小文に含めることとした。

最後に、この周辺への興味をかきたて、かつ終始適切な御助言を賜った佐藤・小松両先生に御礼を申し上げたい。このお二人無しにはこの小文は書かれ得なかったであろう。又、"佐藤・小松セミナー"の参加者の方々からは多くの刺激を受けた。特に飯原・森本両先生にはい

ろいろ相談相手になって頂いたことに対し
感謝致します。又、Gårding 教授には、Ch. 2 §4
Th 4.3.2. について suggestion を頂いたことを感謝
致します。又、Martineau 教授には、Ch. 2 §2.
における Def. 2.1.12. を得る動機を与えられたこと
を感謝致します。

Ch. 1 Fourier変換

§1 Fourier変換の捕え方及び定義

この節では，Fourier変換を超函数論の立場から捕えるにはどのように考えればよいか，ということについて考察し，次にその考えを定式化する為に必要となる$\mathbb{R}^n$のあるcompactification及びそれに関連したsheafの定義を行う。そしてそれらを用いて，Ch1で得られる結果（§4参照）を要約しておく。

1.1. 出発点（佐藤[4]参照）

Fourier変換の基本公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}dx = 2\pi\delta(\xi)$ をどのように捕えるのが最も自然であろうか。多分distributionを知らない物理学者なら次のようにするのではあるまいか。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}dx + \int_{0}^{\infty} e^{ix\xi}dx$$

$$= \begin{cases} 1/i\xi & (\mathrm{Im}\,\xi < 0) \\ -1/i\xi & (\mathrm{Im}\,\xi > 0) \end{cases}$$

ここで$\mathrm{Im}\,\xi$を仮想的に0とすれば，

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}dx$ は実軸上、原点を除いて 0 かつ、原点である特異性を持つことがわかる。もしその物理学者が Cauchy の積分公式を知っているなら、その特異性は δ-函数に相当することを見抜くであろう。

正に、これは超函数論的に Fourier 変換を捕えたことになる。しかも、Fourier 解析が、元来、"singular な函数" を解析函数を用いて研究しようとする物であったとすれば、その考え方にもっとも忠実な立場でもある。

しかし、上の "物理学者の考え方" には、まだ数学的には一つ問題がある。それは原点での ambiguity である。実際、$\int_{-\infty}^{0} e^{ix\xi}(1+\delta(x))dx + \int_{0}^{\infty} e^{ix\xi}(1-\delta(x))dx$ 等と上の積分を考えてはいけない、という理由はない。しかし、それは一般に原点に support をもつ超函数の Fourier 像だけの ambiguity、即ち、entire であってしかも $\forall\varepsilon>0$ $O(e^{\varepsilon|\xi|})$ の程度の増大度をもつような函数である。

従って実軸を越えて正則な函数で、しかも無限遠方である増大度をもつものを modulo として $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}dx$ は捕えるのがより適切である。しかも、我々は $\mathbb{R}^n$ の上で analysis を行っているのだから、$\mathbb{C}^n$ 全体が essential に用いられる必要もないはずである。そこで我々は、増大度を捕える為に、$\mathbb{R}^n$ の compact 化 D^n を作り、$D^n \times i\mathbb{R}^n$ 上にある sheaf $\tilde{\mathcal{O}}$ を定義して、それに関する (D^n に support をもつ) relative cohomology 群として Fourier 超函数の空間 $\mathcal{Q}(D^n)$ を作る。更にこれを局所化することも考えた方が微分方程式論の立場からは都合がよい。(Schwartz の理論において、$\mathcal{S}'$ は sheaf を為さないことに注意しよう。)

以上が、Fourier 変換を超函数的に捕えようという以下の試みの出発点である。

1.2. 定義

Def. 1.2.1. $D^n = \mathbb{R}^n \cup S^{n-1}_{\infty}$, 即ち, D^n と

は $\mathbb{R}^n$ に無限遠球面 S_∞^{n-1} を付け加えた物。

D^n の開集合の base としては，

$$\begin{cases} \text{i) open convex cone} \\ \text{ii) } \mathbb{R}^n \text{内の open, relatively compact, convex な集合} \end{cases}$$

の全体をとることにする。

$D^n \times i\mathbb{R}^n$ $(i=\sqrt{-1})$ にはこの D^n の位相から誘導される直積位相を与える。

Def. 1.2.2 (sheaf $\tilde{\mathcal{O}}$ の定義)

$$\tilde{\mathcal{O}}_x = \begin{cases} \mathcal{O}_x & x \in \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n \\ \varinjlim_{K\times iI \downarrow \{x\}} \tilde{\mathcal{O}}(K\times iI) & x \in S_\infty^{n-1} \times i\mathbb{R}^n \end{cases}$$

但し $\tilde{\mathcal{O}}(K\times iI) \underset{\mathrm{Df}}{=} \{ f(z) \in \mathcal{O}(K\times iI \cap \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n) \mid$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_\varepsilon$ s.t. $|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|z|} \}$

勿論 $\mathcal{O}$ は通常の正則函数の sheaf.

Def. 1.2.3 (sheaf $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$ の定義)

$$\underset{\sim}{\mathcal{O}}_x = \begin{cases} \mathcal{O}_x & x \in \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n \\ & \text{かつ} \end{cases}$$

$$\left[\ \varinjlim_{K_m \times i I_m} \underset{\sim}{\mathcal{O}}^m(K_m \times i I_m) \qquad x \in S_\infty^{n-1} \times i\mathbb{R}^n\right.$$

但し $\underset{\sim}{\mathcal{O}}^m(K_m \times i I_m) \underset{\text{Df}}{=} \{ f \in \mathcal{O}(K_m \times i I_m \cap \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n) \mid |f(z)| \leq A e^{-\frac{1}{m}|z|} \}$

勿論 $\underset{\sim}{\mathcal{O}}_x$ の定義が x の基本近傍系 $K_m \times i I_m$ の取り方によらないことは明らか。

Def. 1.2.4（Fourier 超函数の空間の定義）

$\Omega \subset \mathbb{D}^n$ として、

$H^n_\Omega(V, \tilde{\mathcal{O}}) \underset{\text{Df}}{=} \mathcal{Q}(\Omega)$（但し V は Ω の $\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n$ での近傍、かつ Ω は V 内での閉集合）。

特に $\Omega = \mathbb{D}^n$ の時の $\mathcal{Q}(\mathbb{D}^n)$ を、緩増加 Fourier 超函数の空間と呼ぶ。

又、$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\mathbb{D}) \underset{\text{Df}}{=} \mathcal{P}_*$ を、急減少正則函数の空間と呼ぶ。

勿論、定義から、$f(z) \in \mathcal{P}_* \iff \exists \delta > 0$ s.t. $f(z) \in \mathcal{O}(|\operatorname{Im} z| < \delta)$ かつ、そこで $|f(z)| \leq A e^{-\delta|z|}$ である。

1.3. Fourier 超函数の基本的性質(要約)
(証明 etc. は §4, §5 参照)

i) $\{\mathcal{Q}(\Omega)\}$ は D 上の flabby sheaf

ii) $K \subset D$ (K : compact) とする時
$H^n_K(\tilde{\mathcal{O}}) \cong (\mathcal{Q}(K))'$ 特に
$\mathcal{Q}(D) \cong (\mathcal{P}_*)'$ これらは FS-space と DFS-space の間の pairing となっている。(FS-space, DFS-space の定義, 性質については、小松 [26], [28] 参照)

iii) $\mathcal{Q}(D) \ni \mu$ に対し $\mu = \sum_{j=1}^{2^n} \mu_j$, 但し $\operatorname{supp} \mu_j \subset$ 閉第 j 象限 と分解する時、$\langle \mu_j, e^{iz\zeta} \rangle \underset{\mathrm{df}}{=} F_j(\zeta)$ は $\zeta \in \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}$(開第 j 象限) として well-defined かつ正則であり、しかも、$\{F_1, \cdots, F_{2^n}\}$ は $H^n_D(\tilde{\mathcal{O}})$ の (Čech cohomology としての表現として) 元を定める。これは cohomology class として、μ にのみ依存し well-defined である。これを、$\mathcal{F}_s\mu$

(略して $\mathcal{F}\mu$) と書く。

iv) 一方 $\mathcal{S}_*$ は容易に判るように classical なFourier変換に対して stable であり、従って duality により、$\mathcal{Q}(D)$ $(\cong(\mathcal{S}_*)')$ の元 μ の Fourier変換 $\mathcal{F}_d$ を定義できる。これは $\mathcal{Q}(D)$ と $(\mathcal{S}_*)'$ の自然な対応により、iii) の $\mathcal{F}_S$ と一致する。即ち、

$$\sum \int_{-\infty\pm i0}^{\infty\pm i0}\cdots\int F_j(\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta = \langle \mu, \hat{\varphi}\rangle \underset{\text{by def.}}{=} \langle \mathcal{F}_d\mu, \varphi\rangle$$

が成立する。ここで $\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0}\cdots\int d\zeta$ etc. は、

$\varphi(\zeta)$ の正則域に応じて十分小さい ε をとって

$$\int_{-\infty+i\varepsilon(1,1,\cdots,1)}^{\infty+i\varepsilon(1,1,\cdots,1)}\cdots\int d\zeta$$

なる積分を行うの意である。

(それは定義から ε のとり方に依存しない。(∵ Cauchyの積分定理)) もちろん $\sum$ は $(\underbrace{\pm1,\pm1,\cdots,\pm1}_{j\text{個}})$ のすべての組み合せについての和の意である。

§2 Vanishing of cohomology

この節では、$D^n \times i\mathbb{R}^n$ の中の十分沢山な集合に対して、$\tilde{\mathcal{O}}$-係数の p次 cohomology 群が、$p \geq 1$ の時消滅することを証明する。

通常の Cartan の Th.A., B. が超函数論で重要であったのと同じように、この節と次節は Fourier 変換の基礎付けで重要な物である。

1. Ehrenpreis および Hörmander による所謂 "cohomology with bounds" の理論の一つの改良とも見れよう。(その idea は佐藤 [41] による。)

この節は Hörmander [19] の hard analysis を小松 [26] の soft analysis を用いて我々に都合のよい形に書き直したものである。

2.1 Vanishing of cohomology

Th. 2.1.1. Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の擬凸領域、$\sup_{z \in \Omega} |\mathrm{Im}\, z| \leq M < \infty$ とする。この時 φ を Ω での多重劣調和函数として、

$X_j \underset{\mathrm{Df.}}{=} \{u \in L^2_{(p,q-1)}(\Omega; \frac{1}{j}|z| +$

$4\log(1+|z|^2)+\varphi(z))\}$,

$Y_j \underset{\mathrm{Df}}{=} \{u \in L^2_{(p,q)}(\Omega;\ 1/j\,|z| + 2\log(1+|z|^2) + \varphi(z))\}$,

$Z_j \underset{\mathrm{Df}}{=} \{u \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega;\ 1/j\,|z| + \varphi(z))\}$

と定め、$X \underset{\mathrm{Df}}{=} \varprojlim_j X_j$, $Y \underset{\mathrm{Df}}{=} \varprojlim_j Y_j$,

$Z = \varprojlim_j Z_j$ と定義する。ここで記号は Hörmander [19] に従った。即ち $L^2_{(p,q)}(\Omega;\ \varphi(z)) \ni f \Longleftrightarrow f$ は (p,q)-form $\sum_{|I|=p,\,|J|=q} f_{I,J}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J$ であって $\sum \int |f_{I,J}|^2 e^{-\varphi(z)}\, dV < \infty$ となる物、とする。又、$|z|$ は、$z_j = 0$ の付近では適当に修正して、$\mathbb{C}^n$ 上で C^∞ かつ convex となるようにしてあるとする。この時

$$X \xrightarrow[\bar\partial]{} Y \xrightarrow[\bar\partial]{} Z$$ は exact である。

ここで $\bar\partial$ は、distribution sense で定められた densely-defined closed operator である。

証明] $(X_j)'$ etc. の表現空間として、

$L^2_{(p,q-1)}(\Omega, -1/j\,|z| - 4\log(1+|z|^2) - \varphi(z))$

etc. を各々とることにしておけば、 $\bar{\partial}$ の adjoint operator は ϑ となる。(但し、
$\vartheta f \underset{\mathrm{Df}}{=} (-1)^{p-1} \sum_{I,k}{}' \sum_j \partial f_{I,jk} / \partial z_j \, dz^I \wedge d\bar{z}^k$)

ここで、$\sum t_j \bar{t}_k \, \partial^2 / \partial z_j \partial \bar{z}_k \log(1+|z|^2)$
$= (1+|z|^2)^{-2} (|t|^2 (1+|z|^2) - |\langle t, z \rangle|^2)$
$\geqq (1+|z|^2)^{-2} |t|^2$ により、Hörmander [19] p.105. Th. 2.2.1′ を用いると、
$X_j \xrightarrow{\bar{\partial}} Y_j \xrightarrow{\bar{\partial}} Z_j$ が exact になる。
従って $X_j' \underset{\vartheta}{\leftarrow} Y_j' \underset{\vartheta}{\leftarrow} Z_j'$ も exact.
一方、X_j' etc は Hilbert 空間故、その injective limit X' etc は明らかに DFS*-space となる。(小松 [26] p.368. 参照。ここで DFS*-space とは、Banch 空間 X_j と $X_j \xrightarrow[u_{jk}]{} X_k$ なる弱compact 写像の pair により定まる injective limit の空間を言うのであった。) 従って DFS*-space に対する Serre-小松の補題 (小松 [26] p.381 Th. 19. 即ち
$X \xrightarrow[u_1]{} Y \xrightarrow[u_2]{} Z$ が $u_0 \circ u_1 = 0$ を満たし

しかも $\mathrm{Im}\, u_1$, $\mathrm{Im}\, u_2$ が closed なら
$(\mathrm{Ker}\, u_2 / \mathrm{Im}\, u_1)' \cong \mathrm{Ker}\, {}^t u_2 / \mathrm{Im}\, {}^t u_1$ に
なる，という定理）により，$q>1$ ならば，
定理は明らかである。

$q=1$ の時は別の考察を必要とする。線型位相空間の一般論から，$\mathrm{Im}\,\vartheta \cap V^\circ$ が closed
（但し V は X の 0 の近傍）
を言えばよい。（V° は V の polar set）再び DFS*-space の一般論により（小松 [26] p. 373. Th. 6）により，$\mathrm{Im}\,\vartheta \cap V^\circ = {}^\exists u_j({}^\exists B_j)$
$B_j \subset {}^\exists X_j'$（但し B_j は X_j' の有界集合で，u_j は weakly homeo）よって今
$\vartheta u_\nu \longrightarrow f \in V^\circ$ とすると $\vartheta u_\nu \xrightarrow[w]{} f$
(in X_j') ここで次の補題に注意しよう。

Lem. 2.1.2. $u \in Y_{j+1}'$, $\vartheta u \in X_j'$ ならば
${}^\exists v \in Y_j'$ があって $\vartheta v = \vartheta u$

補題の証明．$j=1$ として一般性は失われない。$\varphi_n = \exp(-\frac{1}{n} z^2)$ とすると，ϑ の定義により．$\vartheta(\varphi_n u) = \varphi_n \vartheta u$
今 $\sup_{z\in\Omega} |\mathrm{Im}\, z| < \infty$ と仮定しているから

明らかに $\varphi_n u \in Y_1'$ & $\varphi_n \longrightarrow 1$ (point-wise) 故. Lebesgue の収束定理により
$\varphi_n \partial u \longrightarrow \partial u$ (in X_1') 従って
$\varphi_n \partial u = \partial(\varphi_n u) \in \partial(Y_1')$ だから. ∂ が
$Y_1' \longrightarrow X_1'$ への作用素として closed range
(p.13.) であることにより, $\partial u \in \partial(Y_1')$
i.e. $\exists v \in Y_1'$ s.t. $\partial u = \partial v$

従って この補題 により. $\partial u_\nu \in X_j'$ だけでなく 更に $u_\nu \in Y_j'$ と仮定しても 一般性は失われない。 すると $\partial(Y_j')$ は 弱閉にもなるから
($\because$ $\partial(Y_j')$ は linear space) $f \in \partial(Y_j')$
故に $\exists v$ s.t. $\partial u_\nu \xrightarrow[w]{} \partial v = f$ 従って
DFS*-space は reflexisive 故 (小松 [26] p.372. Th.6) $\bar{\partial}$ は closed range
従って 再び Serre-小松の補題により. 定理は $q=1$ に対しても成立する。

注意 Th.2.1.1. の仮定 $\sup_{x \in \Omega} |\operatorname{Im} z| \leq M < \infty$

は　たとえば $\sup_{z\in\Omega}|\mathrm{Im}\, z| \Big/ |\mathrm{Re}\, z| < 1$

でおきかえてもよいことは定理の証明法より明らかである。我々は本質的には D^n の近傍でしか考察を行わないから、この定理で十分であるが、後にもう少し一般化した状況で cohomology の vanishing は証明する。(Th. 2.1.6. 参照。)

Th. 2.1.3.　Ω を $D^n\times iR^n$ の開集合とし、$V \overset{\text{def}}{=} \Omega\cap \mathbb{C}^n$ と定める。今 $\sup_{z\in V}|\mathrm{Im}\, z|<\infty$ とし、更に、V 上の多重劣調和函数 $\theta(z)$ で $\{\theta(z)<c\}\Subset\Omega$ $(\forall c)$ かつ $\sup_{z\in K\cap\mathbb{C}^n}\theta(z) \leq M_K<\infty$ $(\forall K\Subset\Omega)$

を満たす物があるとする。($\Subset$ なる記号は完全内部の意。) この時 $H^s(\Omega,\widetilde{\mathcal{O}}) = 0$ $(s\geq 1)$ が成立する。

注意　このような Ω が十分沢山存在することはこの定理の証明の後に示す。最も簡単な、しかし重要な例は $D^n\times iI^n$ (但し

Iは $\mathbb{R}$のopen interval）である。

証明] $D\times i\mathbb{R}^n$の位相の定義より，$\Omega=\cup\Omega_\nu$（locally finite）かつ$\Omega_\nu\cap\mathbb{C}^n=V_\nu$はopen convexとして，このようなcovering $\{\Omega_\nu\}$に関しての inductive limit $\varinjlim H^s(\{\Omega_\nu\};\tilde{\mathcal{O}})=0$ $(s\geqq 1)$を言えばよい。それには次の補題を示せば，特にそこで$p=q=0$として定理が得られる。（normをここではL^2-normを用いているが，それをsup-normに変えるには，Cauchyの積分公式を用いればよい。）

Lem. 2.1.4. (cf. Hörmander [19] p.114. Th.2.4.1. この補題の証明のideaは，同定理の証明による。)

$$c\in C^s(Z^{loc}_{(p,q)}(\{V_\nu\},\ \varepsilon|z|\ (\forall\varepsilon)))$$

（即ち $c=\{c_\nu\}$は$L^{2,loc}_{(p,q)}$ form-valuedのcochainであって$\bar\partial c_\nu=0$を満たし，更に$\forall\varepsilon>0$ $\forall M$（但しMはindex setのsubsetであり，$\#(M)<\infty$なる物）に対しても，

$$\sum_{\nu\in M}\int_{V_\nu}|c_\nu|^2e^{-\varepsilon|\mathrm{Re}\,z|}dV<\infty$$ を満たす）

かつ $\delta c = 0$ とする。この時、$\exists c'$

s.t. $\delta c' = c$ かつ

$c' \in C^{s-1}(\mathcal{Z}^{loc}_{(p,q)}(\{V_\nu\}, \varepsilon|z|(\forall \varepsilon)))$

補題の証明] $\{\chi_\nu\}$ を $\{V_\nu\}$ に付随した1の分解とする。通例のように、近似的 Hamilton operator として $b_\alpha = \sum \chi_j c_{j,\alpha}$ を考えよう。もちろん $\bar{\partial} b_\alpha \neq 0$ であるが、Th. 2.1.1. を用いて、b_α を修正することにより、c' をもとめるのである。$\delta c = 0$ 故 明らかに $\delta b = c$ 又、$\bar{\partial} c = 0$ 故 $\delta \bar{\partial} b = 0$ は成立することにまず注意しておこう。$\sum \chi_j = 1$, $\chi_j \geq 0$ 故、Cauchy の不等式によって $\int_{V_\alpha} |b_\alpha|^2 e^{-\varphi(z)} dV \leq \sum_j \int_{V_\alpha} \chi_j |c_{j,\alpha}|^2 e^{-\varphi(z)} dV$ が成立することは明らかである。

又、$\theta(z)$ の存在により $\sum |\bar{\partial} \chi_j| \leq e^{\psi(z)}$ ($\psi(z)$ は V での多重劣調和函数) と仮定してよい。しかももちろん $K \Subset \Omega$ なら $\sup_{K \cap \mathbb{C}^n} \psi(z) \leq {}^{\exists} C_K$ 従って、

$\sum\limits_N \int |\bar\partial b_\alpha|^2 e^{-\varepsilon|z|} dV < \infty$ ($\forall\varepsilon$, $\forall N$, 但しNは有限個) が c の仮定から従う。

まず $s=1$ としよう。先に注意したように、$\delta(\bar\partial b)=0$ だったから $s=1$ とすれば、$\bar\partial b$ は global section f を定めている。従って Th. 2.1.1. により $\exists u$ s.t. $\bar\partial u = f$ かつ $\int_{K\cap\mathbb{C}^n} |u|^2 e^{-\varepsilon|z|}(1+|z|^2)^{-2} dV < \infty$ ($\forall\varepsilon$) (但し $K \Subset V$)

従って $c'_\alpha \underset{\mathrm{Df.}}{=} b_\alpha - u/\Omega_\alpha$ と定めれば、明らかに $\bar\partial c'_\alpha = 0$ $\delta c' = \delta b = c$ かつ $c' \in C^{s-1}(\mathcal{Z}^{loc}_{(p,q)}(\{V_\nu\}, \varepsilon|z|(\forall\varepsilon)))$

次に $s>1$ としよう。この時は s についての induction を用いる。(Hörmander [19] の idea である。) 再び $\delta(\bar\partial b)=0$ 故、$\delta b' = \bar\partial b$ なる $b' \in C^{s-2}(\mathcal{Z}^{loc}_{(p,q+1)}(\{V_\nu\}, \varepsilon|z|(\forall\varepsilon)))$ が induction の仮定から存在する。従って Th. 2.1.1. を用いて、$b'_\alpha = \bar\partial b''_\alpha$ かつ $\sum\limits_N \int_{V_\alpha} |b''_\alpha|^2 e^{-\varepsilon|z|}(1+|z|^2)^{-2} dV$

$<\infty$ となる b_α'' が存在する。従って $c' \underset{\text{def}}{=} b - \delta b''$ と定めれば、c' はすべての条件を満たしている。

Eg. 2.1.5. (Th. 2.1.3. の条件を満たす Ω の例について) (cf. Grauert [13] p.468 ff. §3) S を D^n 内の open set かつ U は S の $D^n \times i\mathbb{R}^n$ 内での開近傍とする。この時以下の条件 i), ii) を満たす V が存在する。i) V は Th. 2.1.3. の条件を満たす。

ii) $V \subset U$ かつ $S = V \cap D^n$

証明] $S \cap S_\infty^{n-1} \neq \phi$ としておいてよい。(. $S \cap S_\infty^{n-1} = \phi$ ならば、上の Grauert の結果である。) 今 U は $D^n \times i\mathbb{R}^n$ で open 故 $\exists \gamma(z) \in C^\infty(U \cap \mathbb{C}^n)$ かつ $\{z \in U \cap \mathbb{C}^n \mid \gamma(z) \leq c\}^a \Subset U$ (closure は $D^n \times i\mathbb{R}^n$ の位相に関してとったもの) かつ $\underbrace{\forall K, \forall \varepsilon}_{\text{それが } U \text{ に含まれる限り}}$ $K \times i([-\varepsilon_1, \varepsilon_1'] \times \cdots \times [-\varepsilon_n, \varepsilon_n'])$ 上で、$\sup|\gamma(z)|$, $\sup|\nabla^2\gamma(z)| \leq M_{K,\varepsilon}$ (∇^2 は任意の2階微分の意) となる物

がとれることは、$K\times i([-\varepsilon_1,\varepsilon_1']\times\cdots\times[-\varepsilon_n,\varepsilon_n'])$ 有限和が、U のとりつくし compact 集合の列を作ることから明らか。但し、ここで、K は $\mathbb{R}^n$ 内の compact convex set，Γ は convex cone（closed）である。今 $a(x)$ を x が $S\cap\mathbb{R}^n$ の内部から $\partial(\mathcal{C}_{D^n}S)$ へ近付く時十分速く ∞ へ行く函数として

$g(z) \underset{\mathrm{Df}}{=} a(\mathrm{Re}\,z)\sum_j(\mathrm{Im}\,z_j)^2$ と定め，

更に、$p_1(z)\underset{\mathrm{Df}}{=}\gamma(z)+g(z)$ と定める。

すると

$D^n\times i\mathbb{R}^n$ の位相の定義と $a(x)$ の条件から、$D^n\times i\mathbb{R}^n$ における S の近傍 W が存在して、$W\cap\mathbb{C}^n$ では $p_1(z)$ は多重劣調和函数であるとしてよい。

さて、今 $z^j\in(\partial W-\partial S)\cap\mathbb{C}^n$

として、

$$\theta^j(z)=\theta_{z_j}(z)\underset{\mathrm{Df}}{=}\max\Big\{0,\ \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}|\mathrm{Im}\,z_k^j|^2}\Big(2\sum|\mathrm{Im}\,z_k|^2-\sum|\mathrm{Re}(z_k-z_k^j)|^2\Big)\Big\}$$

と定めると、$\theta^j(z)$ は多重劣調和函数であり、しかも $\theta^j(z^j)=2$ となる。従って $\{z^j\}$ を適当に選べば、$p_2(z)=\sup_j \theta^j(z)$ は well-defined が多重劣調和函数となり（local には、sup は有限個の物に関してとっているから、上半連続性も問題ない。）しかも $\{z\in W\cap\mathbb{C}^n \mid p_2(z)\le 1\}\cap\partial W=\phi$ とできる。

以上の準備の下で $V \underset{Df}{=} (\{z\in W\cap\mathbb{C}^n \mid p_2(z)\le 1\}\cup(W\cap S_\infty^{n-1}))^\circ$（interior とは $D^n\times i\mathbb{R}^n$ の位相に関して）と定めれば、$p(z) \underset{Df}{=} p_1(z)+\sum_{j\ge 0} p_2(z)^j$ は $\underbrace{\text{求める}}_{V\text{に関して}}$ 多重劣調和函数となっている。

実際、$\forall K\times i[(-\varepsilon_1,\varepsilon_1')\times\cdots\times(-\varepsilon_n,\varepsilon_n')]$ $(\Subset V)$ に対して（K は p.21. と同じ条件を満たす）同じ型の集合 L $(\subset K)$ が存在し L 上では $p_2(z)\le 1/2$ とでき、$pr_{D^n}L\Subset S$ 故 $p_1(z)\le {}^\exists M_L$ となっている。従って L 上で $p(z)\le {}^\exists M_L'$

が満たされるからである。

注意. 同様にして K が D^n 内の compact 集合である時, $H^s(K, \hat{\mathcal{O}}) = 0$ $(s \geq 1)$ も示しうる。(Cf. p. 32. ff.)

さて, 我々は Th. 2.1.1. 従って Th. 2.1.3. において $\sup_{z \in V} |\operatorname{Im} z| < \infty$ を仮定した。全く一般の状況の下にこの条件を落すことは可能であろうが technical に面倒である。しかし, 簡単な集合の場合には Th. 2.1.3. において上の条件を落すことは比較的容易であるので, その概略を述べておく。もちろん, この方法は standard covering を用いる cohomology with bounds の vanishing (cf. Hörmander [20] 7.6.) を (hyperfunction での ~~定数係数~~ 偏微分方程式論を展開する為に) 示すのにそのまま本質的変更なしに用いうることは明らかである。尚, Th. 2.1.7. は小松先生の suggestion による。

Th. 2.1.6. $H^s(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) = 0 \quad (s \geq 1)$.

注意：以下の証明を見れば判るように、たとえば $D^n \times i(\mathbb{R}^+)^n$ etc. でも証明は全く同様である。

証明] $D^n \times i(-m, m)^n$ being Ω_m とすれば $H^s(\Omega_m, \tilde{\mathcal{O}}) = 0 \quad (s \geq 1)$ 故．$s \geq 2$ ならば $H^s(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ はホモロジー代数の一般論から明らかである。（たとえば，Grothendieck [14] Ch.0 私はこの事実を相原君に教えて頂いた。もちろん直接にも証明できることではある。）

次に $H^1(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ を言うには，一種の Runge の定理が必要である。

今 $\tilde{\mathcal{O}}^j(D^n \times i\mathbb{R}^n)_{loc} \ni f(z) \Longleftrightarrow$

$f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, $\displaystyle\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |f|^2 e^{-\frac{1}{j}|z|} dV < \infty$

$(\forall K \Subset D^n \times i\mathbb{R}^n)$

と定め，$\tilde{\mathcal{O}}^j(\Omega_m)_{loc}$ も同様に定める。この時 §3 Th　　　の証明と同様にして $\tilde{\mathcal{O}}^j(D^n \times i\mathbb{R}^n)_{loc} \hookrightarrow$

$\tilde{\mathcal{O}}^{j-1}(D^n \times i\mathbb{R}^n)_{loc}$, $\tilde{\mathcal{O}}^{j-1}(D^n \times i\mathbb{R}^n)_{loc}$
$\hookrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{j-1}(\Omega_m)_{loc}$ はいずれも
dense range であることが証明される。
(証明は、本質的には、Hörmander [19]
p. 109 Prop. 2.3.2. による。§3参照) 又、
同様に $\tilde{\mathcal{O}}^j(\Omega_m)_{loc} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{j-1}(\Omega_m)_{loc}$ も
dense range である。ここで、次の線型位
相空間の一般論 (Th. 2.1.7.) から.
$\tilde{\mathcal{O}}(D^n \times i\mathbb{R}^n)_{loc} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{O}}(\Omega_m)_{loc}$ が
dense range を出したいのであるが、
$\tilde{\mathcal{O}}^j_{loc}$ etc. では少し取り扱いにくいので、
$\tilde{\mathcal{O}}^j(U) \ni f(z) \Leftrightarrow f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \cap U)$
かつ $\int_U |f(z)| e^{-\frac{1}{j}|z|} dV < \infty$ という
Banach 空間で考えたい。一般に $\tilde{\mathcal{O}}^j(U)$
そのままでは、上の近似定理は成立しな
いけれど、$\tilde{\mathcal{O}}^j(U)$ の subset $\varinjlim_{K \downarrow U} \tilde{\mathcal{O}}^j(K)$
$= A_j(U)$ を考え、$A_j(U)$
には $\tilde{\mathcal{O}}^j(U)$ の位相をそのままいれること
にすれば、上の近似定理により
$A_{j-1}(\Omega_m)$ において $A_j(\Omega_m)$ は dense と

なる。従って Th. 2.1.7. をこの状況で適用してやれば、$\Gamma(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ は $\Gamma(\Omega_m, \tilde{\mathcal{O}})$ で dense であることが判る。

従って、$\mathcal{U} = \{\Omega_m\}$ として $H^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ を証明すればよい。

今 $a \in Z^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{O}})$ i.e. $\delta a = 0$ とする。

ここで $\mathcal{U}^j = \{\Omega_1, \cdots, \Omega_j\}$ と定めれば、trivial に $\mathcal{U}^j$ は Ω_j の covering になっている。又、$\delta a = 0$ 故 $a|_{\Omega_j} = \delta\, {}^{\exists} b^j$ しかも、

$(b^{j+1} - b^j)|_{\Omega_j} \in Z^0(\mathcal{U}_j, \tilde{\mathcal{O}})$

$K_j \Subset \Omega_j \Subset K_{j+1}$ かつ K_j はやはり直積型として近似定理を用いることにより

${}^{\exists} c^j \in \Gamma(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ s.t.

$$\int_{K_l} |b^{j+1} - b^j - c^j|^2 e^{-\frac{1}{l}|z|} dV < 1/2^j$$

$(1 \leq l \leq j)$ としてよい。

$b^{j+1} - c^j$ を改めて b^{j+1} とすることにより

$$\int_{K_l} |b^{j+1} - b^j|^2 e^{-1/l |z|} dV < 1/2^j$$

$\therefore\ b^k - b^j \longrightarrow {}^{\exists} a^j$ ($k \to \infty$ 但し、$\tilde{\mathcal{O}}^j(K_j)$ の位相で。)

又、明らかに K_j 上 $b^{j+1} + s^{j+1} = b^j + s^j$

よって $\exists b \in C^0(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{O}})$ かつ $\forall j$ に対し Ω_{j-1} 上 $\delta b = \delta b^j + \delta a^j - a$ となる物が存在する。従って $H^1(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ が証明された。最後に線型位相空間論の一つの定理を証明して、Th. 2.1.6. の証明を終ろう。実はそれは、上の $H^1(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ の証明の modification である。

Th. 2.1.7. $\{X_j\}$ は Banach space, $X_{j+1} \hookrightarrow X_j$ (ここでその imbedding map の norm $\leq C_j$ としておく。) は dense range とする。$\{Y_j\}$ も同様とする。更に

$$\begin{tikzcd} X_{j+1} \arrow[r, "h_{j+1}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y_{j+1} \arrow[d] \\ X_j \arrow[r, "h_j"'] & Y_j \end{tikzcd}$$

とする。この時、

$\{h_j\}$ により $\varprojlim X_j \underset{Df}{=} X \xrightarrow[h]{} Y \underset{Df}{=} \varprojlim Y_j$ なる写像が induce されるが、この時 h もまた dense range である。

証明］ まず小松先生から suggestion を頂いた次の補題の証明を行う。

Lem. 2.1.8. 定理の仮定の下で

$X \hookrightarrow X_j$ は dense range

証明］ $j=1$ として一般性は失われない。$X_1 \ni {}^\forall f$ に対し、$f_1 \underset{\text{def}}{=} f$ とし、以下順次次のように f_j を定める。任意にまず $\varepsilon > 0$ を fix する。このとき、仮定より、${}^\exists f_2 \in X_2$ $\|f_2 - f_1\|_1 < \varepsilon/2$ とできる。次に再び仮定より ${}^\exists f_3 \in X_3$ s.t. $\|f_3 - f_2\|_2 < \varepsilon/2^2 \cdot 1/C_2$
（ここで $C_j \geqq 1$ $({}^\forall j)$ としておく。）
以下同様にして、$\|f_{j+1} - f_j\|_j < \varepsilon/2^j \cdot \times \prod_{k=2}^{j} 1/C_k$ と $\{f_j\}$ を順次選ぶことができる。次に $\{g_k\}$ を $g_k \underset{\text{def}}{=} \sum_{j=k}^{\infty}(f_{j+1} - f_j) + f_k$ と定める。

次に示すように、この級数は X_k 内で絶対収束するから、g_k は X_k の元として well-defined である。実際、$g_k^m = \sum_{j=k}^{m}(f_{j+1} - f_j) + f_k$ として

$$g_k^m - g_k^n = \sum_{j=n+1}^{m}(f_{j+1} - f_j) \quad (m > n \text{ として}$$

おく。）従って仮定より，

$$\| g_k^m - g_k^n \|_k \leq \sum_{j=n+1}^{m} \| f_{j+1} - f_j \|_k$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{m} \left(\| f_{j+1} - f_j \|_j \prod_{l=j+1}^{k} c_l \right)$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{m} \left(\| f_{j+1} - f_j \|_j \prod_{l=2}^{k} c_l \right) < \sum_{j=n+1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^j}$$

従って g_k は明らかに well-defined である。

又，X_k 内において $g_{k+1} = g_k$ は明らか。即ち，(g_j) は $\varprojlim X_j = X$ の元 g を定める。しかも，上と同様にして

$$\| f - g \|_1 \leq \sum_{j \geq 1} \| f_{j+1} - f_j \|_1 < \sum_{j \geq 1} \varepsilon / 2^j$$
$$= \varepsilon$$

Q.E.D.

定理の証明に戻ろう。

Lem. 2.1.8. により，$X' \cong \varinjlim X_j'$，$Y' \cong \varinjlim Y_j'$ と（少くとも linear space として）見なすことができる。ここで，$X_{j+1} \hookrightarrow X_j$，$Y_{j+1} \hookrightarrow Y_j$ は各々 dense range であるから，右辺に現わ

れる $\varinjlim$ は実は injective limit であることに注意しておこう。

一方．$X_j \xrightarrow[h_j]{} Y_j$ も dense range 故 $X_j' \xleftarrow[{}^t h_j]{} Y_j'$ は injective 。よって $Y' \ni y'$ かつ ${}^t h(y') = 0$ とすれば，$y' \in Y_j'$ と見なせるから ${}^t h_j(y') = 0$（∵ 先程の $\varinjlim$ は injective limit.）故に ${}^t h_j$ が injective 故 $y' = 0$ ∴ $Y' \to X'$ は injective 故に Hahn-Banach の定理により，$X \xrightarrow[h]{} Y$ は dense range

定理の証終．

§3 $\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K)$における近似定理

この節では、$K\subset D^n$がcompact setである時、$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K)$の元は、$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(D^n)$の元で近似されることを証明することを目標とする。もちろん$K\subset D^n$が本質的である。

3.1. $\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K)$における近似定理

$$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K)=\varinjlim_{U_m\downarrow K}\underset{\sim}{\mathcal{O}}^m(U_m)$$ により$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K)$

に位相を定義する。もちろんここでこれは、Kの近傍系U_mのとり方によらないことは明らか。但し$\underset{\sim}{\mathcal{O}}^m(U_m)=\{f(z)\in\mathcal{O}(U_m\cap\mathbb{C}^n)\mid |f(z)|\leq Ae^{-1/m|z|}\}$である。

又、この時 Ascoli-Arzelaの定理により、$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K)$は、Banach空間$\underset{\sim}{\mathcal{O}}^m(U_m)$を、compact写像でつないだ空間となり、定義によりDFS-spaceである。この時

Th. 3.1.1 $K\subset D^n$, K compact とする。この時 $\mathcal{P}_*\left(\underset{\text{by def.}}{=}\underset{\sim}{\mathcal{O}}(D)\right)$は$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K)$において dense である。

証明] $U_j = D^n \times \sqrt{-1}\,\{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 < 1/j\}$ と定める。Kについての条件から、$^\exists \Omega_j \downarrow K$ かつ $U_j \supset \Omega_j$ 更に $^\forall j$ と $^\forall T\ (\Subset \Omega_j)$ に対して次のような条件 i)〜iv) を満たす V と U_j での強多重劣調和函数 $\theta(z)$ が存在することが初等的に証明される。(Ω_j の作り方は、この証明の最後に述べる。$D \times i\mathbb{R}^n$ の位相の定義を用いて、$\Omega_j = \bigcap_{l=1}^{\infty} V^l$ 但し $V^l = \{|\exp(-\sum(z_j - a_j^l)^2)| < c_l,\ \sum |\mathrm{Im}\, z_j|^2 < d_l$ 但し $a_j^l \in \mathbb{R}\}$ という型の集合(このような型の集合を簡単の為 type (E) の集合と呼ぶ)により作られる物である。) さて V と $\theta(z)$ の条件を明記しておこう。

$$
\begin{cases}
\text{i)} & T \Subset V \Subset \Omega_j \\
\text{ii)} & \theta(z) < 0 \quad \text{on } T \cap \mathbb{C}^n \\
\text{iii)} & \theta(z) > 0 \quad \text{near } \partial V \cap \mathbb{C}^n \\
\text{iv)} & ^\forall L \Subset \Omega_j \text{ に対し } \sup_{L \cap \mathbb{C}^n} \theta(z) \le {}^\exists M_L
\end{cases}
$$

さて、定理の証明を始めよう。いくつかの補

助的な函数空間の設定から始める。

$\mathcal{A}^{2,-2\varepsilon}_{loc}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \mathbb{C}^n) \mid \int_K |f|^2 e^{2\varepsilon|z|} dV < \infty \ \forall K \Subset \Omega\}$

$L^{2,-\varepsilon}_{loc}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{f \in L^2_{loc}(\Omega \cap \mathbb{C}^n) \mid \int_K |f|^2 e^{\varepsilon|z|} dV < \infty \ \forall K \Subset \Omega\}$ と定める。

明らかに $\mathcal{A}^{2,-2\varepsilon}_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^{2,-\varepsilon}_{loc}(\Omega)$

よって $L^{2,-\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ の位相に関して $\mathcal{A}^{2,-2\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ の閉包をとったものを X とする。ここで

p.14. Lem. 2.1.2. の dual をとれば、明らかに $\varepsilon < \delta (< 2\varepsilon)$ なる限り、

$\mathcal{A}^{2,-\delta}_{loc}(\Omega) \hookrightarrow X$ となっている。

又、$B \overset{\text{def}}{=} \{u \in \mathcal{O}(U \cap \mathbb{C}^n) \mid \int_L |u|^2 e^{\delta|z|} dV < \infty \ \forall L \Subset U\}$ と（δ を上の条件を満たす物として fix し）定める。

今 $\Omega = \Omega_{j_0}$, $U = U_{j_0}$ とすれば、明らかに $B \overset{j}{\hookrightarrow} X$ であるが、この時、

$\mu \in X'$ に対して、もしそれが $\mu \perp j(B)$ を満たすならば $\mu = 0$ が従うことが証明できれば、$\mathcal{Q}(K)$ の位相の定義から、定理が得られることは明らか。

その証明は次のように Hörmander [19] p.109. Prop. 2.3.2 を適用することによって得られる。

$\mu \in X'$ とすれば、Hahn-Banach の定理により $\exists u \in L^{2,\varepsilon}_{comp}(\Omega)$ が存在し（即ち $\operatorname{supp} u$ は Ω 内で compact かつ $\int |u|^2 e^{-\varepsilon|z|} dV < \infty$）. しかも $\forall v \in X$ に対し $\langle \mu, v \rangle = \int_{\Omega \cap \mathbb{C}^n} v \bar{u} \, dV$ が成立する。

このような $\operatorname{supp} u$ を p.32. の条件の T として、そこで存在を仮定した V, $\theta(z)$ を以下 fix する。$\theta^+(z) \underset{\mathrm{Df}}{=} \max\{0, \theta(z)\}$ として、

$C \underset{\mathrm{Df}}{=} \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \{ v \in L^2_{loc}(U; \lambda\theta^+ - \delta'|z| - \log(1+|z|^2)) \mid \bar{\partial} v = 0 \}$ $(2\varepsilon > \delta' > \delta)$ と定めれば、$\theta(z)$ の条件 iv) より $C \hookrightarrow B$（C には特に位相は考えない。）今 $\mu \perp j(B)$ を仮定しているから、$\forall v \in C$ に対して

$$\langle \mu, v \rangle = \int_{\Omega \cap \mathbb{C}^n} v \bar{u} \, dV = \int_U v \bar{u} \, dV$$

$(\because \operatorname{supp} u \Subset \Omega)$

しかも $\theta(z)$ の性質 ii) により，$\theta(z)>0$ ならば $u(z)=0$　そこで $g_{\delta''}(z)=\cosh(\delta''z)$ として（但し $2\varepsilon>\delta''>\delta'$）

$$\int v\bar{u}\,dV=\int v g_{\delta''}(z)\cdot\overline{\left(u/g_{\delta''}(\bar{z})\right)}\,dV$$

故 $u/g_{\delta''}(\bar{z}) \underset{\text{def}}{=} \tilde{u}$ と定めれば，Hörmander [19] p.109 Prop. 2.3.2. により，$\exists F$ s.t. $\tilde{u}=\partial F$ かつ $F=0$ (near ∂V)，しかも $F\in L^2(U;-(\delta''-\delta')|z|+\log(1+|z|^2))$ となる物が存在する。従って $F(z)g_{\delta''}(\bar{z}) \underset{\text{def}}{=} f(z)$ とすれば，$\partial f=u$ かつ $f\in L^2(U;\delta'|z|+\log(1+|z|^2))$，$\operatorname{supp} f\subset V\Subset U$ としてよい。従って $v\in A^{2,-2\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ とすれば，部分積分により，$2\varepsilon>\delta'''>\delta'$ として

$$0=\int_{\Omega\cap\mathbb{C}^n}(\bar\partial v)\,\bar{f}\,dV=\int_{\Omega\cap\mathbb{C}^n}\bar\partial\left(v g_{\delta'''}(z)\right)\cdot\overline{\left(f/g_{\delta'''}(\bar{z})\right)}\,dV$$

$$=\int_{\Omega\cap\mathbb{C}^n}v g_{\delta'''}(z)\,\overline{\partial\left(f/g_{\delta'''}(\bar{z})\right)}\,dV$$

$$= \int_{\Omega \cap \mathbb{C}^n} v\, \overline{\partial f}\, dV = \int_{\Omega \cap \mathbb{C}^n} v\, \overline{u}\, dV$$

$= \langle \mu, v \rangle$　しかるに X は $A^{2,-2\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ の $L^{2,-\varepsilon}_{loc}(\Omega)$ の位相に関する閉包をとったものだから，μ は X 上で 0，即ち $\mu \equiv 0$．従って Ω_j の構成さえ行えば，証明は完結することになる。

以下その構成：

K の任意の近傍 W を考えれば，$D \times i\mathbb{R}^n$ の位相の定義より，$W = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$　$C_j = K_j \times i I_j$

但し K_j は $\mathbb{R}^n$ 内の open convex, relatively compact set x は open convex cone, I_j は $\mathbb{R}$ の open interval の直積。

K は compact 故　C_j の内の有限個で cover できる。更に定義から $\exists r$　$K \cap \{x > r\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} K_j$　K_j は open convex cone，としてもよい。このような形の集合なら，type(E) の集合（see. p.32）で近似できることは明らかである。

そこでこのような近似列に対し，$T \Subset \Omega_j$

とする時. p. 32 の条件 i)～iv) を満たす V と $\theta(z)$ を構成しよう。再び $D \times i\mathbb{R}^n$ の位相の定義と $T \Subset \Omega_j$ ということから,
$T \subset \bigcup_{j=1}^{m} C_j$ 但し $C_j = K_j \times i I_j$ としてよい。
(K_j, I_j は先程と同じ) 以下 Ω_j を Ω と略する。明らかに $K_j \Subset Pr_{D^n}\Omega$ 故.
$|\mathrm{Re}\, z| > 1$ として $\exists \varepsilon > 0$ s.t.
$\mathrm{dist}(K_j, \partial(Pr_{D^n}\Omega)) \geqq \varepsilon |z|$ 従って
type (E) の集合 S を適当に選べば, $T \Subset S$,
$T \cap \{|\mathrm{Re}\, z| > 1\} \Subset S \cap \{|\mathrm{Re}\, z| > 1\}$
$\Subset \Omega \cap \{|\mathrm{Re}\, z| > 1\}$ とできる。
一方 $T \cap \{|\mathrm{Re}\, z| < 2\}$ の部分は, Ω が type (E) であることから, その定義に用いられた V^l を各座標軸の方向に $\pm\varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) だけ動した $V_\varepsilon^{l\,\pm\cdots\pm}$ を考えれば,
$T \cap \{|\mathrm{Re}\, z| < 2\} \Subset \cap V_\varepsilon^{l\,\pm\cdots\pm} \cap \{|\mathrm{Re}\, z| < 2\}$
$\Subset \cap V^l$ となり, しかも ε を十分小さくとっておけば, $\mathrm{dist}(K_j, \partial(Pr_{D^n}\Omega)) \geqq \varepsilon |z|$ より, 明らかに $T \Subset \cap V_\varepsilon^{l\,\pm\cdots\pm}$ となっている。
そこで $\cap V_\varepsilon^{l\,\pm\cdots\pm} \cap S \underset{\text{所}}{=} V$ とすれば, V に

ついての条件は満たされている。しかもVは構成の仕方から type (E) の集合になっている。即ち、$V=\cap V_\ell$, $V_\ell=\{z\mid |f_\ell(z)|<1,\ \sum|\mathrm{Im}\,z_j|^2<d_\ell\}$ ここに $f_\ell(z)=$
$=c_\ell\exp(-\sum(z_j-a_j^\ell)^2)$ $(a_j^\ell\in\mathbb{R})$ である。又、Ωの作り方から V_ℓを少し必要があれば虚軸方向に大きくすることにより $d_\ell\equiv d$ としておいても構わない。さて、今 $\sup_\ell\log|f_\ell(z)|$ $\underset{\text{def}}{=}\sigma(z)$とすれば、これは$V_\ell$の作り方より、有限確定であり、多重劣調和になっている。ここでρ_εを$\mathbb{R}^{2n}$でのmollifierとして $\psi(z)\underset{\text{def}}{=}\sigma(z)*\rho_\varepsilon$ と定めれば、$T\Subset V$故$D\times i\mathbb{R}^n$の位相の定義から、εを十分小さくとれば、T上で$\psi(z)<0$となっている。

次に適当な強多重劣調和な$\varphi(z)=\varphi(\mathrm{Im}\,z)$をとって $\max(\psi(z),\varphi(z))\underset{\text{def}}{=}\chi(z)$を考えれば T上で $\chi(z)<0$, かつ∂Vの近傍で $\chi(z)>0$ とできる。そこで、

$\theta(z)\underset{\text{def}}{=}\chi(z)*\rho_\varepsilon+\varepsilon\varphi(z)$ と定めれば、εを十分小さくとることにより、$\theta(z)$はUで

の強多重劣調和函数であり、しかも構成法により、明らかに p.32. の条件 i)～iv) をすべて満たしている。 従って V と $\theta(z)$ が、すべての条件を満たして構成されたことになる。

以上により、Th. 3.1.1. の証明は完結した。

§4. Fourier超函数の空間の性質

この節では、p.8.で定義したFourier超函数の空間 $\mathcal{Q}(\Omega)$ (Def. 1.2.4.)の基本的性質の内 $\mathcal{Q}(\Omega)$ の sheaf-theoretical な部分(p.9. の i), ii))を証明することを目標とする。Fourier変換論については§5.で述べる。ここで、Fourier超函数の空間が、sheafになっているという事実は $\mathcal{S}'$ etc. とくらべる時、極めて注目に値する。その事実の有効性はたとえば Ch. 2. §3 においてよく判るであろう。

4.1. $H^p(V, \tilde{\mathcal{O}})$ の表現とMalgrangeの定理(Malgrange. [34])の拡張

$\mathcal{Q}(\Omega)$ の性質を調べるには、$H^p(V, \tilde{\mathcal{O}})$, $H^p_{comp}(V, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$ の微分型式による表現があった方が都合がよい。($H^p_{comp}(V, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$ は compact support の cohomology の意) その準備をこの subsection では行う。

Def. 4.1.1　Ω を $D^n \times i\mathbb{R}^n$ の開集合として

$\mathscr{X}_j(\Omega) \ni u \iff$ u は $(0, j)$-form でしかも $\forall K \Subset \Omega$ $\forall \varepsilon > 0$ に対しても,

$$\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |u|^2 e^{-\varepsilon |z|} dV < \infty, \quad \text{かつ}$$

$$\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |\bar{\partial} u|^2 e^{-\varepsilon |z|} dV < \infty$$

Def. 4.2.2　Ω を $D^n \times i\mathbb{R}^n$ の開集合として

$\mathscr{Y}_j(\Omega) \ni u \iff$ u は $(0, j)$-form でしかも $\forall K \Subset \Omega$ $\exists \delta_K > 0$ s.t.

$$\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |u|^2 e^{\delta_K |z|} dV < \infty \quad \text{かつ}$$

$$\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |\bar{\partial} u|^2 e^{\delta_K |z|} dV < \infty$$

と $\{\mathscr{X}_j(\Omega)\}$, $\{\mathscr{Y}_j(\Omega)\}$ を定義すれば, 明らかにこれ等はある soft-sheaf $\mathscr{X}_j$, $\mathscr{Y}_j$ に attach された presheaf であり, しかも, $\mathscr{X}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{X}_1$, $\mathscr{Y}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{Y}_1$ の Kernel はいずれも正則函数となるから, $\widetilde{\mathcal{O}}$ 及び $\mathcal{Q}$ の定義により, (pp. 7, 8. Def. 1.2.2., Def.

1.2.3.) $0 \to \tilde{\mathcal{O}} \to \mathcal{X}_0 \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{X}_1$,
$0 \to \underset{\sim}{\mathcal{Q}} \to \mathcal{Y}_0 \xrightarrow[\bar\partial]{} \mathcal{Y}_1$ が成立する。
更に、§2の $\bar\partial u = f$ に対する存在定理により (p. 11. Th. 2.1.1.) これらの sequence は、次の resolution に延伸ばすことができる。

$$0 \to \tilde{\mathcal{O}} \to \mathcal{X}_0 \xrightarrow{\bar\partial} \cdots\cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{X}_n \to 0$$
(exact)

$$0 \to \underset{\sim}{\mathcal{Q}} \to \mathcal{Y}_0 \xrightarrow{\bar\partial} \cdots\cdots \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{Y}_n \to 0$$
(exact)

($\underset{\sim}{\mathcal{Q}}$ については、resolution 故 local に考えてよいから ある帯状領域で0にはならない適当な函数、即ち、$\cosh(\delta z)$ (又はその平行移動) を用いればよい。この場合は Th. 2.1.1. を用いる迄もなく、Hörmander [19] p. 105. Th. 2.2.1′ から直ちに得られる。) 従って

$$H^p(\Omega, \tilde{\mathcal{O}}) \cong \{u \in \mathcal{X}_p(\Omega) \mid \bar\partial u = 0\} \Big/ \bar\partial \mathcal{X}_{p-1}(\Omega)$$

$$H^p_{comp}(\Omega, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \cong \frac{\{u \in (\mathcal{Y}_p(\Omega))_{comp.} \mid \bar\partial u = 0\}}{\bar\partial (\mathcal{Y}_{p-1}(\Omega))_{comp.}}$$

と表現される。

一方ここで、次のような函数空間を導入する。

Def. 4.2.3.

$$X_j(\Omega) \ni u \iff \forall K \Subset \Omega \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |u|^2 e^{-\varepsilon |z|} dV < \infty$$

Def. 4.2.4.

$$Y_j(\Omega) \ni u \iff \operatorname{supp} v \Subset \Omega \text{ かつ } \exists \delta > 0$$

$$\text{s.t.} \int_{\mathbb{C}^n} |u|^2 e^{\delta |z|} dV < \infty$$

すると定義により $X_j(\Omega)$ は

$p_{\varepsilon, K}(u) = \int_{K \cap \mathbb{C}^n} |u|^2 e^{-\varepsilon |z|} dV$ により

semi-norm が与えられる FS*-space

となり、（FS*-space については、小松[26] 参照）$Y_j(\Omega)$ は DFS*-space、更に

$Y_{n-j}(\Omega) \cong [X_j(\Omega)]'$ となることは、

明らかである。

ここで、次のような complex を考える：

$$\cdots \longrightarrow X_{p-1}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} X_p(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} X_{p+1}(\Omega) \rightarrow \cdots$$

すると、この complex から作った cohomology 群は、明らかに p.42 で作った $H^p(\Omega, \tilde{\mathcal{O}})$ の表現の右辺に等しい。 同様に、$H^q_{comp}(\Omega, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$ は、$\cdots \longrightarrow Y_{q-1}(\Omega) \longrightarrow Y_q(\Omega) \longrightarrow Y_{q+1}(\Omega) \rightarrow \cdots$ から作った cohomology 群に等しい。

従って $H^p(\Omega, \tilde{\mathcal{O}})=0$ $(p \geq 1)$ なる Ω（そのような Ω が十分沢山存在することは、p.16 ~ p.30 で示した。）に対しては、FS*-space に対する Serre - 小松の補題（小松 [26] p.381 Th.19；内容の概略は p.13 に念の為記しておいた。）により、

Th. 4.2.5. $H^p(\Omega, \tilde{\mathcal{O}})=0$ $(p \geq 1)$ ならば、$[H^j(\Omega, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong H^{n-j}_{comp}(\Omega, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$ が成立する。（定理は $\dim H^p(\Omega, \tilde{\mathcal{O}}) < \infty$, $(p \geq 1)$ で成立する。）

更に、我々は同様の考え方により、次の定理も証明することができる。

Th. 4.2.6. Ω を $D^n \times i\mathbb{R}^n$ の任意の開集

合として $H^n(\Omega, \widetilde{\mathcal{O}}) = 0$

(cf. Malgrange [34])

証明] 今迄述べた所から, $\mathcal{X}_{n-1}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{X}_n(\Omega) \longrightarrow 0$ (exact) を言えばよい。従って, 特に $X_{n-1}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} X_n(\Omega) \to 0$ (exact) を言えば十分。その証明の本質的部分は Malgrange [33], [34] が指摘しているように, この位置では $(\bar\partial)' = \vartheta$ が elliptic operator になることである。

証明に移る前に, 2.3 の空間の準備をしておく。(尚, 以下の証明は, Th. 2.1.1. の証明 (p. 11. ~ p. 15.) とかなり parallel に進行する。)

$K_j \uparrow \Omega$, $K_j \Subset \Omega$ として,

$$X_\ell^j(K_j) \underset{\mathrm{Df}}{=} \left\{ u \in L^{2,loc}_{(0,\ell)}(\mathbb{C}^n) \;\middle|\; \int_{K_j \cap \mathbb{C}^n} |u|^2 e^{-\frac{1}{j}|z|} dV < \infty \right\}$$

と定めれば, $\varprojlim_j X_\ell^j(K_j) = X_\ell(\Omega)$

しかも $\varinjlim_j (X_\ell^j(K_j))' \cong Y_{n-\ell}(\Omega)$

今 $(X^{\bar\partial}_{\ell}(K_j))'$ の表現空間として、
$\{u \in L^2_{(0,\ell)}(\mathbb{C}^n) \mid \mathrm{supp}\, u \subset K_j, \int_{\mathbb{C}^n} |u|^2 \times e^{\frac{1}{j}|z|} dV < \infty\}$ なる物をとることにすれば、
$(\bar\partial)' = \vartheta$ となるから、$\bar\partial$ の surjective を言うには、ϑ が injective かつ closed range を言えばよい。ϑ が injective ($Y_0 \longrightarrow Y_1$ として) は、ϑ が elliptic operator であり、しかも $u \in Y_0 \Rightarrow \mathrm{supp}\, u \Subset \Omega$ 故 unique continuation により、$u \equiv 0$ となるから明らかである。ϑ が closed range を示そう。DFS*-space の一般論を用いて $\vartheta u_\nu \longrightarrow f$ in $(X^{\bar\partial}(K_j))'$ として $f = \vartheta\, {}^{\exists}u$ を示せばよい。(Th. 2.1.1. の証明参照) ここで、我々は Lem. 2.1.2. に相当する事実を示せばよい。しかるに、Hörmander [19] p.109. Prop. 2.3.2 を用いれば容易に判るように、この時 ${}^{\exists}v_\nu \in (X^{\bar\partial}(\widehat{K_{j+1}}))'$ s.t. $\vartheta u_\nu = \vartheta v_\nu$ と出来る。ここで $\widehat{K_{j+1}} = [(K_{j+1} \cap \mathbb{C}^n) \cup (\complement_{\mathbb{C}^n}(K_{j+1} \cap \mathbb{C}^n)$ の連結成分の内 $\mathbb{R}^{2n}$ の位相に関して

relatively compact な物)$]^{a}_{D^n \times iR^n}$,
即ち 結に言えば K_{j+1} の穴を埋めた物である。実際 $\vartheta u \in [X^{j}_{n-1}(K_j)]'$,
$u \in [X^{k}_{n}(K_k)]'$ $(j<k)$ として.
ϑ の ellipticity を用いれば, $\mathrm{supp}\, u \subset \widehat{K_{k+1}}$ は明らかである。よって $D^n \times iR^n$ の位相の定義から $\sup_{z \in \widehat{K_{k+1}} \cap \mathbb{C}^n} |\mathrm{Im}\, z| < \infty$

故, Lem. 2.1.2 と同様に $\varphi_n(z) = e^{-\frac{1}{n}z^2}$
を考えることとし. $\Omega \ni L \supset\supset \widehat{K_{k+1}}$ として
$g \in X^{j}(L)$ として, (ここで $X^{j}(L) \ni g \Longleftrightarrow \int_{L \cap \mathbb{C}^n} |g|^2 e^{-j|z|} dV < \infty$) $\bar\partial g = 0$ が満たされるなら,

$$0 = \int \overline{\varphi_n u}\, \bar\partial g\, dV = \int \overline{\vartheta(\varphi_n u)}\, g\, dV$$

$$= \int \overline{\varphi_n(\vartheta u)}\, g\, dV \longrightarrow \int \overline{\vartheta u}\, g\, dV$$

($\because$ Lebesgue の収束定理)

従ってここで Hörmander [19] p.109. Prop 2.3.2. を用いれば, $X^{j}(L)$ の定義

により，（即ち L の外では増大度に制限がない）$\vartheta u \in \vartheta[X^j(L)]'$ としてよい。

従って再び ϑ の ellipticity により，

$\vartheta u = \vartheta\, {}^{\exists}w$，　$w \in [X^j(\widehat{K_j})]'$ としてよい。

よって最初から，$K_j = \widehat{K_j}$ と仮定して

$\vartheta u_\nu \in [X^j(\widehat{K_j})]'$，　$u_\nu \in [X^j(\widehat{K_j})]'$

$\vartheta u_\nu \xrightarrow[w]{} f$　in $[X^j(\widehat{K_j})]'$ としてよい。

すると　$K_j \Subset L \Subset \Omega$ として，$g \in X^j(L)$ の元に対しては，$\int \overline{\vartheta u_\nu}\, g\, dV = 0$　かつ

$\int \overline{\vartheta u_\nu}\, g\, dV \longrightarrow \int \bar{f}\, g\, dV$　$\therefore \int \bar{f}\, g\, dV = 0$　$\therefore f = \vartheta\, {}^{\exists}v$　$v \in [X^j(L)]'$

（再び Hörmander [19] Prop. 2.3.2. による。）

従って再び unique continuation により，

$\mathrm{supp}\, v \subset \widehat{K_j}\ (= K_j)$　故に

$\vartheta : Y_n(\Omega) \longrightarrow Y_{n-1}(\Omega)$ は closed range となる。以上により，Malgrange の定理の拡張である Th. 4.2.6. は証明された。

4.2. Fourier 超函数の空間の基本的性質

このsubsectionでは、$\tilde{\mathcal{O}}$ の $\mathcal{D}^n$ に関する pure codimensionality (cf. 佐藤 [42], 小松 [28]) を証明し、$\mathcal{Q}(\Omega)$ が flabby sheaf になることを結論する。同時に p.9. ii) で述べた duality theorem が証明される。このsubsectionで用いた方法は、Martineau [36], Harvey [15], 小松 [28] で用いられた物を少し modify した物に過ぎない。

Th. 4.2.1. $K \subset \mathbb{D}^n$, K compact とする。

この時 $V \supset K$, $H^p(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ $(p \geq 1)$

$H^p_K(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ $(p \neq n)$

$[H^n_K(V, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong \underset{\sim}{\mathcal{Q}}(K)$

注意 i) §3で述べた内容と一般的な Excision Theorem により、$H^p(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ $(p \geq 1)$ と仮定しても特に差しつかえは無い。

ii) $[H^n_K(V, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong \underset{\sim}{\mathcal{Q}}(K)$ の同型は、

一応 linear space としての同型であるが，§3.3.1. の最初 (p.31.) で注意したように $\mathcal{Q}(K)$ は DFS-space 故 $\mathcal{Q}(K)$ は bornologic（例えば小松 [28] p.154. Th. IV.3.28. 参照）となり，従って以下の証明から判るように，小松 [26] p.381. Th.19. (Serre - 小松の補題) により，位相もこめて同型としてよい。

証明] (Th.4.2.1. の)　まず一般論により次の完全系列が成立する。

$$0 \longrightarrow H^0_K(V, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^0(V, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^1_K(V, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow H^n_K(V, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^n(V, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^n(V-K, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow 0$$

仮定より $H^p(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ $(p \geq 1)$，又明らかに一意接続定理により $H^0_K(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$　従って

$$H^1_K(V, \tilde{\mathcal{O}}) \cong H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}}) \big/ H^0(V, \tilde{\mathcal{O}}),$$

$H^p_K(V, \widetilde{\mathcal{O}}) \cong H^{p-1}(V-K, \widetilde{\mathcal{O}})$ が成立する。

又、同様にして

$0 \longrightarrow H^0_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^0_{comp}(V, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$
$\longrightarrow H^0(K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^1_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$
$\longrightarrow \cdots\cdots$
$\longrightarrow H^p_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^p_{comp}(V, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$
$\longrightarrow H^p(K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \longrightarrow \cdots\cdots$

が成立する。　ところが、ここで、K が D^n 内の compact set であることから、§2. Th. 2.1.3. を（例によって $\cosh(\delta z)$ を用いて modify することにより）用いて、$H^p(K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) = 0$ $(p \geqq 1)$ が判る。（一般に $\underrightarrow{\lim}\, \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}$ として $H^p_{comp}(X, \mathcal{F}) \cong \underrightarrow{\lim}\, H^p_{comp}(X, \mathcal{F}_\lambda)$ 但し X は locally compact，に注意すればよい。（たとえば、Godement [12] p. 194. Th. 4.12.1. 参照）　もちろん、Hörmander [19] p. 105. Th. 2.2.1′ を用いて、直接に Čech cohomology の vanishing を示す

ことも出来る。） 従って.

$$H^0(K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \cong H^1_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$$

$$H^p_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \cong H^p_{comp}(V, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$$

ここで Th.4.2.5 を適用すれば

$H^p(V, \widetilde{\mathcal{O}}) = 0 \quad (p \geq 1)$ を仮定してある

から, $H^p_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) = 0 \quad (p \neq 1, n)$,

$$H^n_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \cong [\widetilde{\mathcal{O}}(V)]'$$

ここで p.44 における $H^p(\Omega, \widetilde{\mathcal{O}})$,

$H^p_{comp.}(\Omega, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$ の表現に用いられた

complex を $\Omega = V-K$ として考えてみよう。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_0(V-K) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_0"] \arrow[d, leftrightarrow] & X_1(V-K) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_1"] \arrow[d, leftrightarrow] & \cdots\cdots (*) \\
0 & Y_n(V-K) \arrow[l] & Y_{n-1}(V-K) \arrow[l, "-\widetilde{\partial}_{n-1}"'] & \cdots\cdots (**) \arrow[l, "-\widetilde{\partial}_{n-2}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(*) \cdots \arrow[r, "\widetilde{\partial}_{n-2}"] & X_{n-1}(V-K) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_{n-1}"] \arrow[d, leftrightarrow] & X_n(V-K) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & 0 \\
(**) \cdots & Y_1(V-K) \arrow[l, "-\widetilde{\partial}_1"'] & Y_0(V-K) \arrow[l, "-\widetilde{\partial}_0"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

この互いに dual な2つの complexes に

おいて. $H^p_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) = 0 \quad (p \neq 1, n)$

故. $-\widetilde{\partial}_j$ の range が closed でない可能

性の残るのは $-\bar\partial_{n-1}$ と $-\bar\partial_0$ のみである。しかるに、Th. 4.2.6.（Malgrange の定理の拡張）により、$X_{n-1}(V-K) \xrightarrow{\bar\partial_{n-1}} X_n(V-K)$

は closed range であるから、$-\bar\partial_0$ は closed range（closed range theorem（たとえば、小松 [28] p. 172. Th. IV. 3. 46 参照）と、DFS*-space は reflexive であることを用いればよい。）又

$$
\begin{array}{ccccc}
0 \leftarrow & Y_n(V-K) & \xleftarrow[-\bar\partial^{V-K}_{n-1}]{} & Y_{n-1}(V-K) \\
 & \downarrow i & & \downarrow \\
0 \leftarrow & Y_n(V) & \xleftarrow[-\bar\partial^{V}_{n-1}]{} & Y_n(V)
\end{array}
$$

を考えれば $H^n_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \cong H^n_{comp}(V, \mathcal{O})$ であったから

$$\mathrm{Im}(-\bar\partial^{V-K}_{n-1}) = i^{-1}(\mathrm{Im}(-\bar\partial^{V}_{n-1}))$$

しかるに $H^1(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ 故

$X_0(V) \xrightarrow{\bar\partial_0^V} X_1(V)$ は closed range

従って Serre - 小松の補題（小松 [26] p. 381. Th. 19.）により $-\bar\partial^V_{n-1}$ は

closed range。 従って $i^{-1}(\mathrm{Im}(-\bar{\partial}^{V}_{n-1}))$
$= \mathrm{Im}(-\bar{\partial}^{V-K}_{n-1})$ は closed。 故に
Serre-小松の補題（小松 同上）が
$V-K$ に対しても適用できて、
$$[H^p(V-K, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong H^{n-p}_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\Omega})$$
以上の結果をまとめて
$$[H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong H^n_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\Omega})$$
$$\cong H^n_{comp}(V, \underset{\sim}{\Omega}) \cong [H^0(V, \tilde{\mathcal{O}})]'$$
$H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}})$, $H^0(V, \tilde{\mathcal{O}})$ は FS-space,
特に reflexive 故
$$H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}}) \cong H^0(V, \tilde{\mathcal{O}})$$
$$\therefore\ H^1_K(V, \tilde{\mathcal{O}}) \cong H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}}) / H^0(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$$
又、$p \geqq 2$ $p \neq n$ ならば、
$$0 = H^{n-p+1}_{comp}(V, \underset{\sim}{\Omega}) \cong H^{n-p+1}_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\Omega})$$
$$\cong [H^{p-1}(V-K, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong [H^p_K(V, \tilde{\mathcal{O}})]'$$
$$\therefore\ H^p_K(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$$

最後に $p = n$ として、
$$[H^n_K(V, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong [H^{n-1}(V-K, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong$$

$\cong H^1_{comp}(V-K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \cong H^0(K, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) = \underset{\sim}{\mathcal{O}}(K)$

以上により Th. 4.2.1. の証明は終った。

Th. 4.2.1. から $\mathcal{Q}(\Omega)$ が flabby sheaf (over $\mathcal{D}^n$) になることは、Homology 代数の一般論から容易にわかる。実際 たとえば 小松 [28] p. 89. Th. II. 3.18. により、我々は $\Omega \subset \mathcal{D}^n$ として、$H^p_\Omega(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ $(p \neq n)$ を証明すればよい。(V は Ω の $\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n$ での適当な近傍。) 今 $\partial\Omega$ は Ω は $\mathcal{D}^n$ 内で考えての boundary とする。この時、一般論から得られる次の完全系列を考えよう。

$0 \longrightarrow H^0_{\partial\Omega}(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^0_\Omega(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^0_\Omega(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n - \partial\Omega, \tilde{\mathcal{O}})$
$\rightarrow H^1_{\partial\Omega}(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow \cdots\cdots$
$\cdots \longrightarrow H^{n-1}_\Omega(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n - \partial\Omega, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow$
$\longrightarrow H^n_{\partial\Omega}(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^n_\Omega(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^n_\Omega(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n - \partial\Omega, \tilde{\mathcal{O}})$
$\longrightarrow 0$ (最後の $\longrightarrow 0$ の部分は、Th. 4.2.6. による。$H^{n+1}_\Omega(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ に

ついても同様。従って特に $H^p_\Omega(V,\tilde{\mathcal{O}})=0$
$p\geq n+1$ は明らか。) この完全系列と
前定理により $H^p_\Omega(\mathcal{D}^n\times i\mathbb{R}^n-\partial\Omega,\tilde{\mathcal{O}})$
$=0$ $(0\leq p\leq n-2)$ は明らか。

更に $0\longrightarrow H^{n-1}_\Omega(\mathcal{D}^n\times i\mathbb{R}^n-\partial\Omega,\tilde{\mathcal{O}})$
$\longrightarrow[\underset{\sim}{Q}(\partial\Omega)]'\xrightarrow[j]{}[\underset{\sim}{Q}(\bar{\Omega})]'$ が前定理により得られるが、§3の近似定理の系として j は明らかに injective。
従って $H^{n-1}_\Omega(\mathcal{D}^n\times i\mathbb{R}^n-\partial\Omega,\tilde{\mathcal{O}})$ も vanish しなければならない。以上をまとめて、

Th. 4.2.2. $\tilde{\mathcal{O}}$ は $\mathcal{D}^n$ に関して purely n-codimensional であり、特に、Fourier超函数の空間 $\{\mathcal{Q}(\Omega)\}$ は、flabby sheaf になっている。

この節の最後に、Th. 4.2.1. で得られた duality theorem について global な場合即ち $K=\mathcal{D}^n$ の場合、具体的な pairing が容易に得られるので、それについて少し触れておく。

$I=\{-1<y<1\}$ として $V_0=D^n\times\sqrt{-1}\,I^n$, $V_j=D^n\times\sqrt{-1}\,\{y\in I^n \mid y_j\neq 0\}$ として, $\mathcal{V}=\{V_j\}_{j=0}^n$, $\mathcal{V}'=\{V_j\}_{j=1}^n$ と定めれば, Excision Theorem と §2の結果を用いて Lerayの同型定理（たとえば小松[28] p.77. Th. II. 3.2, p.98, Th II.3.29.）により $H^n_{D^n}(D^n\times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ の元を $H^n(\mathcal{V},\mathcal{V}',\tilde{\mathcal{O}})$ の元により表わすことができる。更にこの場合 coveringの特殊性により, $H^n(\mathcal{V},\mathcal{V}',\tilde{\mathcal{O}})$ の代表元として, $\tilde{\mathcal{O}}(V_1\cap\cdots\cap V_n)$ の元により表わすことができる。それを $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_{2^n}\}$ とし, $f\in\underset{\sim}{\mathcal{O}}(D^n)$ に対して,

$$\langle[\varphi],f\rangle \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{j=1}^{2^n}\pm\int_{-\infty\pm i0}^{\infty\pm i0}\!\!\cdots\int\varphi_j(z)\,f(z)\,dx_1\cdots dx_n \quad \cdots\cdots (1)$$

（符号は, 積分路が第2j象限にある時, ＋, 他の時 − とする。）と定めることにより, 明らかに $H^n_{D^n}(D^n\times i\mathbb{R}^n,\tilde{\mathcal{O}})\xrightarrow[g]{}(\mathcal{O}_*)'$ なる写像が定義できる。次に $(\mathcal{O}_*)'\xrightarrow[h]{}H^n_{D^n}(D^n\times i\mathbb{R}^n,\tilde{\mathcal{O}})$ を次のように定める。（§5で再びこの写像については詳しく触れる。）その定義の為, 1.2 準備を行う。（h の定義は p.60. にある。）

Prop. 4.2.3. $\mathcal{P}_*$ $(=\underset{\sim}{Q}(D))$ は Fourier 変換に対して安定である。

証明］ 定義から明らかである。又もちろん $\mathcal{P}_* \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \mathcal{P}_*$ （但し $\mathcal{F}\varphi \underset{\mathrm{Df}}{=} \int e^{ix\xi}\varphi(x)dx$）は明らかに closed operator であり，（∵ $\mathcal{P}_*$ は DFS-space 故，$\mathcal{F}$ の graph の closed を調べるには点列で考えれば十分，従って $\mathcal{P}_*$ の位相の定義と Lebesgue の収束定理により明らか。）しかも bijective 故 $\mathcal{P}_*$ から $\mathcal{P}_*$ への topological な isomorphism にもなっている。 そこで

Def. 4.2.4. $(\mathcal{P}_*)' \ni \mu$ に対し

$\langle \mathcal{F}_d\mu, f\rangle \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \mu, \mathcal{F}f\rangle$ $({}^\forall f \in \mathcal{P}_*)$ により μ の Fourier 変換 $\mathcal{F}_d\mu$ を定める。

又、$\langle \overline{\mathcal{F}}_d\mu, f\rangle \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle \mu, \overline{\mathcal{F}}f\rangle$ とする。（$\overline{\mathcal{F}}$ は Fourier 逆変換）

更に、$\mathbb{R}^n$ を 2^n ケの象限に分けてそれらを $K_1, \cdots, K_{2^n}$ とする。 この時

Th. 4.2.5. $\mu \in (\mathcal{P}_*)'$ とすると ${}^\exists\mu_j \in (\underset{\sim}{Q}(K_j))'$ $\mu = \sum \mu_j$ とできる。

証明］ $\mathcal{P}_* \longrightarrow \oplus\, \underset{\sim}{Q}(K_j)$ なる

自然な restriction map を考える。これは定義から直ちに分るように injective な closed range operator である。(いつも通り、対象が $\mathcal{D}$FS-space 故点列で考えてよいから明らかである。) 従ってこの写像の dual を考えれば、

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus [\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K_j)]' & \longrightarrow & (\mathcal{P}_*)' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\mu_j) & \longmapsto & \sum \mu_j \end{array}$$

は surjection になっている。

Def. 4.2.6. Th. 4.2.5. で得られた μ の分解に対し、

$\langle \mu_j, e^{iz\zeta} \rangle \equiv F_j(\zeta)$ と定めるとき

$\{F_1(\zeta), \cdots, F_{2^n}(\zeta)\} \in H^n_{D^n}(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$

実際、問題は、これが μ の分解の仕方によらないかどうかを確めることであるが、それは、§3 の近似定理により $\underset{\sim}{\mathcal{O}}(D^n)$ が $\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K_j)$ で dense だから

$[\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K_j)]' \hookrightarrow [\underset{\sim}{\mathcal{O}}(D^n)]'$ とみなすことにより，μ の分解の ambiguity は $[\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K_j)]' \cap [\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K_k)]'$ に属する元 ν によって生じる。所がここで

$$
\begin{aligned}
0 &\longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{O}}(K_j \cup K_k) \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{O}}(K_j) \oplus \underset{\sim}{\mathcal{O}}(K_k) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Downarrow \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (f, g) \longmapsto \\
&\longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{O}}(K_j \cap K_k) \longrightarrow H^1(K_j \cup K_k, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \\
& \qquad\quad \Downarrow \\
&\longmapsto (f-g) \\
&\longrightarrow \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

を考えれば，p.51. で注意したように $H^1(K_j \cup K_k, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) = 0$ 故，

そのような元 ν は $[\underset{\sim}{\mathcal{O}}(K_j \cap K_k)]'$ の元と見なすことができる。従って $\langle \nu, e^{iz\zeta} \rangle$ を考える時，それは $H^n_{D^n}(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ では 0 元を定めている。従って Def. 4.2.6. は意味をもつ。

以上の準備の下で，

Def. 4.2.7. (反の定義)

$(\mathcal{O}_*)' \ni \mu$ に対し $\mathcal{F}d\mu \underset{Df}{=} \nu$ (Def. 4.2.4. 参照) とし，ν を Th. 4.2.5. により $\sum \nu_j$ と

分解し、それに Def. 4.2.6 を適用して、

$\{F_j(\zeta)\} \in H^n_{D^n}(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ の元を

定める。これを $k(\mu)$ と定める。

この時

Th. 4.2.8. $j\circ k : (\mathcal{O}_*)' \longrightarrow (\mathcal{O}_*)'$ は identity map, かつ j は injective。従って特に j, k は bijective

証明] 1) $j\circ k = id.$ の証明.

$f \in \underset{\sim}{\mathcal{O}}(D^n)$ とする。p.57 の (1) により

$$\langle j\circ k(\mu), f \rangle = \sum \pm \int\cdots\int F_j(\zeta) f(\zeta) \cdot$$

$$\cdot d\xi_1 \cdots d\xi_n = \sum \int\cdots\int \langle \nu_j, e^{iz\zeta} \rangle f(\zeta)$$

$d\xi_1 \cdots d\xi_n$ （ $F_j(\zeta)$ の定義の時、符号は p.57 の規約と compatible となるように定めておくこととする。）

$$= \sum \langle \nu_j, \int\cdots\int e^{iz\zeta} f(\zeta) d\xi_1 \cdots d\xi_n \rangle$$

$$= \langle \nu, \int\cdots\int e^{iz\zeta} f(\zeta) d\xi_1 \cdots d\xi_n \rangle$$

$$= \langle \nu, \mathcal{F}f \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}}_d \mu, \mathcal{F}f \rangle = \langle \mu, f \rangle$$

が すべての $f \in \mathcal{O}(D^n)$ $(= \mathcal{P}_*)$ に対して

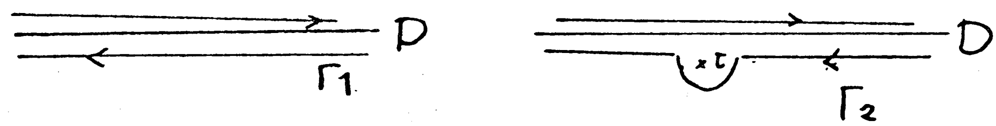
成立しているから. $j \circ k = id$.

ii) j が injective の証明

$\langle [\varphi], f \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{P}_*$ としよう。

ここで $f_t(z) \underset{\mathrm{Df}}{=} \exp(-(t-z)^2) \big/ -2\pi i(t-z)$

とする。簡単の為 $n=1$ としよう。($n \geq 2$ の時も全く同じである。)



今、Γ_1, Γ_2 なる2つの積分路を考えよう。

この時 t が図の位置にあるとして

$$\int_{\Gamma_2} \varphi(z) f_t(z)\, dz - \int_{\Gamma_1} \varphi(z) f_t(z)\, dz$$

$= \varphi(t)$ (∵ Cauchy の積分公式)

しかるに 仮定より $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi(z) f_t(z)\, dz = 0$

ところが $\displaystyle\int_{\Gamma_2} \varphi(z) f_t(z)\, dz$ は $t \in D$

でも定義され、しかも、$z - t = u$ と積

分変数を変更してみると

$$\left|\int_{\Gamma_2}\varphi(z)f_t(z)dz\right| \leq \int_{\Gamma_2'}|\varphi(u+t)|\,\frac{\exp(-u^2)}{u}\,du$$

故 $|\varphi(z)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}$ ($\forall\varepsilon$) が Γ_2 上で

成立していることから

$\left|\int_{\Gamma_2}\varphi(z)f_t(z)dz\right| \leq B_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}$ ($\forall\varepsilon$) が

$|\mathrm{Im}\,t| < {}^\exists\delta$ ($\delta \ll 1$) で成立する。従って、

$\varphi(t)$ は cohomology class として 0 である。

以上により p.57 で定義した積分(1)により $H^n_{D^n}(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ と $\mathcal{S}_*$ の pairing が与えられることが分った。

§5. Fourier (-Carleman-Leray-Sato) 変換

この節では, Fourier変換の具体的取扱いの一つの方法を示すことを目標とする。一種のPaley-Wienerの定理である。このような考え方は多分Leray [30] に始まるのではないかと思う。あるいはCarleman [3] もこのような試みをしているのかも知れない (cf. Martineau [38] Ch. 5.) が見る機会を得なかった。

尚, この節のかなりの部分は既に §4. 4.2. で具体的なdualityの表現に関して述べてある。

5.1. (Coneにsupportをもつ) Fourier超函数のFourier変換

Th. 5.1.1. Γを$\mathbb{R}^n$のclosed, strictly convex cone (即ち全直線を含むことはないconvex cone) とする。更に簡単の為Γの頂点は原点であるとし, 更に座標軸は$\Gamma \Subset \{x_1 \geqq 0\}$となるようにとられているとしておく。(ここで, 一般に2つのcone Γ_1,

Γ_2 に対して，$\Gamma_1 \Subset \Gamma_2$ とは，$\Gamma_1 \cap \{|x|=1\} \Subset \Gamma_2 \cap \{|x|=1\}$ の略記とする。以下においても同様）この時 K を Γ の D^n における closure として，$\mu \in [\mathcal{Q}(K)]'$ とする。この μ に対し，$\langle \mu, e^{iz\zeta} \rangle$ を考えると，これは $\zeta \in \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\,(\Gamma^\circ)^i$ に対して well-defined かつそこで正則で，しかも $\forall \theta > 0$，$\forall \Gamma' \Subset \Gamma^\circ$ に対しても，$\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\,(\Gamma' + \delta(1,0\cdots 0))$ において次の評価を満たす。

(*) $\forall \varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon$（もちろん C_ε は Γ' にも依存する。）

$$|\langle \mu, e^{iz\zeta} \rangle| \le C_\varepsilon e^{\varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta| + \chi_{\Gamma,\varepsilon}(\mathrm{Im}\,\zeta)}$$

但し以上において Γ° とは，Γ の polar set，即ち $\{\xi \mid \langle x, \xi \rangle \geq 0\}$ であり $(\ )^i$ は開核の意である。

$$\text{※}\cdot\ \chi_{\Gamma,\varepsilon}(\eta) \underset{\text{def.}}{=} \sup_{x \in \Gamma - \varepsilon(1,0\cdots 0)} (-\langle x, \eta \rangle + \varepsilon|x|)$$

証明］$\mathcal{Q}(K)$ の位相の定義から殆んど明らかである。実際，$\forall U \supset K$ に対し ε を十分小さくとれば $(\Gamma - \varepsilon(1.0\cdots 0)) \times \sqrt{-1}\{|y| < \varepsilon\} \subset U$ 故，$\mathcal{Q}(\Gamma) =$

$= \varinjlim \mathcal{Q}^m(U_m)$ （即ち、U_m を K の基本近傍系（in $D^n \times i\mathbb{R}^n$）として、$\mathcal{Q}^m(U_m) \underset{Df}{=} \{f(z) \in \mathcal{O}(U_m \cap \mathbb{C}^n) \mid \sup_{z\in U_m} |f(z)| e^{\frac{1}{m}|z|} < \infty\}$ と定めたもの、§3参照）という定義から、定理の条件を満たす限り

$$|\langle \mu, e^{iz\zeta}\rangle| \le C_\varepsilon \sup_{z\in (\Gamma - \varepsilon(1,0\cdots0))\times\sqrt{-1}\{|y|<\varepsilon\}} |e^{iz\zeta+\varepsilon|z|}|$$

が成立しなければいけないからである。

又、$\langle \mu, e^{iz\zeta}\rangle$ の正則性も、

$$\frac{e^{iz\zeta'}-e^{iz\zeta}}{\zeta'-\zeta} \xrightarrow[(\zeta'\to\zeta)]{} iz\,e^{iz\zeta}$$

が $\mathcal{Q}(K)$ の位相で成立するから明らかである。

注意. 形式的に、$\chi_{\Gamma,\varepsilon}(\eta)$ という函数を導入したが、それは、上の証明から判るように、$\underbrace{\varepsilon\eta_1}_{(\eta_1 \gg 1 \text{ として})}$ としてよい。（座標軸のとり方による。）

次に、前節 p. 58 で $(\mathcal{P}_+)'$ $(\cong H^n_{D^n}(D^n\times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}))$ の元 μ に対して、duality を用いて定義した Fourier 変換 $\mathcal{F}_d$ を利用

して、Th.5.1.1.の逆定理を証明しよう。

Th.5.1.2. Th.5.1.2.の結果の成立するような $\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}(\Gamma^\circ)^i$ における正則函数 $F(\zeta)$ (即ち $\forall \Gamma' \Subset \Gamma^\circ$ において Th.5.1.2 の(ロ)という増大度制限を満たすとする)はもちろん p.57で述べたように $H^n_{D^n}(D^n \times i\mathbb{R}^n; \tilde{\mathcal{O}})$ の元 μ を定める。(即ち μ は $F(\zeta)$ の"境界値"である。)この時、§4.4.2の最後の部分で述べたように $H^n_{D^n}(D^n \times i\mathbb{R}^n; \tilde{\mathcal{O}})$ の pairing は自然な形で与えられるから μ を $(\mathcal{P}_*)'$ の元とみなすことができる。(§4.4.2の記号では $j(\mu)$) すると、p.58 の Def.4.2.4 を用いて、$\mu = \mathcal{F}_d^{-1}\nu$, $\nu \in (\mathcal{P}_*)'$ なる ν を見つけることができる。この時、ν は、(Kを Γ の D^n での閉包として) $\underset{\sim}{Q}(K)$ の線形汎函数に迄拡張できる、即ち $\nu \in [\underset{\sim}{Q}(K)]'$ とみなすことができる。

証明] Γ の凸性により本質的には $n=1$ の場合に帰着される。まず $n=1$ の場

合を示そう。§3の近似定理により、$f(\zeta) \in \underset{\sim}{\mathcal{Q}}^m(D)$（即ち $\sup_{|\mathrm{Im}\,\zeta|<1/m} |f(\zeta)e^{\frac{1}{m}|\zeta|}| < \infty$）として $\forall \varepsilon$ に対しても $\exists C_\varepsilon$ が存在して

$$\left| \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} F(\zeta) f(\zeta) d\zeta \right| \leq$$

$$\leq C_\varepsilon \sup_{z \in \Gamma_\varepsilon \cap \mathbb{C}} |(\mathcal{F}f)(z) e^{\varepsilon|z|}| \text{ が成立}$$

すればよいことは、$\underset{\sim}{\mathcal{Q}}(K)$ の位相の定義により明らか。（但し、ここで Γ_ε は K の $D \times i\mathbb{R}$ における "ε-近傍"、即ち $\Gamma_\varepsilon \cap \mathbb{C} = \{x+iy \mid x \geq -\varepsilon,\ |y| < \varepsilon\}$（但し今 $\Gamma = \{x \geq 0\}$ とした）である。）又、ここで、$\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} d\zeta$ という記号は、もちろん f の正則域に応じて十分小さい δ に対し $\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} d\zeta$ とするの意である。（well-definedは F, f の条件より明らか。）しかるに $\mathcal{F} : \mathcal{P}_* \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_*$ 故 $(\mathcal{F}f)(z)$ を改めて $g(z)$ と書くこととして $f = \overline{\mathcal{F}}g$ 故、上の不等式を証明する

には、次の不等式を示せばよい：

$$\left| \int F(\zeta) \int e^{-i\zeta z} g(z)\, dz \cdot d\zeta \right|$$

$$\leq C_\varepsilon \sup_{z \in \Gamma_\varepsilon \cap \mathbb{C}} \left| g(z) e^{\varepsilon |z|} \right|$$

その証明： 左辺の積分を I とする。更に

$$I_{+} \underset{\mathrm{Df.}}{=} \int_{\substack{\xi + i\delta \\ \xi \geq 0}} F(\zeta) \int_{x - i\delta} e^{-i\zeta z} g(z)\, dz\, d\zeta$$

$$I_{-} \underset{\mathrm{Df.}}{=} \int_{\substack{\xi + i\delta \\ \xi \leq 0}} F(\zeta) \int_{x + i\delta} e^{-i\zeta z} g(z)\, dz\, d\zeta$$

$$J_{++} \underset{\mathrm{Df.}}{=} \int_{\substack{\xi + i\delta \\ \xi \geq 0}} F(\zeta) \int_{\substack{x - i\delta \\ x \geq -\delta'}} e^{-i\zeta z} g(z)\, dz\, d\zeta$$

$$J_{+-} \underset{\mathrm{Df.}}{=} \int_{\substack{\xi + i\delta \\ \xi \geq 0}} F(\zeta) \int_{\substack{x - i\delta \\ x \geq -\delta'}} e^{-i\zeta z} g(z)\, dz\, d\zeta$$

$$J_{-+} \underset{\mathrm{Df.}}{=} \int_{\substack{\xi + i\delta \\ \xi \leq 0}} F(\zeta) \int_{\substack{x + i\delta \\ x \geq -\delta'}} e^{-i\zeta z} g(z)\, dz\, d\zeta$$

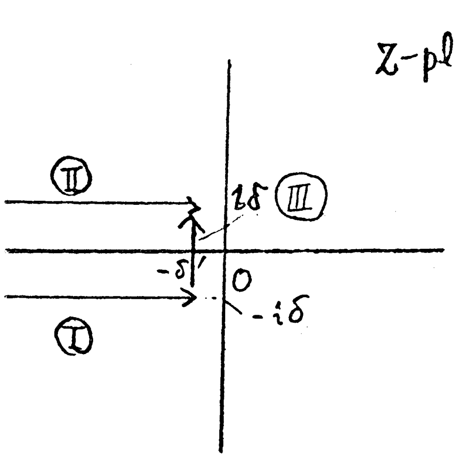
$$J_{--} \underset{\mathrm{Df.}}{=} \int_{\substack{\xi + i\delta \\ \xi \leq 0}} F(\zeta) \int_{x + i\delta,\ x \geq -\delta'} e^{-i\zeta z} g(z)\, dz\, d\zeta$$

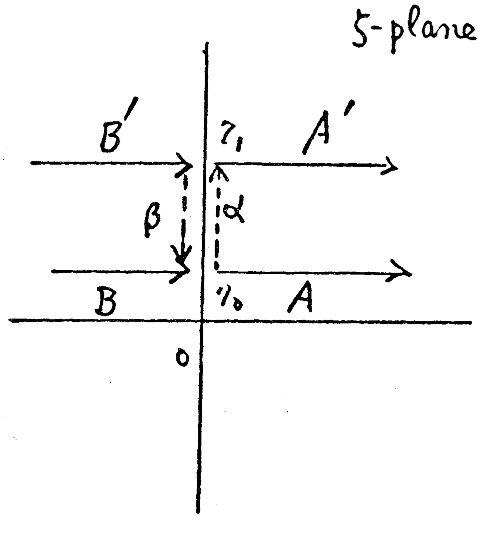
と定めれば、明らかに $I = I_+ + I_-$

$I_+ = J_{++} + J_{+-}$, $I_- = J_{-+} + J_{--}$ であり、しかも $|J_{++}|$, $|J_{-+}|$ が求める不等式の右辺で押えられることは明らかである。

$F(\zeta)$についての定理の仮定 (*) を用いて $\forall\theta>0, \forall\delta'>0$ に対しても、$\delta>0$を十分小さくとれば、$|J_{+-}+J_{--}|<\theta$ が成立することを示そう。$J_{+-} = \iint_{\mathrm{I}\times A} dz\,d\zeta$,

$J_{--} = \iint_{\mathrm{II}\times B} dz\,d\zeta$ と積分路を略記する。ここで Ⅰ, Ⅱ, A, B, は下図の通りである。





ここで $\displaystyle\iint_{\text{Ⓘ}\times A} dz\,d\zeta$ を $\displaystyle\iint_{\text{Ⓘ}\times A'} dz\,d\zeta$ に、

$\displaystyle\iint_{\text{Ⓘⓘ}\times B} dz\,d\zeta$ を $\displaystyle\iint_{\text{Ⓘⓘ}\times B'} dz\,d\zeta$ に変更

したい。実際そうすれば $r_1 \uparrow \infty$ とすることにより、(*) から $\displaystyle\iint_{\text{Ⓘ}\times A'} dz\,d\zeta$, $\displaystyle\iint_{\text{Ⓘⓘ}\times B'} dz\,d\zeta$

$\longrightarrow 0$ が知られるからである。

ところが $(J_{+-} + J_{--}) - \Big(\displaystyle\iint_{\text{Ⓘ}\times A'} dz\,d\zeta +$

$$+ \iint_{\text{Ⓘⓘ}\times B'} dz\,d\zeta\Big) = \iint_{\text{Ⓘ}\times\alpha} dz\,d\zeta$$

$$+ \iint_{\text{Ⓘⓘ}\times B} dz\,d\zeta = \iint_{(\text{Ⓘ}-\text{Ⓘⓘ})\times\alpha} dz\,d\zeta$$

(−Ⓘⓘ とは Ⓘⓘ の orientation を逆にしたの意)

しかるに一方. Cauchy の積分定理により

$$\int_{\alpha}\Big(\int_{\text{Ⓘ}+\text{Ⓘⓘⓘ}-\text{Ⓘⓘ}} dz\Big)\,d\zeta = 0$$

従って $\displaystyle\Big|\iint_{\alpha\times\text{Ⓘⓘⓘ}} dz\,d\zeta\Big| \longrightarrow 0$ を言えば十分。

しかるに、ここで再び $F(\zeta)$ についての条件(*) を用いることにより、$\forall\delta'$ に対しても $\exists C_{\delta'}$ s.t.

$$\left|\int_{\eta_0}^{\infty} F(i\tau)\int_{-\delta}^{\delta}\exp(-iz\zeta)\,g(z)\,dy\,d\tau\right|$$

$$\leq C_{\delta'}\int_{\eta_0}^{\infty}\exp\left(\frac{\delta'}{2}\tau\right)\int_{-\delta}^{\delta}\exp(-\delta'\tau)\,dy\,d\tau$$

($\because$ $\exp(-iz\zeta)=\exp(\tau z)$ かつ $\mathrm{Re}\, z\leq$ $\leq-\delta'$、しかも $\{0+iy\}_{-\delta_0<y<\delta_0}$ (δ_0 $(>\delta)$ fixed) において $|g(z)|$ は有界故)

$$\leq 2\delta C_{\delta'}\int_{\eta_0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\delta'}{2}\tau\right)d\tau$$

$\longrightarrow 0$ $(\delta\to 0)$ 以上により、$n=1$ の時

$$\left|\int F(\zeta)f(\zeta)\,d\zeta\right| \leq C_\varepsilon \sup_{z\in\Gamma_\varepsilon\cap\mathbb{C}}\left|(\mathcal{F}f)(z)e^{\varepsilon|z|}\right|$$

が証明され、従って $\mu=\mathcal{F}_d\nu$ とした時、ν は $[\mathcal{Q}(K)]'$ の元に迄拡張できることが判った。

次に $n\geq 2$ の場合の証明に移ろう。この場合、Γ が closed convex cone であるから、$\Gamma=\bigcap_{\xi}H_\xi$ (但し $H_\xi=\{x\,|\,\langle x,\xi\rangle$

$\geq 0\}$ ）という形に表現できることと，(＊)の条件の与え方（即ち $\forall \Gamma' \Subset \Gamma^0$ に対して (＊) の評価が成立する，という仮定）により，本質的に $n=1$ の場合の評価でまに合う。（開 H_ξ に対し $[\mathcal{Q}(H_\xi)]'$ の元 μ に対して，$\langle \mu, e^{i\zeta z_\xi} \rangle$ を考えて，その正則性，増大度による μ の特徴付けを与えることは出来ないし，まして $\Gamma' \supset H_\xi$ として $[\mathcal{Q}(\overline{\Gamma'})]'$ の元に対してそのようなことは出来ないから，それは一見奇妙に思えるが，実は，我は $\overline{\Gamma'}$ の近傍での sup-norm により積分が押えられることにより，$\nu \in [\mathcal{Q}(\overline{\Gamma'})]'$ ということを出し，更に ξ をいろいろに動かした時 どの ξ に対しても

$$\nu \in [\mathcal{Q}(\overline{H_\xi})]' \cong H^n_{\overline{H_\xi}}(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$$

（§4. Th. 4.2.1.）従って $\mathcal{Q}(\Omega)$ が sheaf になっていることから（§4 Th. 4.2.2.）

$$\nu \in H^n_K(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \cong [\mathcal{Q}(K)]'$$

と帰結できるのである。）実際にその証明（$n=1$ と同じでよい という demonstration）を行っておこう。記述を簡単にする為 $n=2$

としよう。我々は（適当に座標軸をかえることによ）

$$\left|\iint F(\zeta_1, \zeta_2) \iint e^{-i\langle\zeta, z\rangle} g(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2\, d\zeta_1 d\zeta_2\right|$$

の評価を $x_1 \geqq -\varepsilon$ $\{|y| < \varepsilon\}$ における

$\sup |g(z)| e^{\varepsilon|z|}$ により行えば十分。

$\iint dz d\zeta$ により誤解のない時は4重積分を以下現わすこととする。$n=1$ の時と同様に

$$\iint dz d\zeta = \iint_{\xi_1 \geqq 0, \xi_2 \geqq 0} dz d\zeta + \iint_{\xi_1 \leqq 0, \xi_2 \geqq 0} + \cdots$$

$\underset{\mathrm{Df}}{=} I_{++} + I_{-+} + I_{+-} + I_{++}$ とする。（もちろん ξ_j の正,負に応じて dz の積分路は $\mathrm{Im}\, z_j$ を負,正とする。）更に上の I_{++} etc. の dz についての積分を分けることにより, $n=1$ の時と同様に考えて

$$\left|\int_{\xi_1 \geqq 0} \int_{x_1 \leqq -\varepsilon,\ x_1 - iy_1^0} G^+(\zeta_1, z_1)\, dx_1 d\xi_1 - \int_{\xi_1 \leqq 0} \int_{x_1 \leqq -\varepsilon,\ x_1 + iy_1^0} G^+(\zeta_1, z_1)\, dx_1 d\xi_1 \right| < \theta$$

$$(\text{if } |y_1^0| \ll 1)$$

が証明できればよい。ただし、ここで

$$\overbrace{\int_{\xi_2\geq 0\ \xi_2+i\eta_2^0} F(\zeta_1,\zeta_2)\int_{x_2-iy_2^0} e^{-i(\zeta_1 z_1+\zeta_2 z_2)}}^{G^+(\zeta_1,z_1)\text{ 可.}}\ g(z_1,z_2)\,dz_2\,d\zeta_2$$

と定めた。

従って $G^+(i\tau, z_1)$ $(\tau>0)$ の評価が $n=1$ の時と同様に出来ればよい。ところが

$$|G^+(i\tau, z_1)|$$
$$\leq C_\varepsilon |e^{\tau z_1}| \iint e^{\varepsilon|\tau|+\varepsilon|\xi_2|}\, e^{-\xi_2 y_2^0+\eta_2^0 x_2} \times e^{-\varepsilon(|x_1|+|x_2|)}\, dx_2\, d\xi_2$$

が $F(\zeta_1,\zeta_2)$, $g(z_1,z_2)$ についての仮定から成立する。$(\varepsilon\ll 1)$

従って $|G^+(i\tau, z_1)|$
$\leq C_\varepsilon' e^{\tau z_1+\varepsilon|\tau|}$ となるから，$n=1$ の時の $\int_\alpha\int_{\times\text{III}} dz\,d\zeta \longrightarrow 0$ はこの場合も成立する。従って $n\geq 2$ の時も求める評価は成立する。

以上の Th. 5.1.1, Th. 5.1.2. によって，$[\underset{\sim}{Q}(K)]'$ の元 μ は，$K\cap\mathbb{R}^n$ が strictly convex である限り，Fourier 変換して

ある tublar domain での正則函数として捕えるのが natural でもあり、又、便利そうであること（事実、我々は後に Ch.II §4 において超函数論において双曲性を論じる時、この捕え方が有効であることを示す。）が理解されたと思う。しかもその正則函数は、$H^n_{D^n}(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ と元と自然に考えることができる（p. 57 参照）からその〃境界値"として定まる $H^n_{D^n}(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ の元を μ の Fourier-(Carleman-Leray-Sato)-変換と呼び、$\mathcal{F}_S\mu$、略して $\mathcal{F}\mu$ と書くことにしよう。(cf. Def 4.2.6) この時

$$\int \langle \mu, e^{i z \zeta} \rangle f(\zeta) d\zeta = \langle \mu, \int e^{i z \zeta} f(\zeta) d\zeta \rangle$$

$$= \langle \mu, \mathcal{F} f \rangle \underset{\text{by def}}{=} \langle \mathcal{F}_d \mu, f \rangle \quad (\forall f \in \mathcal{D}_*)$$

が成立しているから $\mathcal{F}_S\mu = \mathcal{F}_d\mu$ が成立する。(cf. Th. 4.2.8.)

又、一般の $\mu (\in H^n_{D^n}(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}))$ に対しても、$\{\mathcal{G}(\Omega)\}$ が sheaf になっているから、それを上のような support をもつ

分解を行い、（その分解を $\sum \mu_j$ とする）
$\langle \mu_j, e^{iz\zeta} \rangle \underset{\mathrm{df}}{=} F_j(\zeta)$（$\mu_j \in [\mathcal{Q}(K_j)]'$, 但し K_j は第 j 象限の $\mathbb{D}^n$ での閉包）と定めて、$\{F_j(\zeta)\} \in H^n_{D^n}(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ と考える（well-defined）ことにより μ の Fourier（-Carleman-Leray-Sato）変換を定めるのは、p. 59. Def. 4.2.6. と同じである。

Ch. 2. 超函数論における一般線型偏微分作用素論

この章で取り扱うのは §5 を除き定数係数の作用素である。(従って Fourier 変換の理論が有効に利用され得る。) 微分作用素 (ここでは最も広義の意味において考える。たとえば、無限位数の物 (所謂 local operator (後述 §1 Def. 1.1 1.), あるいは差分方程式, 更に佐藤 [43] の意味での pseudo-differential op. 等も含めて言う。) に対する解析的性質を、代数的表現で記述しようという、Petrowsky, Gårding, Ehrenpreis-Malgrange-Hörmander 等の仕事の一つの真似である。 §1. の結果は論理的にはともかくとして、実用上は不便である。更に Fourier 超函数の理論を拡張する必要を強く感じている。我々が目標とするのは、$\mathcal{B}(\Omega)$ (超函数、たとえば 佐藤 [42], 小松 [28] 参照) 又は $\mathcal{B}/\mathcal{a}$ ($\mathcal{a}$ は

実解析函数の層であり、$\mathcal{B}/\mathcal{a}$ はその quotient sheaf) 更により精密に $\mathcal{C}$ (特異性の層, 佐藤 [43] 参照) での analysis であり, Fourier 超函数での それは その手段に過ぎない。 $\mathcal{Q}(\Omega)$ で 問題が, 解ければ, すべての問題は 解けるけれど ($\mathcal{Q}(\Omega)$ が flabby sheaf であり, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ なら $\mathcal{Q}(\Omega) = \mathcal{B}(\Omega)$ だから) 逆は正しくない。 Fourier 変換の理論がうまく拡張されれば, §1. の条件 (S') は 理想的な条件 (S) におきかえれると期待している。(p.84.)

§1. 除法問題 (general type) についての考察.

1.1. $\mathcal{Q}(D^n)$ における除法問題

Def. 1.1.1. S を compact support の超函数とする。この時 $\mu \in \mathcal{Q}(D^n)$ に対し, $\langle S*\mu, f \rangle \underset{Df}{=} \langle \mu, f*\check{S} \rangle$ により $S*\mu$ を定義する。但し $\check{S}(x) \underset{Df}{=} S(-x)$, $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$

特に S の support が $\{0\}$ だけの時,

$S*$を local operator と呼ぶ。

注意 上の定義は well-defined である。それには

$\mathcal{B}_* \xrightarrow[T*]{} \mathcal{B}_*$ $(T=\check{S})$ が連続である

ことを示せばよい。まず

i) $T*$ は $\mathcal{B}_*$ 全体で定義される。

実際 $f(x) \in \mathcal{B}_*$ としよう。定義により

$(T*f)(w) = \langle T_z, f(w-z) \rangle$

ここで今 $f(x)$ は $|\mathrm{Im}\, x| < 3\varepsilon$ で正則

かつ そこで $|f(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|}$ としよう。

すると T は compact support の超函数, 従って, それはよく知られているように

real な compact set K を porter とする analytic functional と思ってよい。

(佐藤 [41], Martineau [37] 等)

従って K の近傍として $U \times \sqrt{-1}\{|\mathrm{Im}\, z| < \varepsilon\}$

(U は K の $\mathbb{R}^n$ での近傍) をとることにすれば $\exists C_\varepsilon$

$$|\langle T_z, f(w-z) \rangle| \leq C_\varepsilon \sup_{z \in U \times \sqrt{-1}\{|\mathrm{Im}\, z| < \varepsilon\}} |f(w-z)|$$

従って $|\mathrm{Im}\, w| < \varepsilon$ とすれば f についての仮定により, $\exists a$

$$|\langle T_z, f(w-z)\rangle| \leq C_\varepsilon \sup_{|t|<a} \exp(-\varepsilon|w-t|)$$

$$\leq C_\varepsilon \exp(-\varepsilon|w| + a\varepsilon)$$

よって $g(w) \underset{\mathrm{Df}}{=} \langle T_z, f(w-z)\rangle \in \mathcal{P}_*$

ii) i) の証明と同様にして $T*: \mathcal{P}_* \longrightarrow \mathcal{P}_*$ が連続であることも見易い。あるいは $\mathcal{P}_*$ が DFS-space であるから $T*$ が closed operator であること (それも $\mathcal{P}_*$ が DFS-space 故 点列について言えば十分) を言えば i) から証明は終る。所が $\langle T_z, f_n(w-z)\rangle \underset{\mathrm{Df}}{=} g_n(w)$ として $f_n \longrightarrow f$ (in $\mathcal{P}_*$) かつ $g_n(w) \longrightarrow g(w)$ (in $\mathcal{P}_*$) なら 特に w を fix して $\langle T_z, f_n(w^0-z)\rangle \longrightarrow \langle T_z, f(w^0-z)\rangle$, $g_n(w^0) \longrightarrow g(w^0)$ が 特に成立するから $g(w^0) = \langle T_z, f(w^0-z)\rangle$ ie. $g(w) = \langle T_z, f(w-z)\rangle$. 従って $T*$ は closed operator.

更に この時,

Prop. 1.1.2. $\mu \in \mathcal{Q}(D^n)$ とし、その Fourier 変換 $\mathcal{F}\mu$ (see Ch. 1 §4, §5.) の $H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \tilde{\mathcal{O}})$ での表現を $\{\varphi(\zeta)\}$ とする。ここで $H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \tilde{\mathcal{O}})$ とは、$H^n_{D^n}(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ の所謂 "covering による表現" (Leray の同型定理による。たとえば、小松 [ ] p. 98 Th. II, 3.29. 参照) である。但し、$\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \cdots, V_n\}$, $\mathcal{V}' = \{V_1, \cdots, V_n\}$, ここに $V_j \underset{\text{def}}{=} \{z \in D^n \times iU^n \mid \operatorname{Im} z_j \neq 0\}$, $V_0 = D^n \times iU^n$, (U^n はたとえば半径1の開球) とした。さてこの時 $\nu \underset{\text{def}}{=} S * \mu$, $\langle S, e^{iz\zeta} \rangle \underset{\text{def}}{=} J(\zeta)$ とすると、$\mathcal{F}\nu$ の $H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \tilde{\mathcal{O}})$ の元としての表現として $\{J(\zeta)\varphi(\zeta)\}$ をとることができる。

証明] $f \in \mathcal{S}_*$ として、

$$\langle \mathcal{F}\nu, f \rangle \underset{\text{by def}}{=} \langle \nu, \mathcal{F}f \rangle = \langle S * \mu, \mathcal{F}f \rangle$$

$$\underset{\text{by def}}{=} \langle \mu, \check{S} * \mathcal{F}f \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\mu, \check{S} * \mathcal{F}f \rangle$$

$$= \langle \mathcal{F}\mu, \overline{\mathcal{F}}(\check{S} * \mathcal{F}f) \rangle = \langle \mathcal{F}\mu, \overline{\mathcal{F}}\check{S}\, \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f \rangle$$

$$= \sum \int \cdots \int \varphi(\zeta) (J(\zeta) f(\zeta)) d\xi_1 \cdots d\xi_n \text{ (Ch. 1.}$$

§4の dualityの表現による。)

$= \sum \int \cdots \int |J(\zeta)\varphi(\zeta)| f(\zeta)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n$

ここで $|J(\zeta)| \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + K|\mathrm{Im}\,\zeta|}$ $(\forall\varepsilon>0)$ が成立するから, $J(\zeta)\varphi(\zeta)$ は $H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathfrak{F})$ の元を定めている。($\because$ U^nは有界としたから, $K|\mathrm{Im}\,\zeta|$ の部分は C_εに繰り込める。)

従って $\langle \mathfrak{F}\nu, f \rangle = \sum \int \cdots \int (J(\zeta)\varphi(\zeta)) f(\zeta) \cdot d\xi_1 \cdots d\xi_n$ が $\forall f \in \mathcal{P}_*$ に対して成立する。

従って $\mathfrak{F}\nu$ の $H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathfrak{F})$ での表現, 即ち, $\mathfrak{F}\nu$の "定義函数" として $J(\zeta)\varphi(\zeta)$を とってよい。

さて, $S*$ の $\mathcal{Q}(D^n)$における可解性の十分条件を与えるために, (Th. 1.1.4).

$S* : \mathcal{Q}(D^n) \longrightarrow \mathcal{Q}(D^n) \longrightarrow 0$ (surj.)

と仮定したとき. $\langle S, e^{iz\zeta} \rangle \underset{\text{def}}{=} J(\zeta)$ に どのような条件が課せられるかを調べよう。ただしこの定理(必要性)は $n=1$ の時にしか未だ証明ができない。(結果は $n \geqq 2$でも正しいと予想されるが。)

Th. 1.1.3　S を compact support の超函数とする。

$S*: \mathcal{Q}(D) \longrightarrow \mathcal{Q}(D)$ が surj. とする。

この時 $\langle S, e^{iz\zeta} \rangle \underset{\mathrm{Df}}{=} J(\zeta)$ は次の条件 (S') を満たす。

(S'): $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \quad$ s.t. $\quad \forall \xi \in \mathbb{R}$

($|\xi| > n_\varepsilon$) に対しても、$\exists \eta \in \mathbb{C}$ s.t.

i) $|\xi - \eta| < \varepsilon$

ii) $|J(\eta)| \geqq e^{-\varepsilon|\xi|}$

$\Big\}$ の2条件を満たす。

("ideal condition" (S) は i) をもっと弱い形にすべきである。)

証明] 仮定から $\exists \mu \in \mathcal{Q}(D)$ s.t.

(#) $S * \mu = \delta$　(δ: Dirac の δ-函数)

背理法によろう。今 (S') が成立しなかったとすれば、

$$
(A) \left| \begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \ \forall n \quad \exists \xi_n \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \\ |\xi_n| > n \ \text{かつ} \ \forall \eta \ (\text{s.t.} \ |\xi_n - \eta| < \varepsilon) \ \text{に対し} \\ |J(\eta)| \leqq e^{-\varepsilon|\xi_n|} \quad \text{が成立する。} \end{array} \right.
$$

ここで (#) を Fourier 変換して、$J(\zeta)\varphi_+(\zeta) = 1 + F(\zeta)$ $(0 < \mathrm{Im}\,\zeta < \overset{\exists}{\delta})$、$J(\zeta)\varphi_-(\zeta) = F(\zeta)$

$(-\delta < \mathrm{Im}\,\zeta < 0)$ が成立するとしてよい。ここで、定義から φ_+, φ_-, F は次の条件を満足する。

$\forall\alpha, \forall\theta > 0$ に対しても $\exists A_{\theta,\alpha}$, B_θ

i+) $|\varphi_+(\zeta)| \leq A_{\theta,\alpha}\, e^{\theta|\zeta|}$ $(\alpha\delta < \mathrm{Im}\,\zeta < \delta$ において$)$

i−) $|\varphi_-(\zeta)| \leq A_{\theta,\alpha}\, e^{\theta|\zeta|}$ $(-\delta < \mathrm{Im}\,\zeta < -\alpha\delta$ において$)$

ii) $|F(\zeta)| \leq B_\theta e^{\theta|\zeta|}$ $(|\mathrm{Im}\,\zeta| < \theta)$

(もちろん φ_+, φ_-, F は考えている所で正則であることは仮定してある。)

従って今 $\delta' \fallingdotseq \varepsilon/8$ として $\forall\theta > 0$ に対しても

$$|J(\xi_n + i\delta')| = |1 + F(\xi_n + i\delta')| \times$$
$$\times |\varphi_+(\xi_n + i\delta')|^{-1}$$
$$\geqq \exists C_\theta e^{-\theta|\xi_n + i\delta'|}\, |1 + F(\xi_n + i\delta')|$$

一方，背理法の仮定により

$|J(\xi_n + i\delta')| \leq e^{-\varepsilon|\xi_n|}$ 従って

$\theta = \varepsilon/2$ として，

$$\exists C' e^{-\varepsilon/2|\xi_n|} \geqq |1 + F(\xi_n + i\delta')| \cdots\cdots ①$$

同様の議論により，

$$C' e^{-\varepsilon/2|\xi_n|} \geqq |F(\xi_n + i\delta')| \cdots\cdots ②$$

ここで，次の補題（Malgrange と Hörmander による。という程難しい補題ではないが）

Lem. 1.1.4　$f(z)$, $g(z)$, $f(z)/g(z)$ が $|z|<R$ で正則，かつ，そこで，$|f(z)|<A$, $|g(z)|<B$ が満たされているとする。その時，

$$|f(z)/g(z)| \leq A B^{2|z|/(R-|z|)} \times$$
$$\times |g(0)|^{-(R+|z|)/(R-|z|)}$$

が $|z|<R$ で成立する。（$z \in \mathbb{C}^n$）

証明は調和函数に対する Harnack の不等式を用いて容易になされる。たとえば，Hörmander [17] p.154. Lem. 3.1. 参照

この補題は Ehrenpreis の minimum modulus theorem より弱いけれど，局所的に問題を考えうる点で便利である。

この補題を，我々は，$f(z)=1$, $g(z)=F(z)$ として適用する。

前頁①により，$|F(\xi_n+i\delta')| \geq 1-|1+$

$+F(\xi_n+i\delta')| \geqq 1 - C' e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi_n|}$

よって $|\xi_n| \geqq n$ 故 $\exists n_0$ $n \geqq n_0$ ならば

$|F(\xi_n+i\delta')| \geqq 1/2$ 従って補題を中心

$\xi_n+i\delta'$, 半径 $4\delta'$ の円に適用して

$$\left| 1/F(\xi_n-i\delta') \right| \leqq (1/2)^{-3} (\exists B_\theta e^{\theta|\xi_n|+4\delta'\theta})^2$$

が p.86 の $F(\zeta)$ についての条件 ii) により, $\forall\varepsilon$ (>0) に対して成立する。$e^{4\delta'\theta} \leqq 2$ と考えてかまわないから.

$$|F(\xi_n-i\delta')| \geqq 1/(32B_\theta^2)\ e^{-2\theta|\xi_n|}$$

が $\forall\varepsilon>0$ に対しても成立する。しかるに p.86 の ② 式により $C' e^{-\varepsilon/2|\xi_n|} \geqq |F(\xi_n+i\delta')|$

従って.

$$C' e^{-\varepsilon/2|\xi_n|} \geqq 1/(32B_\theta^2) \cdot e^{-2\theta|\xi_n|}$$

ここで $\theta = \varepsilon/8$ と選べば, $\exists M_\theta$

$M_\theta \geqq e^{\varepsilon/4|\xi_n|}$ しかるに $|\xi_n| > n$ だったから $n \longrightarrow \infty$ として明らかにこれは矛盾である。

以上により, 証明は終った。

注意] 今の必要性の証明から明らかなように、

$$S^*: \mathcal{Q}(D)/\mathcal{O}_* \longrightarrow \mathcal{Q}(D)/\mathcal{O}_* \text{ が surj.}$$

としても結論は同じである。一方、次に示すように、仮定(S')の下では、

$$S^*: \mathcal{Q}(D^n) \longrightarrow \mathcal{Q}(D^n) \longrightarrow 0 \text{ 故、}$$

もちろん
$$\mathcal{Q}(D^n)/\mathcal{O}_* \longrightarrow \mathcal{Q}(D^n)/\mathcal{O}_* \longrightarrow 0$$

である。これらの事実は、sheaf C での analysis と関係して重要である。

Th. 1.1.4. 仮定(S')の下で、

$$S^*: \mathcal{Q}(D^n) \longrightarrow \mathcal{Q}(D^n) \longrightarrow 0 \quad (\text{surj.})$$

証明] 今 $f(\zeta) \in \mathcal{O}_*$ としよう。この時 $\{\varphi(\zeta)\} \in H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \tilde{\mathcal{O}}) \cong \mathcal{Q}(D^n)$ (see p.82.) とって、$J(\zeta)$ $\mathcal{O}_*$ 上で定義される

$$J(\zeta) f(\zeta) \longmapsto \int_{-\infty \pm i0}^{\infty \pm i0} \cdots \int \varphi_j(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$$

なる線形汎函数が連続であることを証明すれば、Hahn-Banach の定理により

$J(\xi)\{\theta(\zeta)\} = \{\psi(\zeta)\}$ (in $\mathcal{G}(D^n)$)

このFourier 逆変換をとって

$S * \overset{\exists}{u} = f$ が $\forall f \in \mathcal{G}(D^n)$ に対して成立する。よって先程の汎函数の連続性を証明しよう。

$$\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \cdots \int |f(\zeta)\psi_j(\zeta)| d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

$$\leq \int \cdots \int |f(\zeta)\psi_j(\zeta)| |(1+\zeta^2)^N (1+\zeta^2)^{-N}| d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

$$\leq C_1 \Big[\int \cdots \int \sup_{|\mathrm{Im}\,\zeta - \varepsilon| < \delta} |f(\zeta)^2 \psi_j(\zeta)^2 (1+\zeta^2)^{2N_1}|$$

$$\times |(1+\zeta^2)^{-2N_2}| d\xi_1 \cdots d\xi_n \Big]^{1/2}$$

($N_1 - N_2 \underset{\mathrm{Df.}}{=} N$, $\delta < \varepsilon$: Schwarzの不等式を用いた。)

$$\leq C_2 \sup_{|\mathrm{Im}\,\zeta - \varepsilon| < \delta} |f(\zeta)\psi_j(\zeta)(1+\zeta^2)^{N_1}|$$

ここで、p.86 Lem. 1.1.4. と仮定の(S')により $\delta < \delta' < \varepsilon$ とδ'をとれば、$\forall \varepsilon > 0$ に対しても

$$\sup_{|\mathrm{Im}\,\zeta - \varepsilon| < \delta} |f(\zeta)\psi_j(\zeta)(1+\zeta^2)^{N_1}|$$

$$\leq C_3^{\theta} \sup_{|\mathrm{Im}\,\zeta-\varepsilon|<\delta'} |J(\zeta) f(\zeta) e^{\theta|z|}|$$

(∵ $|\mathrm{Im}\,\zeta-\varepsilon|<\delta'$ において $|\Psi_\zeta(\zeta)|$
$\leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|}$ ($\forall \varepsilon>0$) 故)

従って $\mathcal{P}_*$ の位相の定義から,

$J(\zeta)f(\zeta) \longmapsto \langle [\Psi], f \rangle$ は $J(\zeta)\mathcal{P}_*$ で連続。よって最初に述べたように、Hahn-Banach の定理により定理は証明された。

さて、条件 (S') はたとえば $S \in \mathcal{D}'_{\{0\}}$ 即ち、$S*$ が通常の偏微分方程式であるならば常に満たされる。(Malgrange の定理. Malgrange [33], Hörmander [18] Ch.3. 等参照) 従って通常の定数係数偏微分方程式は $\mathcal{Q}(D'')$ で必らず解をもつ。(cf. Hörmander [16])

従って $\{\mathcal{Q}(\Omega)\}$ が flabby sheaf であることから、特に、$\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し

$P(D_x) : \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{B}(\Omega)$ が必らず

解ける。これは Harvey [15] の定理の一つの別証明である。しかし、更に、通常の偏微分方程式を対象にすると次の定理が成立する。

Th. 1.1.5. $P(D_x)$を偏微分方程式系とし $Q(D_x)$を$P(D_x)$の compatiblity system と仮定する。(用語、その他については、たとえば小松 [28] Ch. 7. Hörmander [20] Ch. 7. §7.6. 等参照。) 今、$f \in \mathcal{Q}(D')^J$, $Q(D_x)f = 0$ とすると、$\exists u \in \mathcal{Q}(D^n)^K$ s.t. $P(D_x)f = u$.

証明] Fourier 変換により Th. 1.1.4. と同じく除法の問題に直せばよい。しかるに、$v(\zeta) \in \mathcal{B}_*$ とするとき、Hörmander-Malgrange の不等式 (たとえば Hörmander [20] p. 188. Prop. 7.6.5. 参照) により $\exists v_1(\zeta) \in \mathcal{B}_*$ かつ

$$\sup_{|\mathrm{Im}\,\zeta|<\delta'} |v_1(\zeta)| \leq \sup_{|\mathrm{Im}\,\zeta|<\delta} |{}^tP(\zeta)\, v_1(\zeta) \times (1+|\zeta|^2)^N|$$

(但し $\delta'<\delta$)　となり、しかも、${}^tP(\zeta)v(\zeta) = {}^tP(\zeta)v_1(\zeta)$ としてよい。従って仮定より　$v_1(\zeta)-v(\zeta) = Q(\zeta)\,{}^{\exists}\varphi(\zeta)$　もちろん
ここで再び、上の Hörmander-Malgrange の不等式により、$\varphi(\zeta)\in\mathcal{S}_*$ としてよい。

従って　${}^tP(\zeta)v(\zeta) \longmapsto \langle [4], v_1\rangle$
は、$Q(\zeta)[4]=0$ なる限り well-defined となり、しかも、v_1の仮定から この写像は連続である。従って Hahn-Banach の定理により、定理が成立することは、Th. 1.1.4. の証明と同じである。

◎追加：尚 条件(S')は空間 $\mathcal{S}$ を少し変えることによりもっと弱めうることが判った。これについては又別の機会に触れることとする。

§2. Ellipticity, Partial Ellipticity

この節では local operator に対してその ellipticity, partial ellipticity etc. が完全に代数的条件で記述されることを示す。更にもっと一般の作用素に対しても、適当な付帯条件の下では、定理が成立することも又、示される。

2.1. Local operator の ellipticity, partial ellipticity について。

Th. 2.1.1. S を原点に support をもつ超函数とする。$J(\zeta) \underset{\text{Df.}}{=} \langle S, e^{-iz\zeta} \rangle$ とし更に、$V = \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid J(\zeta) = 0\}$ と定める。今、$\rho(\xi) \underset{\text{Df.}}{=} \text{dist.}(\xi, V)$ として、$|\xi| \gg 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ なら $\rho(\xi) \geqq c|\xi|$ $(c > 0)$ が成立するとする。この時、$S*$ は elliptic operator である。即ち、$S*u = f$ $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ $\Longrightarrow u \in \mathcal{A}(\Omega)$

(ここで $\operatorname{supp} S = \{0\}$ 故、$S*$ は $\mathcal{B}(\Omega)$ を $\mathcal{B}(\Omega)$

内に移すことに注意：local operatorの名の由縁である。）

注意 1. $\mathcal{D}'$の範囲で作用素を考える時, 合成積方程式迄許しても, 楕円型方程式は余りたくさんないことがEhrenpreisによって知られている。（即ちtranslationと通常の楕円型作用素の合成に限る。Ehrenpreis [5] 参照）これに対して$\mathcal{B}$の範囲では極めて多種多様の作用素が楕円型になることが, この定理により知られる。それは次のようにすればよい。たとえば, $n=1$とする。ここで$\{\alpha_m\}$を $|\mathrm{Im}\,\alpha_m| > c|\mathrm{Re}\,\alpha_m|$ を満たし しかも $\lim m/\alpha_m = 0$ かつ, $\left|\sum_{m=1}^{k} 1/\alpha_m\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ を満たす$\mathbb{C}$内の点列とする。このとき, $J(\zeta) \underset{\mathrm{DF}}{=} \prod(1-\zeta/\alpha_m)$ と定めると Lindelöf [32] の古典的結果により, $\forall\varepsilon\ \exists A_\varepsilon$ $|J(\zeta)| \le A_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|}$ が成立し, 従って analytic functional の表現定理（Pólya [40], Martineau [37], 等）により $\exists S$ s.t. $S\in\mathcal{B}$, $\mathrm{supp}\,S=\{0\}$

かつ $\langle S, e^{-iz\zeta} \rangle = J(\zeta)$ とできるからである。即ち、このような S により、$S*$ を考えれば、これは elliptic operator になっている。

注意2. 通常の偏微分方程式の ellipticity は、定数係数の場合、Harvey [15]，小松 [27]，Bengel [1]，変数係数の場合、佐藤 [43]，Schapira [46] 等により証明された。この内 方法論的に面白いのは、小松 [27] と佐藤 [43] である。小松 [27] の idea は、複素領域の偏微分方程式論に話を持ち込んで、解の自然境界を調べる、というものであり，$n=1$ の場合は、古典的な函数論を援用することにより、その方法を用いて、定理を極めて一般の場合に証明することもできる。（たとえば Valiron [47] は我々に必要な道具の殆んどすべてを与えてくれている。）以下の方法は，小松 [27] の idea の一つの欠点であった、"正則性の証明に、極めて大域的な

存在定理を必要とする" という点を Fourier 変換により逃がれた物である。上に触れた Valiron の結果を用いる証明も中々味わいがあるのだけれど、既に以下の結果により、それは一つの"実験"と見なさるべき物となったと判断し、ここでは~~省略する~~。又、佐藤 [43] の idea は F. John [22] の基本解の構成の方法を代数的に再構成して極めて一般的定理を与える見事な物である。ここでもその idea を借用することにより、次の Th. 2.1.5. において partial ellipticity の理論を展開する。

Th. 2.1.1. の証明] $S*$ の parametrix $P(x)$ を構成すれば、十分。即ち $S*P=\delta-W$ W は実解析函数。(実は以下で判るように、entire でとれる。) かつ sing supp $P=\{0\}$ が証明できれば十分。

簡単の為 $n=1$ としよう。証明は、最後に注意するように $n\geq 2$ でも全く同様である。

今 $(\mathcal{P}_*)'$ の元 $Q(\zeta)$ を次のように定める。

$$\langle Q(\zeta), f(\zeta)\rangle = \int_{|\xi|\geq K} f(\zeta)\frac{1}{J(\xi)}\,d\xi.$$

但し、ここで、Kは十分に大きくとることとし、$|\mathrm{Im}\,\zeta| < C(\mathrm{Re}\,\zeta - K)$ or $|\mathrm{Im}\,\zeta| < -C(\mathrm{Re}\,\zeta - K)$ で $J(\zeta) \neq 0$ となるようにしておく。($J(\zeta)$についての仮定) この時、後に示す補題 Lem 2.1.2. により $J(\zeta)$ は $|\mathrm{Im}\,\zeta| < C'(\mathrm{Re}\,\zeta - K)$ or $|\mathrm{Im}\,\zeta| < -C'(\mathrm{Re}\,\zeta - K)$ $(C' < C)$ において、$|J(\zeta)| \geqq {}^\exists C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\zeta|}$ $(\forall\varepsilon > 0)$ を満たすとしてよい。従って $Q(\zeta)$ は well-defined である。積分を $\xi > K$ の部分と $\xi < -K$ の部分に分けることにより、$Q(\zeta) = Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta)$. $\mathrm{supp}\, Q_1 \subset \{\xi \geqq K\}$, $\mathrm{supp}\, Q_2 \subset \{\xi \leqq -K\}$ と仮定してよい。

従って、$P(x) \underset{\text{def}}{=} \mathcal{F}Q(\zeta)$ とすれば、

$$P(x) = \left\{ \int_{\xi > K} e^{ix\zeta}\Big/J(\zeta)\,d\zeta,\ \int_{\xi < -K} e^{ix\zeta}\Big/J(\zeta)\,d\zeta \right\}$$

$\in H^1_D(D \times i\mathbb{R}, \tilde{\mathcal{O}})$ なる Fourier 超函数

が得られる。この時 $S*P=\delta-W$

(W; 実解析函数)となっている。実際,

$f(x)\in\mathcal{D}_*$ として

$$\langle S*P,\ f\rangle \underset{\text{by def.}}{=} \langle P,\ \check{S}*f\rangle$$

$$\underset{\text{by def.}}{=} \langle \overline{\mathcal{F}}P,\ \mathcal{F}(\check{S}*f)\rangle \underset{\text{by def. of } P}{=} \langle Q,\ \mathcal{F}\check{S}\,\mathcal{F}f\rangle$$

$$\underset{\text{by def. of } Q}{=} \int_{|\xi|>K} \frac{1}{J(\xi)}\cdot\langle S,\ e^{-iz\xi}\rangle\,\mathcal{F}f\ d\xi$$

$$\underset{\text{by def. of } J(\xi)}{=} \int_{|\xi|>K} \mathcal{F}f\ d\xi$$

$$= \int \mathcal{F}f\,d\xi - \int_{|\xi|\le K} \mathcal{F}f\,d\xi$$

$$= \langle\delta,\ f\rangle - \langle W,\ f\rangle$$ 但し $W(x)$

$$= \int_{|\xi|\le K} e^{ix\xi}\,d\xi$$ 従って $S*P=\delta-W$ が

$\mathcal{D}$ 上で成立し, これを $\mathcal{R}$ に制限すれば

W は明らかに real analytic になっている。

従って, 我々は sing supp $S=\{0\}$ を示

せばよい。 たとえば、$\displaystyle\int_{\xi>K} e^{i z\zeta}/J(\zeta)\,d\zeta$ について

(Im $z>0$ で定義されたこの正則函数が) $x \neq 0$ なる限り実軸を越えて解析接続されることを言えばよい。実際、それは積分路の変更によって次のようになされる。

今、$x>\varepsilon$, $y>\varepsilon$ ($x \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathrm{Re}\, z$, $y \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathrm{Im}\, z$) として積分路を $\{\eta = k(\xi - K)\}$ に変更する。($0<k<c/2$, $\eta = \mathrm{Im}\,\zeta$, $\xi = \mathrm{Re}\,\zeta$) 実際、その変更は、$x>\varepsilon$, $y>\varepsilon$ としてあるから、$|J(\zeta)| \geqq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\zeta|}$ ($\forall\varepsilon$) により、Cauchy の積分定理により可能である。所が、$\{\eta = k(\xi-K)\}$ 上での上の積分は、

(#) $y > -\frac{k}{2}x + t$ ($t = (1+k/2)\varepsilon$) 迄解析接続される

ことを示せば、ε は任意、k は fixed constant 故 $\int e^{iz\zeta}/J(\zeta)\,d\zeta$ は、$x>0$ では real analytic, 同様に $x<0$ での解析性を調べるには、積分路を $\{\eta = -k(\xi - K)\}$ に変更してやればよい。とこ

るが $J(\zeta)$ についての条件から. $y > -\frac{k}{2}x + t$

$(t = (1 + k/2)\varepsilon)$ ならば.

$$\int_{\eta = k(\xi - K),\ \xi > K} e^{i x \zeta} / J(\zeta)\, d\zeta$$ は絶対収束するから

明らかに. (#) は成立する。

次に $n \geqq 2$ 以上の時も. 上の論法はそのままの形で成立することは次のようにすれば判る。$n = 1$ の時の $Q(\zeta)$ と同じく.

$$\langle Q(\zeta), f(\zeta) \rangle = \int_{|\xi| \geqq K} \cdots \int 1 / J(\zeta) \cdot f(\zeta)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

と定め, これをたとえば. ξ-空間の各 j 象限毎に積分区間を分けて. それらを $(Q_1, \cdots, Q_{2^n})$ として. $\Phi(x) = \mathcal{F}Q(\zeta)$ を

$$\left\{ \int_{|\xi| > K,\ 第 j 象限} \cdots \int e^{i x \zeta} / J(\zeta)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n \right\}$$ と

正則函数で表現し, これの正則性を調べればよい。(積分路を $\eta = \varepsilon\xi$. $|\xi| > K$ に変更すれば. その積分と上の積分の差は. ある compact set Γ 上での $e^{i x \zeta} / J(\zeta)$ の積分故もちろん z につい

て正則 (entire) 故) $\displaystyle\int\cdots\int_{\substack{\eta=\varepsilon\xi,\ \xi\in\text{第}j\text{象限}\\|\xi|>K}} e^{i\,z\,\zeta}\big/J(\zeta)\,d\zeta_1\cdots\cdots d\zeta_n)$ の $x_1>0,\cdots,x_n>0$ における正則性は $n=1$ のときと同様。従って $\mathcal{P}(x)$ は..

$x_1\neq 0$ かつ ⋯ かつ $x_n\neq 0$ において正則，しかるに $\mathcal{P}(x)$ は．$H^n_{D^n}(D^n\times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ の元として、座標系の取り方によらないから $x\neq 0$ で $\mathcal{P}(x)$ は実解析的となる。

又、$S*P=\delta-W$　W；実解析的、も $n=1$ の時と全く同じである。

注意．$S*P=\delta-W$ の証明で．上では Fourier 超函数の理論を用いたが．これは直接にも証明できる。

次に．上で残した $|J(\zeta)|$ の下からの評価をしておこう。

Lem 2.1.2．Γ を $\mathbb{C}^n$ 内の open cone で（簡単の為）原点を頂点にする物としよう。（ここで Γ が $\mathbb{C}^n$ 内の原点を頂点にする cone

であるとは，もちろん $t \in \mathbb{R}^+$，$\zeta \in \Gamma$ $\Rightarrow t\zeta \in \Gamma$ のことである。）今，$J(\zeta)$ が，Γ 内では決して零にならず，しかも，$\mathbb{C}^n$ 全体で order 1, minimum type の entire function であるとする，即ち，$\forall \varepsilon$ $|J(\zeta)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|}$ が成立するとする。又，本質的なことではないから，$J(0)=1$ と normalize してあるとする。この時 $\forall \Gamma' \Subset \Gamma$ においても，$|J(\zeta)|$ は，次のような下からの評価を満足する。

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists C_\varepsilon$

$$|J(\zeta)| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\zeta|} \quad (\forall \zeta \in \Gamma')$$

◎ この事実が local operator の時には成立する（一般の convolution operator では成立しない。）ことを，最初気付かず，local operator と convolution operator の区別をせずにやっていて，佐藤先生に御叱りを受けた。佐藤先生の御指摘に深く感謝致します。

Lem. 2.1.2. の証明に先立ち、一変数函数論でよく知られた次の補題をまず述べておこう。いずれもよく知られているが、たとえば、証明については Levin [31] p.19. Th. 9. p.21. Th. 11 を各々参照されたい。

Lem. 2.1.3. $f(z)$ が $|z| \leq R$ で正則かつそこで $f(z) \neq 0$ と仮定する。この時 $r < R$ として $\forall z$ s.t. $|z| < r$ に対して

(1) $$\log|f(z)| \geq -\frac{2r}{R-r}\log\sup_{|z|=R}|f(z)| + \frac{R+r}{R-r}\log|f(0)|$$ が成立する。

Lem. 2.1.4. $f(z)$ が $|z| < 2eR$ で正則かつ $f(0) = 1$ とする。この時 $\forall \eta$ ($0 < \eta < 3e/2$; $e = 2.7\cdots\cdots$) に対しても、$|z| \leq R$ 内においてその半径の和が高々 $4\eta R$ であるような円達の内部を除けば、任意の z に対して

(2) $$\log|f(z)| > -H(\eta)\log\sup_{|z|=2eR}|f(z)|$$

が成立する。但し．$H(\eta) = 2+\log 3e/2\eta$

Lem. 2.1.2. の証明〕　今 $\{\zeta\in\mathbb{C}^n \mid |\zeta|=1\}$ を S とする。　$\zeta\in S\cap\Gamma$ として．$\{t\zeta \mid |\mathrm{Im}\,t|<c\,\mathrm{Re}\,t\}\subset\Gamma$ $(c\ll 1)$ となるから．$C_U=\bigcup_{\zeta\in U}\{t\zeta \mid |\mathrm{Im}\,t|<c\,\mathrm{Re}\,t\}$（但し U は $\Gamma\cap S$ の open set）と定めれば，C_U はopen cone になり．しかも．$U\Subset\Gamma\cap S$ なら．c を十分小さくとれば $C_U\Subset\Gamma$ となる。従って $\Gamma'\Subset\Gamma$ ならば，Γ' はこのような物の有限個で cover できるから，$J(t\zeta_1,\cdots,t\zeta_n)$ を $f_\zeta(t)$ が，$(\zeta_1,\cdots\zeta_n)$ によらず，ただ，c のみによって影響を受ける constant により．下からの評価を $\{t\in\mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\,t|<\frac{c}{2}\mathrm{Re}\,t\}$ で持てば，証明は終る。その証明をしよう。　任意に $\varepsilon>0$ を fix する。この時 $J(\zeta)$ についての仮定から $|J(\zeta)|\le{}^{\exists}A_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|}$ が成立する。（A_ε は ζ にもちろんよらない。）従って特に $(\zeta_1^0,\cdots\zeta_n^0)\in\Gamma\cap S$ に fix して $|f_{\zeta^0}(t)|\le A_\varepsilon e^{\varepsilon|t|}$

が $t\in\mathbb{C}$ に対して成立する。従って Lem. 2.1.4. により, $|t|=R$, $|\mathrm{Im}\, t|<\frac{c}{2}\mathrm{Re}\, t$ なる任意の t に対し $\exists t_0$ $|t-t_0|<8\eta R$ (η は後に fix する。) s.t. $|f_{\zeta^0}(t^0)| \geqq -H(\eta)\log(A_\varepsilon e^{2\varepsilon e R})$ が成立する。

ここで, $|\tau-t^0|<c/4\,(R-8\eta R)$ で, $f_{\zeta^0}(t)\neq 0$ と仮定してもよいから, ここで Lem. 2.1.3. を用いて $|\tau-t^0|<\frac{c}{8}(1-8\eta)R$ なる限り

$$\log|f_{\zeta^0}(\tau)| \geqq -2\log \sup_{|\tau-t^0|=\frac{c}{4}(1-8\eta)R} |f(z)|$$

$$+\,3\log|f_{\zeta^0}(t^0)|$$

今ここで $(1+\frac{c}{8})(1-\frac{\eta}{8})R>R$ となるように η を十分小さくとれば, (たとえば $c<1/2$ として $\eta=c/4$ で十分) $|t-t^0|<c/8\,(1-8\eta)R$ となり, 又 $\{\tau \mid |\tau-t_0|=\frac{c}{4}(1-8\eta)R\}\subset\{\tau \mid |\tau| <2eR\}$ としてよいから,

上の不等式をつなぎあわせると,

$$\log|f_{\zeta^0}(t)| \geqq -2\log(A_\varepsilon e^{2\varepsilon e R})$$
$$-3H(\eta)\log(A_\varepsilon e^{2\varepsilon e R})$$
$$= -(2+3H(\eta))\log(A_\varepsilon e^{2\varepsilon e R})$$

ここで η は c のみによって定まり、A_ε は ζ^0 によらぬから、結局、考えている領域では c のみによる constant C_ε により、$|f_\zeta(t)| \geqq C_\varepsilon e^{-2e(2+3H(\eta))(\varepsilon|t|)}$ が成立する。ε は任意であったから、結局、c を固定する限り、
$|f_\zeta(t)| \geqq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|t|}$ が成立する。
従って $\forall\Gamma' \Subset \Gamma$ において求める評価が成立する。

次に、上の定理(Th. 2.1.1.)を更に精密化しよう。即ち、$S*u=f$　$f\in\mathcal{A}(\Omega)$, $u\in\mathcal{B}(\Omega)$ とする時、$S*$ が elliptic でなくても、かなり強い制約が u につきうることがある。その制約を表現するには、佐藤[43]において展開された sheaf $\mathcal{C}$ の理論が有効であ

る。 実際 定理は次のように定式化される。

Th. 2. 1. 5. (Directional Regularity)

$$(A)\begin{cases} \exists c,\ c'>0 \quad \text{s.t.}\ \Big(|\zeta_1|>c'(1+|\zeta|) \text{ かつ} \\ \mathrm{Re}\,\zeta_1>0\Big) \underset{\text{ならば}}{\Longrightarrow} \big(|\mathrm{Im}\,\zeta|<c''(1+|\zeta_1|) \\ \text{なる領域に } J(\zeta) \text{ の零点は存在しない}\big) \end{cases}$$

という条件が成立っているとする。この時
$S*u=f\in\mathcal{A}(\Omega)$ とすれば、 $[u]\in\mathcal{B}/\mathcal{A}$
を $S^{n-1}\times\Omega$ ($S^{n-1}\times\Omega$ は cosphere bundle)
上の sheaf $\mathcal{C}$ の元 $\beta(u)$ の direct image
として表現する時、 $\mathrm{supp}\,\beta(u)\cap\{(1,0\cdots0)\}$
$\times\Omega=\phi$ である。

注意 上の条件(A)は、$\mathbb{C}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$ の無限遠方
に S^{2n-1}_∞ を付加して D^{2n} をつくるとき、
$\overline{\{\zeta \mid J(\zeta)=0\}}^a_{D^{2n}}$ が S^{2n-1}_∞ の $\{(1,0\cdots0)\}$
という点と交わらない、と表現できる。(この注
意は佐藤先生から頂いた。) 従って $J(\zeta)$
が多項式 $P(\zeta)$ のとき、上の条件(A)は
$P_m(1,0\cdots0)\neq0$ と同値である。(P_m は P の
principal part) ここで、local operator

$\mathcal{S}^*$に対しては、一般には、$\mathrm{Re}\,\zeta_1$ の正負2つの方向を区別して考えねばならぬことに注意。これは、sheaf $\mathcal{C}$ の定義に、projective bundle でなく cosphere bundle の現われざるを得なかった事実と対応する。（有限位数の作用素の場合に話を限っては、その事情は理解しにくかった訳である。）

証明］ 証明は Th. 2.1.1. と同様である。実際、$\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi'| < c|\xi_1|,\ \xi_1 > K\} = \Delta$ とすると仮定 (A) により、c, K を適当にとれば、Δ の D^{2n} での近傍において $|J(\zeta)| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\zeta|}$ が成立することは、Lem. 2.1.2. により判るから、

$$\langle Q(\zeta), f(\zeta)\rangle = \int\cdots\int_\Delta f(\zeta)\cdot\frac{1}{J(\zeta)}\,d\xi_1\cdots d\xi_n$$

$(f(\zeta)\in \mathcal{P}_*)$ により $(\mathcal{P}_*)'$ の元 $Q(\zeta)$ を定め、$P(x) = \mathfrak{F}Q(\zeta)$ と定めれば、$\mathrm{supp}\,\beta(P) \subset (\partial I)\times\mathbb{R}^n \cup I\times\{0\}$ (I は $(1,0\cdots0)$ の S^{n-1} での近傍）であることは、

Th. 2.1.1. と全く同じである。ここで、Th. 2.1.1. と同様にして、$S*P=\delta-W$ を得るが、ここで W は formal には、

$$\underset{\xi\notin\Delta}{\int\cdots\int} e^{ix\xi}\,d\xi_1\cdots d\xi_n$$

と書かれる Fourier 超函数となる。そこで $\complement\Delta$ を有限個の convex cone と compact set の和集合で cover して、その各々の集合の特性函数（i.e. その上で $\equiv 1$、他で $\equiv 0$）の Fourier 変換を考えれば、これは Ch. 1. §5 の結果により、$(1,0,\cdots,0)$ を含まない方向からの正則函数の極限値として表現できる。従ってこれを層 C の言葉に言い直せば、定理が直ちに得られる。

Cor. 1. $S*u=0$ かつ $J(S)$ が Th 2.1.5. の ±(A) の条件を満せば、u は x_1 について real analytic に depend する。

証明］real analytic dependence の定義（佐藤 [42] Ch.3. §8 参照、尚、

real analytic parameter をもつ超函数の理論については柏原 [25] が明快である。) により明らか。

更に我々は Th. 2.1.6. の逆が成立することを示そう。

Th. 2.1.7. $J(\zeta)$ は前 Th. の条件 (A) を満たさないとする。このとき $S*u=0$ の解で、しかも $\mathrm{supp}\,\beta(u)\cap\{(1,0\cdots0)\}\times\Omega\neq\phi$ なる物が存在する。

◎ この定理が $n\geq 2$ 迄こめて $n=1$ の時と同じ方法で証明できることは、小松先生から御指摘を受けた。小松先生に深く感謝致します。

証明] (A) が成立たないと仮定すれば、
$\varepsilon_m\downarrow 0$ として次のような $\{\zeta^m\}$ を選ぶことができる。(0) $J(\zeta^m)=0$

i) $|\zeta^m|>m^2$　ii) $\left|\mathrm{Im}\,\zeta_1^m/|\zeta^m|\right|<\varepsilon_m$

iii) $\left|\mathrm{Re}\,\zeta_j^m/|\zeta^m|\right|<\varepsilon_m$　$(j=2,\cdots n)$

iv) $\mathrm{Re}\,\zeta_1^m / |\zeta^m| > \delta \qquad (\delta > 0)$

v) $|\zeta_1^m| - |\zeta_1^{m-1}| > 0$,

ここで $\sum_{m=1}^{\infty} \exp(-i\langle \zeta^m, z\rangle) \overset{\text{def}}{=} F(z)$

と定めると、定義により $\{|\mathrm{Re}\,z| < M\}$

$\times \sqrt{-1}\,\{\mathrm{Im}\,z_1 > 0\}$ で $F(z)$ は広義一様に絶対収束する。もしこれが ~~これが~~ 実軸($i.e\ \mathbb{R}^n$)をこえて接続されたとしよう。

この時 $F(z) = \sum a_m \exp(-i\zeta_1^m z_1)$

と書いてみると、$\{\zeta^m\}$ についての仮定により、$F(z)$ は、$z_2 \cdots z_n$ を fix して、z_1 の函数と見た時、ある1変数の local operator S_1 に対し $S_1 * F = 0$ を F が正則なる限り満足する。しかるに、S_1 が local operator であれば、$\sum a_m \exp(-i\zeta_1^m z_1)$ の絶対収束域と、$F(z_1, z_2^\circ, \cdots, z_n^\circ)$ の正則域は一致するから(たとえば Valiron [47] p.46. XX 参照)$\sum |a_m| \exp(-\eta_1^m x_1) < \infty$ ($\eta_j^m = \mathrm{Im}\,\zeta_j^m$, $\xi_j^m = \mathrm{Re}\,\zeta_j^m$ とする)が成立せねばならぬ。しかるに

$M \subset \{1, 2, 3, \cdots\}$, $\#(M) = \infty$ として、

$m\in M$ ならば $\eta_j^m,\ \xi_j^m>0$ として一般性を失わない。ここで $x_j>0,\ y_k>0$ (たこえ) として $\sum_{m\in M}|a_m|\exp(-\xi_1^m x_1)=\infty$ は明らか。従って、$F(z)$ は R^n を含んだ open set で正則とはならない。

このような $F(z)$ の"境界値"として定まる $u\in\mathcal{B}(\Omega)$ を考えれば、定義より $S*u=0$. かつ $\operatorname{supp}\beta(u)\cap\{(1,0\cdots;0)\}\times\Omega\neq\phi$ は明らか。

注意. Th. 2.1.1. の逆定理は次のようにして極めて容易に証明できる。$\underset{\approx}{\mathcal{O}}$ という sheaf を考えるべきことは、佐藤先生に御指摘を受けた。佐藤先生に深く感謝致します。

Th. 2.1.7' $S*$ が elliptic でないならば、$S*$ は決して parametrix P を持たない。

証明] p. 107. で導入した D^{2n} 上に sheaf $\underset{\approx}{\mathcal{O}}$ を次のように定義する。

$$\underset{\approx}{\mathcal{O}}_z=\begin{cases}\mathcal{O}_z & z\in\mathbb{C}^n\\ \varinjlim_{U_m\ni z}\underset{\approx}{\mathcal{O}}^m(U_m) & z\in D^{2n}-\mathbb{C}^n\end{cases}$$

但し $\underset{\approx}{\mathcal{O}}^m(U_m) = \{ f \in \mathcal{O}(U_m \cap \mathbb{C}^n) \mid \sup_{U_m \cap \mathbb{C}^n} |f(z)| e^{-\frac{1}{m}|z|} < \infty \}$

このとき $\mathcal{D}^{2n} \supset \mathcal{D}^n \underset{\text{by def}}{=} \mathbb{R}^n \cup S_\infty^{n-1}$ 上で、次の exact sequence を考える。

$$0 \longrightarrow \underset{\approx}{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}/\underset{\approx}{\mathcal{O}} \longrightarrow 0$$

ここで $H^1(\mathcal{D}^n, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) = 0$ の証明 (p.51.) と全く同様にして $H^1(\mathcal{D}^n, \underset{\approx}{\mathcal{O}}) = 0$ が成立する。従って $0 \to \underset{\approx}{\mathcal{O}}(\mathcal{D}^n) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{D}^n) \longrightarrow (\mathcal{Q}/\underset{\approx}{\mathcal{O}})(\mathcal{D}^n) \longrightarrow 0$

一方、$\mathbb{R}^n$ 上で $\mathcal{Q}/\underset{\approx}{\mathcal{O}} \cong \mathcal{B}/\mathcal{a}$ よって もし $S * [P] = [\delta]$ が $\mathbb{R}^n$ 上で成立するなら ($[P]$, $[\delta]$ は各々 $P, \delta \in \mathcal{B}$ の $\mathcal{B}/\mathcal{a}$ での equivalence class) 仮定から P が parametrix であるなら $\operatorname{supp}[P] = \{0\}$ 従って $\exists\, \tilde{P} \in \mathcal{Q}(\mathcal{D}^n)$ s.t. $S * [\tilde{P}] = [\delta]$ on $\mathcal{D}^n$.

故に $S * \tilde{P} = \delta + \varphi \qquad \varphi \in \underset{\approx}{\mathcal{O}}(\mathcal{D}^n)$

$\underset{\approx}{\mathcal{O}}(\mathcal{D}^n)$ も明らかに Fourier 変換に対し

て安定だから，上式を Fourier 変換して

$J(\zeta)\,\mathcal{F}\tilde{P} = 1 + \mathcal{F}\varphi$　ここで $\mathrm{supp}[\tilde{P}] = \{0\}$ (in $\mathcal{D}^n$) 故　$\mathcal{F}\tilde{P}$ は，$\mathcal{D}^n$ の $\mathcal{D}^{2n}$ における近傍で正則。（後にこの周辺については再び詳しく触れる。p.　ff. 参照）

しかるに，そこで $\mathcal{F}\varphi(\zeta) \longrightarrow 0$　よってもし $S*$ が elliptic でないなら，ある方向に対して，$J(\zeta)\,\mathcal{F}\tilde{P} \longrightarrow 0$，一方右辺 $\longrightarrow 1$.

となり，明らかに矛盾

さて，Th.2.1.5. の意味する所に戻ろう。

p.107. での注意を用いて，

$$N(J) \underset{\mathrm{Df}}{=} \{\zeta \mid J(\zeta) = 0\}^{a}_{D^{2n}} \cap S^{n-1}_{\infty}$$

と定めよう。（S^{n-1}_{∞} は $\mathbb{R}^n\ (\subset \mathbb{C}^n)$ に付け加えた無限遠球面）この時，Th. 2.1.7. を合せて，

Th. 2.1.7.　$S*$ を local operator とし，$\pi_\xi : S^{n-1} \times \Omega \longrightarrow S^{n-1}$ として，S^{n-1} を S^{n-1}_{∞} と identify すれば，

$$\bigcup_{S*u=0} \mathrm{supp}\,\beta(u) = N(J)$$ が成立する。

従って．partial ellipticity，conditional ellipticity を Gårding-Malgrange [11] にならって．次のように定義すれば．Th.2.1. Th.2.1. は殆んど自明な系として得られる。

Def. 2.1.8. $S^* u = 0$ の解が．常に $(x_1, \cdots, x_m)$ について weakly complex holomorphic に depend する
$\Longleftrightarrow$ S^* は $(x_1, \cdots, x_m)$ に関して
partially elliptic.

Def. 2.1.9. [$S^* u = 0$ かつ u は $(x_{m+1}, \cdots, x_n)$ について weakly complex holomorphic に depend する
$\Rightarrow$ u は real analytic]
$\underset{\mathrm{Df.}}{\Longleftrightarrow}$ S^* は $(x_1, \cdots, x_m)$ について conditionally elliptic.

ここで u が $(x_1 \cdots x_m)$ に weakly に complex holomorphic に depend するとは
$\mathrm{supp}\,\beta(u) \subset \{\xi_1 = \cdots = \xi_m = 0\}$ のこととする
(佐藤 [43] 参照)

注意： Gårding-Malgrange の意味で．partially elliptic な偏微分作用素は，

Def. 2.1.8の意味でpartially ellipticである。証明は、Gårding-Malgrangeのa priori評価(Gårding-Malgrange [11] p. 18)と小松[27]の方法を組み合わせるだけで特に新しい物ではないからここでは省略する。又、Gårding-Malgrangeの意味でconditonally ellipticならば、下のTh. 2.1.11.の判定条件により、明らかにDef. 2.1.9.の意味でconditionally ellipticになる。

Th. 2.1.10. S^*が$(x_1, \cdots x_m)$について partially elliptic

$$\Longleftrightarrow \quad N(J) \subset \{\xi_1 = \cdots = \xi_m = 0\}$$

証明は、weakly complex holomorphicにdependするということのsheaf $\mathcal{C}$を用いての言い換えに過ぎない。(佐藤[43]参照)(もちろんTh. 2.1.5.とTh. 2.1.7を用いて。)

次の定理も同様である。

Th. 2.1.11. S^* が $(x_1, \cdots, x_m)$ について conditionally elliptic

$$\Longleftrightarrow \{\xi_{m+1} = \cdots = \xi_n = 0\} \cap N(J) = \phi$$

更に、Th. 2.1.5. は "偏微分方程式(の解)が type p" ということの判定条件をも与える。

まず、

Def. 2.1.12 $u(x) \in \mathcal{B}(\Omega)$ が type p
$\Longleftrightarrow$ 適当な座標系をとることにより, local には $u(x) \in H^{p-1}_{\Omega'}(V, \mathfrak{A})$.
($\Omega' \subset \Omega$ かつ V は Ω' の $\mathbb{C}^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p+1}$ での近傍, p は Ω' によらないとする。
$\mathfrak{A}$ は一部分の変数に関しては real analytic, の意)

e.g. $u(x) \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow u \in H^0(\Omega, \mathcal{A})$, 即ち u は type 1.

Def. 2.1.13. $S^* u = 0$ の任意の解が高々 type p $\Longleftrightarrow$ S^* は type p

eg. wave operatorは、次元によらず、
$\mathcal{S}'$に属する解については type 2
(Jost-Lehman-Dyson の公式，たとえば，Pham et al [39] による。)
$\mathcal{D}'$-solutionに対してもそうであることは，
Martineau-Zerner により得られたとのこと。(Martineau 教授による。)

Th. 2.1.14. 上の事実は超函数解に対しても正しい。

証明は，Th. 2.1.5. より明らか。

注意. p.114. 以降のことはすべて，変数係数の場合にも同様の定式化ができ，通常の偏微分方程式の場合には，佐藤の基本定理（佐藤 [43] 参照）を用いれば，上と全く同じ議論が可能である。

2.2. Convolution operator に対する ellipticity

この subsection では、supp S compact として、$S*$ に対する ellipticity を考察する。更に一般の作用素に対しても理論を展開できるけれど、それは、§3で、Propagation of regularity を論じる際に合せて論じることにする。(p. 参照) この節は、本質的には 2.1. と同じ内容である。(但し Th. 2.2.2.(存在定理) は別)

Th. 2.2.1. $S \in \mathcal{B}_*$ (即ち compact support の超函数とする。この時 $\langle S, e^{-iz\zeta}\rangle \equiv J(\zeta)$ が下の条件 $(\mathcal{S})$ を満たすと仮定する。

この時 Th. 2.1.1. と同様の仮定をする。

即ち p. 114. で導入した記号 $N(J)$ を用いれば、$N(J)=\phi$ と仮定する。この時、

$u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $S*u = f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ ならば

$u \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ である。

但し 条件 $(\mathcal{S})$ とは、

$(\mathcal{S})$ $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N_\varepsilon$ s.t. $|\xi| > N_\varepsilon$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

ならば $\exists \eta \in \mathbb{C}^n$ s.t. i) $|\xi - \eta| < \varepsilon|\xi|$ かつ

ii) $|J(\eta)| \geqq e^{-\varepsilon|\xi|}$ を満たす。

注意 i) 条件(S)の下では、 $S*u=f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ は常に解けることを次に Th. 2.2.2. により証明する。従ってこの定理は空虚でない。
又、条件(S)は、現在検討中の "modified Fourier hyperfunction" の理論から必然的に現われてきたものであるが、私の知る限り、今迄 explicit にこの条件に触れた文献はないように思われる。多分超函数論においては、最も本質的な条件として活用されるべき物と確信している。

ii) Th. 2.1.5. に相当する事実も同様に、条件(S)の下で得ることができる。その時は、以下の証明と Th. 2.1.5. の証明の仕方から、条件(S)を更に弱めて、"$|\xi|<c|\xi_1|$ かつ $|\xi|>N_\varepsilon$ ならば、" として十分。

iii) 定理をある程度 "local" な形に formulate

することも考えうるが、non-local な convolution operator に対しては上の定理の形（即ち $\mathbb{R}^n$ 全体で考察する）のが最も自然であろう。もっとも、parametrix の存在から regularity を示す所では結局、"pseudo-local" にやることになるけれど。

Th. 2.2.1. の証明] Th. 2.1.1. の証明と同様に、$S * P = \delta + W$, W: real analytic, sing. supp P compact　P を構成すればよい。それには、$\mathbb{C}^n - \underbrace{K}_{(K は \mathbb{R}^n の compact set)}$ の $\mathcal{D}^{2n}$ における或る近傍において、$|J(\zeta)| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\zeta| - A|\mathrm{Im}\,\zeta|}$ ($\forall \varepsilon > 0$, A: fixed) という評価ができれば十分。我々は、それを、条件 (S) の下では、Ehrenpreis [4] の minimum modulus theorem を用いて証明することもできるが、より初等的な、Malgrange - Hörmander の不等式（p. 86. Lem 1.1.4. 参照）を用いることにする。

今、$J(\zeta) \neq 0$ in $\{ \zeta \mid |\mathrm{Re}\,\zeta| > |\mathrm{Im}\,\zeta|, |\mathrm{Re}\,\zeta| > K$

としよう。 $c|\mathrm{Re}\,\zeta| > |\mathrm{Im}\,\zeta|$, $|\mathrm{Re}\,\zeta| > K$ で
$|J(\zeta)|$ を下から評価できれば十分。

ところが、条件 S により $\varepsilon > 0$ を fix して
$|\xi| > N_\varepsilon$ として $(\xi = \mathrm{Re}\,\zeta)$ $\exists \zeta'$ s.t.
$|\zeta' - \xi| < \varepsilon|\xi|$, $|J(\zeta')| \geqq e^{-\varepsilon|\xi|}$ となる。
よって ζ' を中心として、半径 $2(\varepsilon|\xi| + |\eta|)$
$(\eta = \mathrm{Im}\,\zeta)$ の球 C を描こう。この球に対して Lem. 1.1.4 (p.86.) を適用すると、

$$\left|\frac{1}{J(\zeta)}\right| \leqq \left[A_\varepsilon e^{\varepsilon(2\varepsilon|\xi| + |\eta| + |\zeta'|) + \alpha(\varepsilon|\xi| + 2(\varepsilon|\xi| + |\eta|))}\right]^2 \times \left(e^{-\varepsilon|\xi|}\right)^3$$

$\left(\because\ |J(\zeta)| \leqq A_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + \overset{\exists}{\alpha}|\mathrm{Im}\,\zeta|} \quad (\forall\zeta)\right.$

又、ζ は ζ' を中心、半径 $(\varepsilon|\xi| + |\eta|)$ の
球に含まれることに注意)

$$\therefore \left|\frac{1}{J(\zeta)}\right| \leqq A_\varepsilon^2 e^{(6\varepsilon^2 + 7\varepsilon + 6\alpha\varepsilon)|\zeta| + 4\alpha|\eta|}$$

従って $\alpha < \infty$ 故、$\forall\theta > 0$, $6\varepsilon^2 + 7\varepsilon + 6\alpha\varepsilon < \theta$
となるように十分小さく ε をとることにすれば

$$\left|\frac{1}{J(\zeta)}\right| \leqq B_\theta e^{\theta|\zeta| + 4\alpha|\mathrm{Im}\,\zeta|}.$$

Q.E.D.

注意　この定理の逆、即ち $N(J)=\phi$ のみならず、条件 (S) も ellipticity の必要条件であることは、Th. 2.1.7′ (p. 112.) と同様にして証明できる。(もっと強い形の評価が必要であること迄実は判ってしまう。)

Th. 2.2.2.　$S*$ が条件 (S) を満たすとする。この時、$S*\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ である。

証明]　$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ の定義により $\mathbb{R}^n$ の複素近傍として $\mathbb{C}^n$ をとる事として、$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\{y_1>0, \cdots, y_n>0\})$ etc. という柱状領域において、$S*$ が surjective に operate すれば十分。しかるに、一般に、$\Omega\ (\subset \mathbb{C}^n)$ を open convex set として、

$$\varinjlim_{\substack{K\uparrow\Omega \\ K \text{ convex, compact}}} \mathcal{O}(K)=\mathcal{O}(\Omega)$$

は、容易に判るように位相迄こめて成立し、しかも、$\mathcal{O}(K)'$ は Fourier-Borel 変換により (K が convex compact なら) 正則函数の増大度によって規定できる (Martineau

[37]他）から $[\mathcal{O}(\Omega)]'$ の元の Fourier-Borel 変換により．$\check{S}*: [\mathcal{O}(\Omega)]' \to [\mathcal{O}(\Omega)]'$ が closed range であることをいえばよい。

それには、従って．（簡単の為 $n=2$ として）

$$\begin{cases} \text{i)}\ F(\zeta)/J(\zeta) \text{ が entire} \\ \text{ii)}\ |F(\zeta)| \leq \begin{cases} A e^{K|\eta| - \delta\xi_1 - \delta\xi_2} & (\xi_1 \geq 0\ \ \xi_2 \geq 0) \\ A e^{K|\eta| - K\xi_1 - \delta\xi_2} & (\xi_1 < 0,\ \xi_2 \geq 0) \\ A e^{K|\eta| - \delta\xi_1 - K\xi_2} & (\xi_1 \geq 0,\ \xi_2 < 0) \\ A e^{K|\eta| - K\xi_1 - K\xi_2} & (\xi_1 < 0,\ \xi_2 < 0) \end{cases} \end{cases}$$

$(K, \delta > 0,\quad \xi_j = \mathrm{Re}\,\zeta_j,\quad \eta_j = \mathrm{Im}\,\zeta_j)$

の成立する時、$|F(\zeta)/J(\zeta)|$ が $|F(\zeta)|$ と同じ形の評価（もちろん．A, K, δ は変ってよい）をもてば十分。それを証明しよう。所が．条件 (S) と．Lem 1.1.4，(p.86.) により．前 Th．と同様にして．たとえば．$\xi_1 > \varepsilon_0|\xi|$，$\xi_2 > \varepsilon_0|\xi|$ の時 $\forall\varepsilon (< \varepsilon_0)$，$\forall\theta$

$$|F(\zeta)/J(\zeta)| \leq$$

$$\leq A e^{K(3\varepsilon|\xi| + |\eta|) - \delta(-3\varepsilon|\xi| - 2|\eta| + |\xi|)}$$

$$\times [B_\theta e^{\theta|\zeta| + \exists\alpha(3\varepsilon|\xi| + |\eta|)}]^2 \times (C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|})^3$$

$$\leq C \exp(2\delta + 3K + 2\theta + 2\alpha)|\eta| +$$

$+|\xi|(-\delta+3\varepsilon(K+\delta+2\alpha+1)+2\theta))$ となる。

従って $3\varepsilon(K+\delta+2\alpha+1)+2\theta<\delta/2$ となるように ε,θ を fix すれば、求める評価が得られる。

2. $0\leq\xi_1<\varepsilon_0|\xi|$, $\xi_2\geq 0$ の時は、$\xi_2\overset{\exists}{>}c|\xi|$ となっていることに注意すれば、上の場合と同様にして、

$$|F(\zeta)/J(\zeta)|\leq$$

$$\leq A\exp(K(3\varepsilon|\xi|+|\eta|-K(-3\varepsilon|\xi|-2|\eta|+\xi_1)-\delta(-3\varepsilon|\xi|-2|\eta|+\xi_2))\times[B_\theta\times\exp(\theta|\zeta|+\alpha(3\varepsilon|\xi|+|\eta|)]^2\times(C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|})^3$$

$$\leq C\exp((2\delta+5K+2\theta+2\alpha)|\eta|+(3\varepsilon(2K+\delta+2\alpha+1)+2\theta)|\xi|-K\xi_1-\delta\xi_2)$$

$$\leq C\exp((2\delta+5K+2\theta+2\alpha)|\eta|-K\xi_1+[(3c\varepsilon(2K+\delta+2\alpha+1)+2c\theta)-\delta]\xi_2)$$

従って $3c\varepsilon(2K+\delta+2\alpha+1)+2c\theta<\delta/2$ となるように ε,θ を十分小さくとれば、求める評価が得られる。

他の象限でも事態は本質的には変らないから。(むしろ易しくなる。) これで証明は

完結した。即ち $S * \mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}(\Omega)$

注意. $S \in \mathcal{E}'$ (compact supportの distribution) の時 $J(S)$ が条件 (S) を trivial に満たすことは容易に判る。(たとえば Ehrenpreis [6] p.554. Prop. 4.5.) 従って特に. $S \in \mathcal{E}'$ なら. $S * \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ この事実は Schapira [45] も注意している。

§3 Propagation of regularity

この節では、local operator に対して、正則性の伝播の問題を取り扱う。この結果はかなり best possible な物に近いことは、F. John [24] p.568〜573 の反例によりうかがわれるが、本当に best possible であるかどうかは残された興味ある問題である。この節の結果は、distribution における Malgrange [35]、Boman [2] の結果から考えて、特に珍しい物ではないけれど、方法論としてかなり面白い物と思う。尚、通常の偏微分作用素の、場合には、一般の system の場合もとり扱う。

3.1. Propagation of regularity

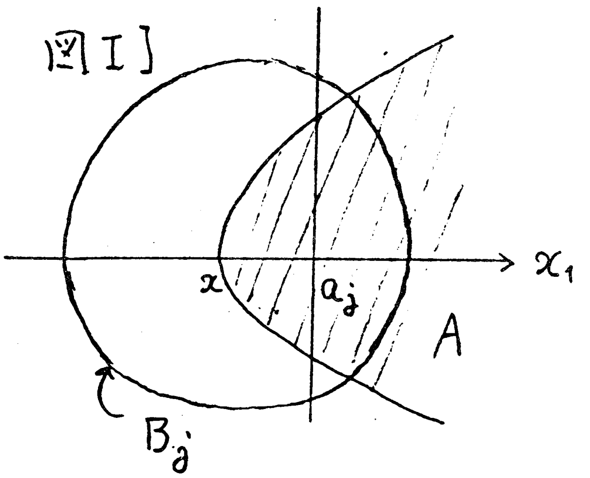
Th.3.1.1 $S \in \mathcal{B}$, $\mathrm{supp}\, S = \{0\}$ とする。今 A を properly convex closed set (下図 I 参照)、$x \in \partial A$ とする。この時、次の条件 i), ii) を満たす open set の系 $\{U_j\}$ が存在する。

i) $\{U_j\}$ は x の基本近傍系

ii) $S * u = f \in \mathcal{A}(U_j)$, $u \in \mathcal{B}(U_j)$ かつ

$u \in \mathcal{A}(U_j - A)$ ならば $u \in \mathcal{A}(U_j)$

図 I]



$U_j \underset{\mathrm{Df}}{=} B_j \cap \{x_1 < a_j\}$

証明] B_jを, xを中心, 半径 j^{-1} の ball とする。適当に座標軸をとることにより, a_jを十分小さくとることにより, U_j ($\underset{\mathrm{Df}}{=} B_j \cap$ $\cap \{x_1 < a_j\}$) が次の性質をもつとしてよい。(Aについての仮定による。)

$$(*)\left\{\begin{array}{l}\forall c\ (\leq a_j) \text{ に対しても } A \cap \{x_1 = c\} \\ \text{は } U_j \cap \{x_1 = c\} \text{ 内で compact である。}\end{array}\right.$$

さて証明に入ろう。まず, $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ は flabby sheaf であることに注意しよう。(佐藤の "注意" $\mathcal{B}$ が flabby であることと $H^1(\Omega, \mathcal{A}) = 0$ ($\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$) から明らかである。cf. 佐藤[43]) 従って $v \underset{\mathrm{Df}}{=} [u] \in \mathcal{B}/\mathcal{A}(U_j)$

に対して $\exists \tilde{\nu} \in \mathcal{B}/\mathcal{a}(\mathbb{R}^n)$ かつ
$\mathrm{supp}\,\tilde{\nu} \subset (U_j \cap A)^a$ (a は closure の意)
かつ $\nu = \tilde{\nu}$ in U_j となる $\tilde{\nu}$ を見つけうる。
この時 $S * \tilde{\nu} = S * \nu = [f] = 0$ in U_j,
かつ $S * \tilde{\nu} = 0$ in $x_1 < a_j$ となる。
(U_j の条件 (*) による。) ここで $\tilde{\nu}$ は compact
support になったから、ここで p. 112. で導入
した sheaf $\underset{\approx}{\mathcal{O}}$ を用いれば、$\exists \mu \in [\mathcal{B}/\underset{\approx}{\mathcal{O}}](D^n)$
s.t. $\mathrm{supp}\,\mu \subset (U_j \cap A)^a$, $\mu = \tilde{\nu}$ on $\mathbb{R}^n$
とできる。従って我々は、

$S * \mu = \theta$, $\mathrm{supp}\,\theta \subset \partial U_j \cap A$,

$\mathrm{supp}\,\mu \subset (U_j \cap A)^a$ というように考えて

よい。 $\mu, \theta \in [\mathcal{B}/\underset{\approx}{\mathcal{O}}](D^n)$

今 p. 113. と同様にして、 $H^1(D^n, \underset{\approx}{\mathcal{O}}) = 0$
により、μ の "kernel" $\varphi(x)$, 即ち、
$[\varphi] = \mu \in \mathcal{B}/\underset{\approx}{\mathcal{O}}$, $\varphi \in \mathcal{B}(D^n)$ かつ
$\varphi \in \underset{\approx}{\mathcal{O}}(D^n - \mathrm{supp}\,\mu)$ な条件を満たす
超函数 φ を見つけることができる。同様に
して θ の "kernel" $\vartheta(x)$ も $\vartheta \in \underset{\approx}{\mathcal{O}}(D^n -$
$- \mathrm{supp}\,\theta)$ として選びうる。この時、

定義により $\mathcal{S}^* \psi - \varphi \in \underset{\approx}{\mathcal{Q}}(D^n)$ ここで，

$\int \psi(x) e^{ix\zeta} dx \underset{\mathrm{Df}}{=} F(\zeta)$, $\int \varphi(x) e^{ix\zeta} dx$

$\underset{\mathrm{Df}}{=} G(\zeta)$ と定めれば，（sing supp ψ, φ

はいずれも compact 故，上の積分は，
通常の compact support の超函数と，通常の
積分の和と思ってよい。）　$\underset{\approx}{\mathcal{Q}}(D^n)$ が
Fourier 変換に安定であることから，

$J(\zeta)F(\zeta) - G(\zeta) \in \underset{\approx}{\mathcal{Q}}(D^n)$

ここで，$F(\zeta)$, $G(\zeta)$ は下の Lem. 3.1.2.
により，D^n の D^{2n} での近傍での正則函数
となり，そこで，supp[ψ], supp[φ] により
定まるある増大度をもつ。　しかるに $J(\zeta)$ は
local operator $\mathcal{S}^*$ から得られたものだか
ら，$J(\zeta)$ は，条件 (SS) 即ち，"$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$
s.t. $\forall \zeta \in \mathbb{C}^n$ $\exists \zeta'$ s.t. i) $|\zeta - \zeta'| < \varepsilon|\zeta|$
ii) $|J(\zeta')| \geqq e^{-\varepsilon|\zeta|}$" を満たしていることは，
（p.103. Lem 2.1.3. により
容易に判る。（p.104 の Lem 2.1.2. の証明
参照）従って，p.86 の Lem. 1.1.4. を用いる

ことにより, p.124 の Th. 2.2.2. の証明と全く同様にして, $F(\zeta)$の増大度と $G(\zeta)$の増大度は同じ形であることが判る。(尚, この事実の一般化を後に詳しく証明する, p.140. Th. 3.2.1 参照) 従って Lem. 3.1.2. により, $\mathrm{supp}[\psi] = \mathrm{supp}[\varphi]$ 従って $\mathrm{supp}\,\psi = \partial U_j \cap A'$ しかるに $[\psi] = [u]$ in U_j, となっていたから, $[u] = 0$ in U_j' 従って $u \in \mathcal{A}(U_j)$ Q.E.D.

Lem. 3.1.2. $\mu(x) \in \mathcal{G}(D^n) \cap \underset{\approx}{\mathcal{O}}(D^n - K)$
$K \Subset \mathbb{R}^n$, compact, convex とする。
この時 $F(\zeta) \underset{Df}{=} \int \mu(x) e^{ix\zeta} dx$ とすると.

$F(\zeta)$は, 次の条件 (*) を満足する。

(*) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon \quad F(\zeta)$ は
$C_\varepsilon(|\mathrm{Re}\,\zeta| + 1) > |\mathrm{Im}\,\zeta|$ で正則, かつ
$|F(\zeta)| \le A_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + \chi_K(\mathrm{Im}\,\zeta)}$ が成立する。
但し $\chi_K(\eta) \underset{Df}{=} \sup_{x \in K} (-\langle x, \eta \rangle)$
又、逆に $F(\zeta)$が, 上の条件 (*) を満たす

ならば、$\int F(\zeta) e^{-ix\zeta} d\zeta = \mu(x)$ は

積分路を適当に動して容易に判るように

$\mathcal{G}(D^n) \cap \underset{\approx}{\mathcal{O}}(D^n - K)$ の元である。

◎ この定理の証明は、佐藤先生の御助言により、著しく簡単になったものである。

佐藤先生に深く感謝致します。

証明] ε を fix して K_ε を K の ε-近傍とすれば、$\left| \int_{K_\varepsilon} \mu(x) e^{ix\zeta} dx \right| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + \chi_K(\eta)}$

は明らか故、$G(\zeta) \underset{\text{def}}{=} \int_{\complement K_\varepsilon} \mu(x) e^{ix\zeta} dx$

についての正則性と増大度を考えればよい。

($\int_{K_\varepsilon} \mu(x) e^{ix\zeta} dx$ は明らかに entire 故)

今簡単の為 $n = 2$ としておこう。(全く $n \geqq 3$ でも同じである。)

$\mu(x) \in \underset{\approx}{\mathcal{O}}(D^n - K)$ 故

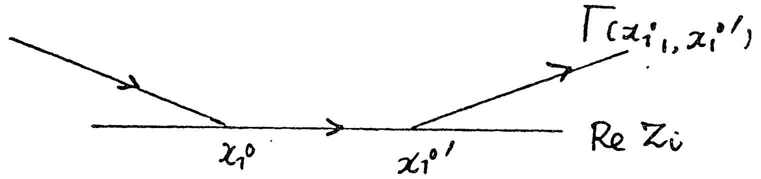
$\int_{\complement K_\varepsilon} \mu(x) e^{ix\zeta} dx =$

$$= \int_{\Gamma} \mu(z) e^{iz\zeta} dz$$ 但し，

Γ 示 $\Gamma(x_1^\circ, x_1^{\circ\prime}) \times \Gamma(x_2^\circ, x_2^{\circ\prime})$ ここで

$\Gamma(x_i^\circ, x_i^{\circ\prime})$ とは 下図の如き 積分路で

あって $K_\varepsilon \subset (x_1^\circ, x_1^{\circ\prime}) \times (x_2^\circ, x_2^{\circ\prime})$ とする。



但し Γ は $(\mu(z)$ の正則域$) \cup K_\varepsilon$ に含まれるとしておく。

すると明らかに $\mu(z)$ の定義から

$^\exists C_\varepsilon(|\mathrm{Re}\,\zeta|+1) > |\mathrm{Im}\,\zeta|$, $\mathrm{Re}\,\zeta_j \geq 0$ において

$|G(\zeta)| \leq A_\varepsilon e^{\chi_\Gamma(\mathrm{Im}\,\zeta)}$, これは 積分路

Γ を変更することにより, $\mathrm{Re}\,\zeta_j \geq 0$ である

必要はないから, $^\exists C_\varepsilon(|\mathrm{Re}\,\zeta|+1) > |\mathrm{Im}\,\zeta|$

において $|G(\zeta)| \leq A_\varepsilon e^{\chi_\Gamma(\mathrm{Im}\,\zeta)}$

ここで C_ε は Γ の 傾きと $\mu(z)$ の減少度

のみに 依存するから 座標軸をとりかえて

も 一定にとれる。 従って K_ε が 凸にとれ

ることから $^\exists C_\varepsilon(|\mathrm{Re}\,\zeta|+1) > |\mathrm{Im}\,\zeta|$ に

おいて $|G(\zeta)|\le A_\varepsilon e^{\chi_{\Gamma_\varepsilon}(\mathrm{Im}\,\zeta)}$ が成立する。
従って求める $|F(\zeta)|$ の評価も得られた。

逆に $F(\zeta)$ が上の条件を満たす時、
$\int F(\zeta)e^{-i\zeta x}d\zeta$ に積分の意味付けを与えよう。それは、$F(\zeta)$ が、D^n の(D^{2n} における)近傍で正則故容易である。簡単の為、$n=1$ としておく。$n\geq 2$ の時も、直積typeのcompact set K に対しては、全く同じ議論が成立し、従って一般の K に対しても K の凸性により明らかである。

今 $K=[-k,k]$ としよう。

今 ε を一つ fix して、

$$\Omega_{\delta,\varepsilon} \underset{\text{def}}{=} \{z \mid \mathrm{Im}\,z > -\delta(\mathrm{Re}\,z-k)+\varepsilon\}$$

とすると、$z\in\Omega_{\delta,\varepsilon}$ に対し

$$\int_{\substack{\mathrm{Im}\,\zeta=\delta\,\mathrm{Re}\,\zeta\\ \mathrm{Re}\,\zeta\le 0\quad \delta>0}} F(\zeta)e^{-i\zeta z}d\zeta \underset{\text{def}}{=} \int_{\mathrm{Re}\,\zeta\le 0} F(\zeta)e^{-i\zeta z}d\zeta$$

と定める。明らかに $\bigcup_{\delta>0}\Omega_{\delta,\varepsilon}=\{\mathrm{Im}\,z>0\}$ であり、上の積分は、$F(\zeta)$ についての条件

(*) により, $\underset{\approx}{\mathcal{O}}(D - \{x < K + 2\varepsilon\})$ の元を定めている。同様に, $\Omega'_{\delta,\varepsilon} \underset{\text{def}}{=} \{z \mid \operatorname{Im} z > \delta(\operatorname{Re} z + K) + \varepsilon\}$ として, $z \in \Omega'_{\delta,\varepsilon}$ に対して $\displaystyle\int_{\xi \le 0} F(\xi) e^{-i\xi z} d\xi$

$$\underset{\text{def}}{=} \int_{\substack{\operatorname{Im}\zeta = -\delta \operatorname{Re}\zeta \\ \operatorname{Re}\zeta \le 0 \quad \delta > 0}} F(\zeta) e^{-i\zeta z} d\zeta$$ は well-defined

でしかも $\Omega'_{\delta,\varepsilon} \cap \Omega_{\delta,\varepsilon} \ni z$ に対して, 上の2つの定義は compatible である。もちろん $\cup\, \Omega'_{\delta,\varepsilon} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ も同様。従って $\displaystyle\int_{\xi \ge 0} F(\xi) e^{-i\xi z} d\xi$ も同様に定義して, $\left(\displaystyle\int_{\xi \le 0} F(\xi) e^{-i\xi z} d\xi,\ \int_{\xi \ge 0} F(\xi) e^{-i\xi z} d\xi\right)$ なる定義函数により定まる超函数が求める物である。(上のことから明らかにその singular support は $(-\varepsilon - K, K + \varepsilon)$ $(\forall \varepsilon)$ に含まれている。)

通常の偏微分作用素に対しては、更に、system の場合にも、Th. 3.1.1. は然るべく拡張される。しかし もちろん すべての system に対して Th. 3.1.1. が拡張される訳ではない。

実際

Th. 3.1.3. $P(D) : \mathcal{B}^{r_0} \longrightarrow \mathcal{B}^{r_1}$ が与えられたとする。このとき $A \underset{\mathrm{Df}}{=} \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ (多項式環) として $M \underset{\mathrm{Df}}{=} A^{r_0} / {}^tP(x) A^{r_1}$

とすれば、$\mathrm{Ext}^0(M, A) = 0$

$$\Longleftrightarrow \Gamma_*(\mathbb{R}^n, (\mathcal{B}/\mathcal{a})^P) = 0$$

(Γ_* は compact support の section の意である。)

証明] $\mathrm{Ext}^0(M, A) \neq 0$ としよう。この時 $P(x)$ の行は A 上一次独立にはなりえないから $\Longleftarrow$ は明らかである。($\Gamma_{\{0\}}(\mathcal{B}^P) \neq 0$ が成立)

$\Longrightarrow$ を証明しよう。Th. 3.2.1. の証明と同様にして、$P(D)u = 0$, $\mathrm{supp}[u] = 0$ ならば、$\exists \varphi \in \mathcal{Q}(\mathcal{D}^n)^{r_0}$, $\mathrm{supp}[\varphi] = \mathrm{supp}[u]$,

$\psi \in \underset{\approx}{\mathcal{O}}^{r_0}(D^n - \mathrm{supp}[u])$ とできる。

従って $P(D)\psi = \theta \in \underset{\approx}{\mathcal{O}}^{r_0}(D^n)$

故に $P(\zeta)\hat{\psi}(\zeta) = \hat{\theta}(\zeta) \in \underset{\approx}{\mathcal{O}}^{r_0}(D^n)$

従って、p.91. の Th. 1.1.5. の証明と同様に、

Hörmander-Malgrange の不等式により、

$\exists\, \Psi(\zeta)$ $P(\zeta)\Psi(\zeta) = \hat{\theta}(\zeta)$, かつ

$\Psi(\zeta) \in \underset{\approx}{\mathcal{O}}^{r_0}(D^n)$ しかるに、

$\mathrm{Ext}^0(M, A) = 0$ を仮定したから、

$\Psi(\zeta) = \hat{\psi}(\zeta)$ でなければならぬ。

$\therefore\ \psi(x) \in \underset{\approx}{\mathcal{O}}^{r_0}(D^n)$

従って $[\psi] = 0$ $\therefore\ [u] = 0$ 即ち

$\Gamma_*(\mathbb{R}^n, (\mathcal{B}/\mathcal{a})^p) = 0$

上の Th. 3.1.3. により、我々は、Th. 3.1.1. を system の場合に拡張するには、最低限 $\mathrm{Ext}^0(M, A) = 0$ は仮定すべきことを知った。しかし、実は、Th. 3.1.1. は $\mathrm{Ext}^0(M, A) = 0$ の仮定の下に成立する。実際、それは、Th. 3.1.3. の証明法と Lem. 3.1.2. により、Hörmander-

Malgrangeの不等式により Th. 3.1.1. の証明と全く同じである。定理の形にまとめておこう。

Th. 3.1.1′. $\mathrm{Ext}^0(M, A)=0$ とする。この時 A を properly convex closed set, $x \in \partial A$ とする。この時 次の条件 i), ii) を満たす open set の系 $\{U_j\}$ が存在する。

i) $\{U_j\}$ は x の基本近傍系

ii) $P(D)u = f \in \dot{\mathcal{A}}(U_j)^{r_1}$, $u \in \mathcal{B}(U_j)^{r_0}$ かつ $u \in \mathcal{A}(U_j - A)^{r_0}$ ならば、$u \in \mathcal{A}(U_j)^{r_0}$

さて Th. 3.1.1. から 次の系は直ちに得られる。(同値である。)

Cor. 1. $S \in \mathcal{B}_{\{0\}}$ として $u \in \mathcal{A}(\Omega - L) \cap \mathcal{B}(\Omega)$, $S * u \in \mathcal{A}(\Omega - K) \cap \mathcal{B}(\Omega)$ (但し $K, L \Subset \Omega$, K convex) ならば $u \in \mathcal{A}(\Omega - K)$

この系を読み直せば、Ch (sing supp

$S * u) = Ch$ (sing supp u) がこの場合成立することになる。(但し Ch は convex hull の意) では、この事実はどの程度迄一般化できるだろうか。

3.2 singular support についての考察

この subsection は佐藤先生が sheaf $\mathcal{C}$ での analysis に関して提出された問題に対する一つの不十分な考察である。即ち $\mu, \nu \in \mathcal{B}$, $[\mu]$, $[\nu]$ を $\mathcal{B}/\mathcal{a}$ での各々の equivalence class として supp $[\mu]$, supp $[\nu]$ compact とすれば、$[\mu]$, $[\nu]$ は自然に $\mathcal{Q}/\underset{\approx}{\mathcal{O}}(D^n)$ 元と見なせる。従っていつもと同様に、$H^1(D^n, \underset{\approx}{\mathcal{O}}) = 0$ を用いて $\mu \in \mathcal{Q}(D^n) \cap \underset{\approx}{\mathcal{O}}(D^n - \mathrm{supp}[\mu])$ の元としておいてよい。ν についても同様。この時 sing supp $\mu * \nu$ と sing supp μ, sing supp ν には、即ち supp $[\mu * \nu]$ と supp $[\mu]$, supp $[\nu]$ にはどのような関係があるだろうか。Lem. 3.1.2.1 により、もちろんそれは $\int \mu(x) e^{ix\xi} dx \underset{\mathrm{Pf}}{=} F(\xi)$,

$\int \nu(x) e^{ix\zeta} dx \underset{\text{def}}{=} G(\zeta)$ とすることにより，$F(\zeta)$，$G(\zeta)$の増大度と$(FG)(\zeta)$の増大度の関係を調べることに帰着される。しかし一般に極めてこれは難しい。実際 μ, ν が共に compact support であってすら $\mu * \nu$ の support が一点になってしまうことすらあるということが Pólya [40] により知られている。（私はこの例を佐藤先生にお教え頂いた。Pólya [40] p.596 − p.597 参照）しかし，たとえば，$F(\zeta)$が条件(S) 即ち „$\forall \varepsilon$ $\exists N_\varepsilon$ $|\xi| > N_\varepsilon$ $\xi \in \mathbb{R}^n$ ならば $\exists \eta \in \mathbb{C}^n$ $|\xi - \eta| < \varepsilon|\xi|$ かつ $|J(\eta)| \geq e^{-\varepsilon|\xi|}$" を満たしているとすれば，„$\forall K$ compact $\exists L$ compact s.t. $\mathrm{Ch\,supp}[\mu * \nu] \subset K \Rightarrow \mathrm{Ch\,supp}[\nu] \subset L$" は成立する。即ち

Th. 3.2.1. $F(\zeta)$ は i) 条件(S)を満たす

ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists C_\varepsilon$ $C_\varepsilon(|\mathrm{Re}\,\zeta| + 1) > |\mathrm{Im}\,\zeta|$ において $|F(\zeta)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + \chi_M(\mathrm{Im}\,\zeta)}$

（但し，M は compact convex，$\chi_M(\eta) \underset{\text{def}}{=} \sup_{x \in M} (-\langle x, \eta \rangle)$ とする。）を満たす，

とする。この時 "$\forall\varepsilon>0$ $\exists C'_\varepsilon$
$C'_\varepsilon(|\mathrm{Re}\,\zeta|+1)>|\mathrm{Im}\,\zeta|$ において
$|FG(\zeta)|\le A'_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|+\chi_K(\mathrm{Im}\,\zeta)}$" を満たすような ($D^n$の($D^{2n}$における)ある近傍で正則な) $G(\zeta)$に対して次のような評価が成立する。$\forall\varepsilon$ $\exists C''_\varepsilon$ $C''_\varepsilon(|\mathrm{Re}\,\zeta|+1)>|\mathrm{Im}\,\zeta|$ において $|G(\zeta)|\le B_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta|+\chi_L(\mathrm{Im}\,\zeta)}$ が成立する。ここで、LはKとMのみに依存する。

証明] p.86 Lem. 1.1.4. から容易である。

実際 $|G(\zeta)|=|FG(\zeta)/F(\zeta)|$

$$\le \sup_{\substack{|\xi-\xi'|\le 4\theta|\xi|+3|\eta|\\ |\eta-\eta'|\le 8\theta|\xi|+8|\eta|}}|FG(\zeta)|\ \sup_{\text{''}}|F(\zeta')|\ \times$$

$$\times\ (C'''_\theta e^{-\theta|\xi|})^{-2}\quad(\xi=\mathrm{Re}\,\zeta,\ \eta=\mathrm{Im}\,\zeta)$$

よって $L\supseteq 8K+M$ とすれば十分である。ここで特に $\mu=\delta$, $\mathrm{supp}\,\delta=\{0\}$ の時は、条件(SS) (p.130.) により

右辺を $\sup\limits_{|\zeta-\zeta'|<\theta|\zeta|}|FG(\zeta)|\ \sup\limits_{|\zeta-\zeta'|<\theta|\zeta|}|F(\zeta')|\times$

$\times (C''_\theta e^{-\theta|\zeta|})^{-2}$ $(\forall \theta > 0)$ におさかえれるから、p.131. l.2.〜l.3. で述べた事実が成立する。

注意 今の証明から容易に判るように、$\mathrm{supp}[\mu]$ が compact となるような μ に対し μ^* を考えることにすれば、これは、条件(S)と、$F(\zeta) \neq 0$ in U (U は $D'' - {}^{\exists}M$ ($M \subset\subset R^n$) の D^{2n} での近傍) から ${}^{\exists}\nu$ s.t. $[\mu * \nu] = [\delta]$ なる ν をもつことがわかる。従ってこのような作用素に迄 "ellipticity" を考えることができる。(cf. Th. 2.2.1.) このような作用素迄考えに入れるべきことは、佐藤先生から教えを受けた。佐藤先生に深くお礼申し上げます。

§4. Hyperbolicity

この節では、hyperbolicityの問題を、主として local operator の場合を中心として論じる。我々はここで Gårding [8] にならって、基本解の性質により hyperbolicity を定義し、その定義により作用素の hyperbolicity の criterion を与える。更に、後半において、通常の偏微分作用素の場合に、上の定義による双曲性が、物理現象の記述として適当であることを示すある F. John の理論（Non-admissible data に関する物）が、我々の場合にも成立することを注意する。

4.1. Hyperbolicity の必要条件

Def. 4.1.1 $S \in \mathcal{B}$, $\operatorname{supp} S = \{0\}$ とする。

この時 $S*$ が $(1, 0, \cdots, 0)$ 方向に双曲型

$$\underset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \ {}^{\exists}E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp} E \subset \Gamma \text{ (cone)}$$

$$\Gamma \subset \{x_1 > 0\}^{\text{の閉包}} \text{ かつ } S * E = \delta$$

即ち $S * u = 0$ によって記述される物理現象が有限伝播速度をもつことにより双曲性

を定義する。

この定義は、$S \in \mathcal{D}'$ の時は通常の物である。(たとえば、Hörmander [18] Ch. 5) ただし後に示すように、対象を $\mathcal{B}$ に迄広げたことにより、理論がより統一的な物となる。(p. Th. 4.4.1. 参照) (注意: $\Gamma \Subset \{x_1 > 0\}$ とは、$\Gamma \cap \{|x| = 1\} \Subset \{x_1 > 0, |x| = 1\}$ の略記、従って原点は除いて考えている。)

Th. 4.1.2. $S*$ が $(1, 0 \cdots 0)$ 方向に双曲型

$\Longrightarrow$ $\langle S, e^{ix\zeta} \rangle \underset{\mathrm{Df}}{=} J(\zeta)$ は次の条件 (H_1) を満たさねばならぬ。

(H_1) $\exists c > 0$ が存在して、$J(\zeta) = 0$, かつ

$|\eta| < c\eta_1$ ならば、$\forall \varepsilon > 0$ $\exists C_\varepsilon$

$\eta_1 \leq \varepsilon |\xi| + C_\varepsilon$ が成立する。

(但し $\eta_j = \mathrm{Im}\, \zeta_j$, $\xi_j = \mathrm{Re}\, \zeta_j$)

証明] 仮定により、$\exists E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$S * E = \delta$ supp $E \subset \Gamma \Subset \{x_1 > 0\}$

従って、$\mathcal{Q}(D^n)$ に話を持ちこむと、$\{\mathcal{Q}(\Omega)\}$ は flabby sheaf (p. 56. Th. 4.4.2. 参照) $\exists \tilde{E} \in \mathcal{Q}(D^n)$ s.t. $\tilde{E} = E$ in $\mathbb{R}^n$ かつ supp $\tilde{E} \subset \Gamma^a_{D^n} = K$ (即ち Γ の

D^nにおける閉包）とできる。従って.

$S * \widetilde{E} = \delta + \mu$　但し　$\mathrm{supp}\,\mu \subset K \cap S^{n-1}_{\infty}$

となる。ここで，p.64. Th.5.1.1. の結果，

即ち，„cone に support をもつ Fourier 超函数の Fourier 変換を正則函数として捕える" という物により，$\Gamma \Subset \{x_1 > 0\}$ ということから，$\mathcal{F}\widetilde{E}$，$\mathcal{F}\mu$ はいずれも $^{\exists}c'$

$|\eta| < c'\eta_1$ において正則である。更に，

$\mathcal{F}\mu \underset{\text{Df.}}{=} M(\zeta)$ とすれば，$c < c'$ として，

$M(\zeta)$ は，$|\eta| < c\eta_1$ において，

$|M(\zeta)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi| - K\eta_1}$ を満たす。$(K>0)$

（A_ε を $A_{\varepsilon,K}$ として „$^{\forall}K$ に対しても" としてもよいが，それは今必要でない。）

一方，$\mathcal{F}\widetilde{E} \underset{\text{Df.}}{=} F(\zeta)$ として，$S * \widetilde{E} = \delta + \mu$ から，

$J(\zeta)F(\zeta) = 1 + M(\zeta)$ が成立する。

従って，$J(\zeta) = 0$，$|\eta| < c\eta_1$ とすれば，

$-1 = M(\zeta)$　$\therefore$　$1 = |M(\zeta)|$

$\therefore$　$0 \leq \log|M(\zeta)| \leq \log A_\varepsilon + \varepsilon|\xi| - K\eta_1$

$\therefore$　$K\eta_1 \leq C'_\varepsilon + \varepsilon|\xi|$　$(C'_\varepsilon = \log A_\varepsilon)$

$\therefore$　$\eta_1 \leq C_\varepsilon + \varepsilon|\xi|$　$(\forall\varepsilon)$　$(\because K>0)$

故に、$J(\zeta)$は、定理の条件（H_1）を満たさねばならない。

注意 i) 上では、証明を„無限遠方に事態をreduce"して行ったが、実は、問題を„原点にreduce"して行うことも可能である。その証明は Gårding教授の'69年10月の東大における講演（Gårding [10]）に接して得た。

その概略を示しておこう。

$S * E = \delta$ とする。$\mathcal{B}$ は flabby sheaf だから、$\exists \tilde{E}$ s.t. $\begin{cases} \text{i)} & E = \tilde{E} \text{ in } \{|x| < 1\} \\ \text{ii)} & \operatorname{supp} \tilde{E} \subset \Gamma \cap \{|x| \le 1\} \end{cases}$

ここで、$S*$ は local operator 故

$\exists \nu \quad \operatorname{supp} \nu \subset \Gamma \cap \{|x| = 1\}$. s.t.

$S * \tilde{E} = \delta + \nu$. ここで、$\Gamma \Subset \{x_1 > 0\}$ と仮定したから（$\operatorname{supp} \nu$ の凸包）$\not\ni 0$,

この事実を用いて、$S * \tilde{E} = \delta + \nu$ を Fourier 変換すれば、証明は、上と全く同様に進行する。

ii) 上の証明で„無限遠方に support をもつ元" μ が現われたのは、一見奇妙である。それは„宇宙が compact では波の伝播が起きにくい"ことを示しているわけだが、数学的にはどのような意味をもつか、簡単な場合に考えてみよう。即ち、$S \in \mathcal{D}'$ の場合、つまり通常の偏微分作用素 $P(D)$ が $\mathcal{D}'$-category で双曲型としよう。この時、P の満たすべき代数的性質はよく知られていて、(たとえば、Hörmander [18]) $\xi \in \mathbb{R}^n$ で $\tau < \tau_0$ とすれば $P(\xi + \sqrt{-1}\tau(1, 0 - 0)) \neq 0$ が成立する。即ち、$P(\zeta)$ はある tublar domain で零にならない。(これが本質的には、Leray [30] の analysis の出発点だった。) 従って適当な平行移動により $P'(\zeta) \neq 0$ in $\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Gamma$ (Γ: open cone, with vertex at 0) としてよい。従ってその平行移動された作用素 $P'(\zeta)$ に対する基本解は、$\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Gamma'$ ($\Gamma' \Subset \Gamma$) においては Malgrange の不等式 (たとえば、Hörmander [18] 3.1. 参照) と上の性質から ($\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Gamma'$ において ($\Gamma' \Subset \Gamma$)

$|P'(\zeta)| \geq A_\varepsilon e^{-\varepsilon|\zeta|}$, Ch. 1. §5. の結果により、$\mathcal{F}(1/p')$ 厈 E' とすれば、E' は P' の基本解になっている。しかし、この E' から、P の基本解 E を得るには、E' に、適当な指数函数をかけねばならぬ。それは一般には、$\mathcal{Q}(\mathcal{D}^n)$ 内では不可能である。即ち、"増大度の影響" が無限遠方の μ にしわよせされていることになる。これが μ の現われる理由であろう。

4.2. Hyperbolic operator に対する基本解の構成

このsubsectionでは、Th. 4.1.2. の条件 (H_1) の下に、$S*$ は Def. 4.1.1. の意味で hyperbolic であることを示すことを目標とする。超函数論のmeritを感じさせる部分である。尚、後節で、通常の偏微分作用素に対しては、条件 (H_1) から principal part が hyperbolic であることが従い、かつ逆も正しいことを示す。従って、この節の結果から $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial u/\partial t = \delta$ を満たし、しか

も $\mathrm{supp}\, u \subset \{t=0\}\times\{x\geq 0\}$ なる物が
超函数としては存在することが判るけれど、
（もちろん distribution としては存在しない）
具体的にその表示式を一つの例として与えてみる。
それは単に一つの例でしかないが、更にこの方向に
理論を発展させることは残された重要な問題で
あろう。

Th. 4.2.1. $S*$ を local operator とし、
$\langle S, e^{ix\zeta}\rangle \underset{\text{def}}{=} J(\zeta)$ が p.144. の条件
(H_1) を満たしているとする。この時
$^\exists E\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $S*E=\delta$ かつ
$\mathrm{supp}\,E \subset \Gamma \subset\subset \{x_1>0\}$ なる物がある。

証明] まず証明の方法を示す為 $n=1$ として考える。後に示すように、$n\geq 2$ でも本質的な差はない。

条件(H_1) と p.101. Lem. 2.1.2. により
$\forall\varepsilon$ に対しても $^\exists C_\varepsilon$ が存在して、$\eta=\varepsilon\xi+C_\varepsilon$
$(\xi\geq 0)$ 上で $\forall\theta$ $|J(\zeta)|\geq {}^\exists A_\theta e^{-\theta|\zeta|}$
と仮定してよい。今たとえば、$\varepsilon=1$ に対する

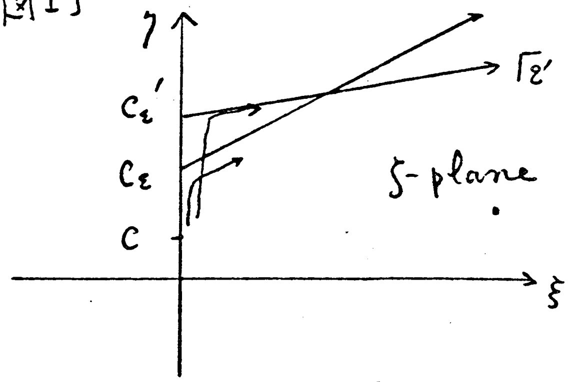
C_εをCと定め，以下 $\varepsilon < 1$, $C_\varepsilon > C$ としておく。

この時 $E_\varepsilon^+(z) \underset{\mathrm{Df}}{=} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} e^{-iz\zeta} / J(\zeta)\, d\zeta$

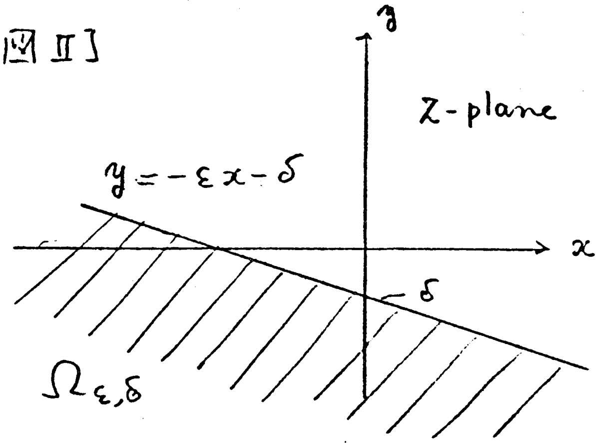
但しここで $\Gamma_\varepsilon^+ = \{(0+i\eta) \mid 0 \le \eta \le C_\varepsilon\} \cup \{(\xi + \sqrt{-1}(\varepsilon\xi + C_\varepsilon) \mid \xi \geq 0\}$ と定める。

$(\xi = \mathrm{Re}\,\zeta,\ \eta = \mathrm{Im}\,\zeta)$ （図I）参照。

図I〕



図II〕



又 $z = x + iy$ は $y + \varepsilon x < -\delta$ を $(\delta > 0)$ 満たす所で考える。$\{\mathrm{Im}\,z < -\varepsilon\,\mathrm{Re}\,z - \delta\} \underset{\mathrm{Df}}{=} \Omega_{\varepsilon,\delta} \ni z$ に対しては $|J(\zeta)|$ の下からの評価により明らかに $E_\varepsilon^+(z)$ は絶対収束する積分で表現されている。又

従って Cauchy の積分定理から明らかに

$\Omega_{\varepsilon,\delta} \cap \Omega_{\varepsilon',\delta'} \ni z$ に対し $E_\varepsilon^+(z) = E_{\varepsilon'}^+(z)$

が成立する。又 一方 $\bigcup_{\substack{\varepsilon>0\\ \delta>0}} \Omega_{\varepsilon,\delta} = \{\mathrm{Im}\,z < 0\}$

は明らか故. 結局 解析接続により $\mathrm{Im}\, z<0$ で正則な $E^+(z)$ が得られる。(いささか符号が見辛いが, $\mathcal{F}(1/J(\zeta))$ を行っている感じだからやむを得ない。) 同様に, Γ_ε^- $\underset{\mathrm{Df}}{=}$

$\underset{\mathrm{Df}}{=} \{(0+i\eta) \mid c \leq \eta \leq C_\varepsilon\} \cup \{\xi - \sqrt{-1}(\varepsilon\xi + C_\varepsilon) \mid \xi \leq 0\}$ として $E_\varepsilon^-(z) \underset{\mathrm{Df}}{=} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} e^{-iz\zeta}/J(\zeta)\, d\zeta$

と定めることにより, $\{\mathrm{Im}\, z>0\}$ で正則な $E^-(z)$ を得る。この時 $(E^-(z), -E^+(z))$ により定まる超函数 $E(x)$ が求める基本解になっていることを示そう。まず $S * E = 2\pi\delta(x)$ を示そう。

$z \in \Omega_{\varepsilon,\delta}$ として　$\mathrm{supp}\, S = \{0\}$ 故

$S*: \mathcal{O}(\Omega_{\varepsilon,\delta}) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega_{\varepsilon,\delta})$ に注意して

$$(S * E_\varepsilon^+)(w) = \int_{\Gamma_\varepsilon^+} e^{-iw\zeta} \langle S, e^{iz\zeta}\rangle / J(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \int_{\Gamma_\varepsilon^+} e^{-iw\zeta}\, d\zeta \qquad (\because J(\zeta) \underset{\text{by def.}}{=} \langle S, e^{iz\zeta}\rangle)$$

$$= \int_c^{C_\varepsilon} e^{wt}\sqrt{-1}\, dt + \int_0^\infty e^{-\sqrt{-1}w((1+\sqrt{-1}\varepsilon)\xi + \sqrt{-1}C_\varepsilon)} \times$$

$$\times (1+\sqrt{-1}\varepsilon)\, d\xi$$

$$= \left.\frac{\sqrt{-1}\,e^{wt}}{w}\right|_{c}^{c_\varepsilon} + \left.\frac{e^{-\sqrt{-1}w\,((1+\sqrt{-1}\varepsilon)\xi+\sqrt{-1}c_\varepsilon)}}{-\sqrt{-1}\,w}\right|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{\sqrt{-1}\,e^{c_\varepsilon w}}{w} - \frac{\sqrt{-1}\,e^{cw}}{w} + \frac{e^{c_\varepsilon w}}{\sqrt{-1}\,w}$$

$$= \frac{e^{cw}}{\sqrt{-1}\,w}$$ 従って $\mathrm{Im}\, w < 0$ に

おいて $\mathcal{S} * E^+ = \dfrac{1}{\sqrt{-1}}\,\dfrac{e^{cw}}{w}$

同様に $\mathcal{S} * E^- = \dfrac{-1}{\sqrt{-1}}\,\dfrac{e^{cw}}{w}$ $(\mathrm{Im}\, w > 0)$

従って

$$\mathcal{S} * E = \left[\frac{-1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{cw}}{w}\right] = 2\pi\,\delta(x)$$

次に $\mathrm{supp}\, E \subset \{x \geqq 0\}$ を示そう。

それには $x \leqq a < 0$ として $\varepsilon > 0$ を fix

して $-E_\varepsilon^+(x) = E_\varepsilon^-(x)$ を言えば十分。

従って Cauchy のの積分定理により

$$\left|\int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{-ix(\xi+\sqrt{-1}(c_\varepsilon+\varepsilon\xi_0))} \Big/ J(\xi)\, d\xi\right|$$

$\longrightarrow 0$ $(\xi_0 \longrightarrow \infty)$ を言えばよい。

しかるに、

$$\left|\int_{-\xi_0}^{\xi_0} \quad d\xi\right| \leq \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \frac{e^{(C_\varepsilon+\varepsilon\xi_0)x}}{|J(\xi)|}\, d\xi$$

$$\leq A_\theta\, e^{(C_\varepsilon+\varepsilon\xi_0)a} \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\theta|\xi|}\, d\xi$$

$$\leq 2A_\theta\, e^{(C_\varepsilon+\varepsilon\xi_0)a} \left(e^{\theta\xi_0}-1\Big/\theta\right)$$

よって $\theta<(-a)\varepsilon$ と θ をとめて $\xi_0\longrightarrow\infty$ とすれば、$\left|\int_{-\xi_0}^{\xi_0} \quad d\xi\right| \longrightarrow 0$

$\therefore\ \mathrm{supp}\ E \subset \{a\leq x\} \quad (\forall a<0)$

$\therefore\ \mathrm{supp}\ E \subset \{0\leq x\}$

最後に $n\geq 2$ の場合に修正すべき点に触れておこう。この時適当な Affine 変換を行うことにより、最初から $\Gamma^\circ \supset \{\mathrm{Im}\,\zeta_j \geq 0\ \forall j\}$ としておいて一般性は失われない。又、以下から判るように、こうしておけば $n=2$ としても特に一般性は失われないから記号の簡単の為 $n=2$ としておく。この時、

$$E_\varepsilon^{++}(z_1, z_2) \underset{\text{所}}{=} \iint_{\Gamma_\varepsilon^{++}} e^{-i\langle z, \zeta\rangle} \Big/ J(\zeta_1, \zeta_2) \, d\zeta_1 d\zeta_2$$

但し $\Gamma_\varepsilon^{++} = \Big[\{ 0 + \sqrt{-1}\,\eta_1 \mid C^1 \le \eta_1 \le C_\varepsilon^1 \} \cup$
$\cup \{ \xi_1 + \sqrt{-1}(\varepsilon \xi_1 \times C_\varepsilon^1) \mid \xi_1 \geqq 0 \} \Big] \times$
$\times \Big[\{ 0 + \sqrt{-1}\,\eta_2 \mid C^2 \le \eta_2 \le C_\varepsilon^2 \} \cup \{ \xi_2 +$
$+ \sqrt{-1}(\varepsilon \xi_2 + C_\varepsilon^2) \mid \xi_2 \geqq 0 \} \Big] \underset{\text{所}}{=} \Gamma_{\varepsilon 1}^{+} \times \Gamma_{\varepsilon 2}^{+}$
(p.150 図 I 参照: $\eta_j = \mathrm{Im}\,\zeta_j$ etc なる記号はすべてそこと同じ。)
又 $\check{\Gamma}_{\varepsilon 2}^{+}$ を $\Gamma_{\varepsilon 2}^{+}$ の $\xi_2 = 0$ に関しての折り返し、として

$$E_\varepsilon^{+-}(z_1, z_2) = \iint_{\Gamma_{\varepsilon 1}^{+} \times \check{\Gamma}_{\varepsilon 2}^{+}} e^{-i\langle z, \zeta\rangle} \Big/ J(\zeta_1, \zeta_2)$$

$\times\, d\zeta_1 d\zeta_2$ etc と E_ε^{++} を又、他も同様に、E_ε^{-+}, E_ε^{--} を定めることにより、p.150 と同様にして $\{ \mathrm{Im}\, z_1 < 0,\ \mathrm{Im}\, z_2 < 0 \}$ etc で (ε によらない) 正則な函数 E^{++}, E^{+-}, E^{-+}, E^{--} を得る。そこで
$(E^{--}, -E^{-+}, -E^{+-}, E^{--})$
$\underset{\text{所}}{=} E(x) \in H^2_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{C}^2, \mathcal{O}) \cong \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ として、
$S * E = 2\pi\,\delta(x)$ となることは、$n=1$ の時

と全く同様である。 従って $E(x)$ の support の様子さえ見ればよい。

しかるに $x_1 \leq a < 0$ として. $z_2^\circ \in \Omega_{\varepsilon,\delta}$ (p.151 図II 参照) とすれば, $n=1$ の時と同じく $E_\varepsilon^{++}(x_1, z_2^\circ) = -E_\varepsilon^{-+}(x_1, z_2^\circ)$ が知られる。 同様に

$$-E_\varepsilon^{+-}(x_1, z_2^{\circ\prime}) = E_\varepsilon^{--}(x_1, z_2^\circ)$$

従って $\operatorname{supp} E \subset \{a \leq x_1\}$ $\forall a < 0$

$\therefore$ $\operatorname{supp} E \subset \{x_1 \geq 0\}$

同じく $(E_\varepsilon^{++}, -E_\varepsilon^{+-})$, $(-E_\varepsilon^{-+}, E_\varepsilon^{--})$ について同様に考えれば

$$\operatorname{supp} E \subset \{x_2 \geq 0\}$$

$\therefore$ $\operatorname{supp} E \subset \{x_1 \geq 0\} \cap \{x_2 \geq 0\}$

Q.E.D.

Eg. 4.2.2. ($\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E(t,x) = \delta(t)\delta(x)$

$\operatorname{supp} E \subset \{t=0\} \times \{x \geq 0\}$ の具体的表現) 超函数論の一つの demonstration として, 上のような基本解 $E(t,x)$ を極めて

具体的に表現してみよう。

まず発見的考察を行う。(cf. Gårding [10])

$\partial^2/\partial x^2 \underset{\mathrm{Df}}{=} a(D)$, $\partial/\partial t = b(D)$ として，

a^{k+1} $(= \partial^{2(k+1)}/\partial x^{2(k+1)})$ に対する

基本解を $E(a^{k+1}, t, x)$ と書こう。

"幾何級数" により，

$$E(t, x) = \sum (-1)^k b(D)^k E(a^{k+1}, t, x)$$

となることが期待される。

ここで $H^2_{\{t=0\}\times\{x\geq 0\}}(\mathbb{C}^2, \mathcal{O})$

$\cong H^2(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{O})$（たとえば小松[28]

p. 209. 参照）と表現することにする。但し，

$\mathcal{U} = \{U_j\}_{j=0}^{2}$　$\mathcal{U}' = \{U_1, U_2\}$，ここに

$U_0 = \mathbb{C}^2$，$U_1 = \{(T, Z) \in \mathbb{C}^2 \mid Z \not\geq 0\}$，

$U_2 = \{(T, Z) \in \mathbb{C}^2 \mid T \neq 0\}$ とする。

すると，$E(a^{k+1}, t, x)$

$$= \left[-\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T} \operatorname{Log} Z \right]$$

と表現される a^{k+1} の基本解が存在する

ことは明らか。ここで $\operatorname{Log} Z$ は $\log Z$ の

主値. 従って $(z^{2k+1}/T)\log z$ は $U_1 \cap U_2$ で一価正則になっていることに注意。

従って $E(t,x)$ の, 上の Čech cohomology に関しての定義函数としては,

$$-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(2k+1)!}\,\frac{z^{2k+1}}{T^{k+1}}\log z$$

(in $U_1 \cap U_2$) をとることが適当と考えられる。実際. そうとればよいことを以下に証明しよう。(発見的考察終り)

今 $G(T,z) \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(2k+1)!}\,\frac{z^{2k+1}}{T^{k+1}}$

として, これが $T \neq 0$ で一価正則なることをまず示そう。そのために.

$g(\tau^2,z) \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(2k+1)!}\,\frac{z^{2k+1}}{T^{k+1}}$ を考えれば, $g(\tau^2,z) = \frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(2k+1)!}\left(z/\tau\right)^{2k+1}$.

今 $g(w) \underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(2k+1)!}(w)^{2k+1}$

なる級数を考える。一方. 又. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, w^{2n}/(2n)!$

なる級数を考えると、この級数の収束半径は

∞ で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, w^{2n}/(2n)! \underset{\mathrm{Df}}{=} h(w)$

$= w e^{\frac{w^2}{4}} \displaystyle\int_0^{w/2} e^{-s^2} ds$ と表わされること

が知られている。(一松 他 [21] p.58 3°

参照) 従って

$$h'(w) = \sum_{n\geqq 1} n!/(2n-1)! \quad w^{2n-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)!/(2l+1)! \quad w^{2l+1} = g(w)$$

となり、$g(w)$ は entire. 従って

$g(\tau^2, z) = 1/\tau \; g(z/\tau)$ は $\tau \neq 0$ で

正則。故に、

$G(T, Z)$ は $T \neq 0$ で正則 かつ そこで

$$\sum_{k\geqq 0} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}}$$ なる級数で

表現される。

従って $F(T, Z) \underset{\mathrm{Df}}{=} -\dfrac{1}{4\pi^2} G(T, Z) \log Z$

$\in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2)$

次に、

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right) F(T, Z)\right] = \delta(t)\,\delta(x)$$

を示そう。（ [　　] は $H^2(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{O})$

の元としての意。）　$(T, Z) \in U_1 \cap U_2$ として，

$$\partial/\partial Z\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}} \log Z\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{Z}{T} \log Z\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(\sum_{k\geq 1} \qquad \right)$$

$$= \frac{1}{T} \log Z + \frac{1}{T} + \sum_{k\geq 1}\left(\frac{k!}{(2k+1)!} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{(2k+1)\, Z^{2k}}{T^{k+1}} \log Z\right) + \sum_{k\geq 1} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k}}{T^{k+1}}$$

$$\sim \frac{1}{T} \log Z + \sum_{k\geq 1} \frac{k!}{(2k)!} \frac{Z^{2k}}{T^{k+1}} \log Z$$

（ここで $\sim$ とは cohomologous in $H^2(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{O})$ の意）

$$\therefore\ \partial^2/\partial Z^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}} \log Z\right)$$

$$\sim \frac{1}{T} \frac{1}{Z} + \sum_{k\geq 1} \frac{k!}{(2k-1)!} \frac{Z^{2k-1}}{T^{k+1}} \log Z$$

又、$\partial/\partial T\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{(2k+1)!}\frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}}\log Z\right)$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)\,l!}{(2l-1)!}\frac{Z^{2l-1}}{T^{l+1}}\log Z$$ は

明らか。故に

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right)F(T,Z)\sim -\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{TZ}$$

$$\therefore\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E(t,x)$$

$$=\left[\left(\partial/\partial T+\partial^2/\partial Z^2\right)F(T,Z)\right]$$

$$=\left[-\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{TZ}\right]=\delta(t)\delta(x)$$

従って求める $E(t,x)$ の一つの Čech cohomology による具体的表現として、

$$F(T,Z)\underset{\mathrm{Df}}{=}-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k\geq 0}\frac{k!}{(2k+1)!}\frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}}\times$$

$\times\log Z\quad(Z\neq 0,\ T\neq 0)$ という

定義函数を与えることができた。

4.3. Generalized hyperbolicity の考察

Def. 4.1.1. の hyperbolicity の定義は極めてよい物であるが、一般の convolution operator に対しては、もちろん、この定義では理論が進展しないことは明らか。そこで更に一般の作用素に対しても理論を展開するために、Def. 4.1.1. を少し修正して一般の場合も論じよう。

Def. 4.1.1.′ $\mu \in \mathcal{B}$, $\operatorname{supp}\mu$ compact としよう。この時、$\mu *$ が $(1, 0 \cdots 0)$ 方向に hyperbolic $\Leftrightarrow$ ${}^{\exists}E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} E \subset \Gamma$ (cone) かつ $\Gamma + {}^{\exists}a(1, 0 - 0) \in \{x_1 \geq 0\}$, かつ $\Gamma + a(1, 0 \cdots 0)$ 記 $\Gamma_a \Subset \{x_1 > 0\}$ であって $\mathcal{S} * E = \delta(x)$

即ち、"時間 $x_1 = 0$" での様子からすべての状態を知ることはできないが、"$-a < x_1 < 0$ での様子を知れば" すべて未来のことがわかるという定義である。$\operatorname{supp}\mu \supsetneq \{0\}$ の時は、それは自然な条件である。(cf. Ehrenpreis [7], Gårding [9])

さてこのように "Generalized hyperbolicity" を定義する時 Th. 4.1.2. (p. 144.) に現われた条件 (H_1) はやはり必要条件であることは、その証明を見れば明らか。(p. 145.) しかし今度は、そのような代数的条件のみで基本解が存在するとは期待できない。$|1/J(\zeta)|$ が余りにも大きくなる可能性があるからである。しかし、もちろん、条件 (H_1) の代りに、次の条件 (EH_1) を課せば、存在定理が得られることは、殆んど自明に近い。

(EH_1) $^\exists c > 0$ が存在して $|\eta| < c\eta_1$ において次の条件が成立する。

$$\left[\begin{array}{l} ^\exists a \text{ が存在して } \forall \varepsilon > 0 \ ^\exists C_\varepsilon \text{ があって} \\ |\eta| < c\eta_1 \text{ なる条件の下で。} \quad \eta_1 > \varepsilon|\xi| + C_\varepsilon \\ \text{ならば。} \ \forall \theta \ ^\exists A_\theta \text{ があって} \\ |J(\zeta)| \geqq A_\theta e^{-\theta|\xi| - a\eta_1} \text{ が満たされる。} \end{array}\right.$$

もちろん (EH_1) が必要であることは、p. 145. (Th. 4.1.2. の証明) と同様にして判る。実際、

$1+M(\zeta)=J(\zeta)F(\zeta)$ が $|\eta|<C\eta_1$ で成立し、しかもそこで

$$\begin{cases} |M(\zeta)| \leq B_\varepsilon\, e^{\varepsilon|\xi|-K\eta_1} & (K>0;\ \forall\varepsilon>0) \\ |F(\zeta)| \leq B'_\theta\, e^{\theta|\xi|+a\eta_1} & (\forall\theta>0) \end{cases}$$

が成立するから、

${}^\exists C_\varepsilon$ s.t. $\eta_1 > \varepsilon|\xi| + C_\varepsilon$ ならば、

$|M(\zeta)| < 1/2$ としてよい。

従って $|J(\zeta)| \geqslant \frac{1}{2}\,|F(\zeta)|^{-1}$

$\geqslant C_\theta\, e^{-\theta|\xi|-a\eta_1}$ が成立する。

又、この条件の下で基本解を構成することは、p. 150 ~ p. 155 と全く同様である。（ただ、そこで $\Omega_{\varepsilon,\delta}=\{z \mid \operatorname{Im} z < -\varepsilon(\operatorname{Re} z + a) - \delta\}$ とせねばならない。それに応じて supp E が a だけ負の方向にも広がるのである。p. 153 の評価参照。又、supp $\mu \ni \{0\}$ であるから $\mathcal{O}(\Omega_{\varepsilon,\delta}) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega_{\varepsilon,\delta} + \operatorname{supp} \mu)$ として convolution をせねばならぬが、それは別に supp μ が一定故、別に関わない。）

しかし、我々は、条件(H_1)の他に、もう一つ、条件(S)(p.119.参照)の仮定をすれば、Th. 4.2.1(即ち基本解の構成)が成立する。これは、条件(S)が $\mu \in \mathcal{E}'$ (compact support の distribution)の時には、常に満たされる(p.126.参照)ことを合わせて考えれば、かなり興味深い。(cf. Ehrenpreis [7]. Gårding [9])

それには、条件(S)と条件(H_1)から条件(EH_1)が成立することを言えばよい。

ここで我々は Ehrenpreis の極めて深い結果である Minimum modulus theorem を用いる。(Ehrenpreis [4] p.317. Th.5. 参照)

Th. 4.3.1. 条件(S) and 条件(H_1)
$\Rightarrow$ 条件(EH_1) (with some a).

証明] 証明は $n=1$ として行う。$n \geq 2$ の時は、それを繰り返せば routine である。(たとえば、Ehrenpreis [6] p.528~p.529.

と同じである)

$\zeta=\xi+i\eta$ における $|J(\zeta)|^{-1}$ の評価を行いたい。条件 (S) により $\exists\zeta_1$ s.t. $|\zeta_1-\xi|<\theta|\xi|$, $|J(\zeta_1)|\geqq e^{-\theta|\xi|}$ 従って Ehrenpreis の minimum modulus theorem により、$\exists\zeta_2$ s.t. $\eta<\mathrm{Im}\,\zeta_2<3\theta|\xi|+2\eta$ かつ $\forall\theta'>0$ に対しても $|J(\zeta_2)|\geqq K_{\theta'}\exp(-B\theta'((1+\theta)|\xi|-\overset{\exists}{C}\alpha(3\theta\xi+2\eta)-11\theta|\xi|)$ が成立する。(α は $|J(\zeta)|$ の exponential type. B, C は constant.)

従って ζ_2 を中心、半径 $3(\eta+\theta|\xi|)$ の円に対して、p.86 の Lem. 1.1.4 を適用すれば、(あるいは再び Ehrenpreis の minimum modulus theorem を用いてもよい。)その円内で $J(\zeta)\neq 0$ ならば(条件 (H_1) をここで用いる。)最初の点 ζ において、$|J(\zeta)|\geqq C_{\theta'}\exp(\theta'(3\eta+$
$+(1+3\theta)|\xi|)+\alpha(5\eta+6\theta|\xi|))\times$
$\times\{\exp(-B\theta'(1+\theta)|\xi|-C\alpha(3\theta\xi+2\eta)-$

$-11\theta|\xi|)\xi^2$

$\geqq C_{\theta'}\exp((\beta\theta'+\gamma\theta)|\xi|-\delta\eta)$

ここで β,γ,δ は θ,θ' によらぬ constant。

従って条件 (EH_1) が満たされる。

以上により supp μ が compact の場合は、ほぼ $\mu*$ の双曲性に対する完全な定理が得られたといってよい。しかし、これを更に一般の作用素に拡張するにはどうすればよいか？ それを以下で考えよう。この問題は Gårding 教授にお教え頂いた物である。

その示唆と同時に先生は、未発表の論文 [9] をお貸し下さった。ここで先生の御好意と御親切に心から感謝致します。

○ Problem (Gårding) $\mu\in\mathcal{B}$,
supp $\mu\subset\Gamma$ (R^n の proper convex cone) と仮定する。この時 $\mu*E=\delta$, supp $E\subset\Gamma+{}^{\exists}a(1,0\cdots0)$ なる $E(\in\mathcal{B})$ が存在する為の μ の条件を求めよ。

◎ Solution

$\mu \in \mathcal{B}$, supp $\mu \subset \Gamma$ であるから、$\{\mathcal{Q}(\Omega)\}$ の flabbiness (p. 56. Th. 4.4.2.) により $\exists \tilde{\mu} \in \mathcal{Q}(D^n)$ s.t. supp $\tilde{\mu} \subset [\Gamma]^a_{D^n} \underset{\text{Df}}{=} K$, $\mu = \tilde{\mu}$ in $\mathbb{R}^n$ とできる。そこで、このような $\tilde{\mu}$ に対して上のような問題を考えてみよう。即ち、$F \in \mathcal{Q}(D^n)$, supp $F \subset K$ であって、$\tilde{\mu} * F = \delta + \nu$ supp $\nu \subset K \cap S^{n-1}_\infty$ なる F が存在するための条件を求める。

すると supp $\tilde{\mu} \subset K$ ということから、$\langle \tilde{\mu}, e^{-iz\zeta} \rangle \underset{\text{Df}}{=} J(\zeta)$ は $\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}(\Gamma^\circ)^i$ で正則であり、(Ch. I. §5. 参照) そこで $J(\zeta)$ が p. 162 の条件 (EH_1) を満たさねばならぬことは明らかである。

しかし、このように $\tilde{\mu}$ に問題を帰着して、"定理が well-defined" になるであろうか？ 即ち μ の拡張として他の $\tilde{\tilde{\mu}}$ をとった時、$\tilde{\mu}$ が上のような F をもつ時 $\tilde{\tilde{\mu}}$ もやはり $\exists F'$ に対して $\tilde{\tilde{\mu}} * F' = \delta + \nu'$ supp $\nu \subset K \cap S^{n-1}_\infty$ となるであろうか。答は肯定的である。実際

$\mathrm{supp}(\tilde{\mu} - \tilde{\tilde{\mu}}) \subset K \cap S_{\infty}^{n-1}$, $\mathrm{supp}\, F \subset K + a(1, 0 \cdots 0)$ 故 それは明らかである。($\because$ Ch I. §5. Th. 5.1.2. (p.67.) 参照)

(この事実 (or 方法) に思い到ったのは全く Gårding 先生のお蔭である。)

従って μ の一つの拡張 $\tilde{\mu}$ が条件 (EH_1) を満たすことは必要条件である。これが十分条件であることは次のようにして容易に判る。

(簡単の為 $n=1$ としておく。$n \geq 2$ の時への拡張は p.153.～p.155. と全く同様である。)

まず $\tilde{\mu} = \sum \mu_n + \nu_n$　$\mathrm{supp}\,\mu_n \subset \{0 \leq x \leq n\}$ と分解しておく。今

$$E(x) = \int e^{-ix\xi} \Big/ J(\xi)\, d\xi$$ として超函数

$E(x)$ を定める。この意味付けは p.150～p.151. と全く同じである。($\because$ $J(\xi)$ に対し条件 (EH_1) が仮定してあるから。) 条件 (EH_1) により

$\mathrm{supp}\, E \subset \{a \leq x\}$ $(a < 0)$ であることは p.153 と同じ。従って、$\mu * E$ は超函数として well-defined であることにまず

注意しよう。同じく ν_n を $\mathbb{R}$ に制限した $\nu_n^{\mathbb{R}}$ に対しても $\nu_n^{\mathbb{R}} * E$ は well-defined である。明らかに $\mu = \mu_n + \nu_n^{\mathbb{R}}$ である。さて、$\operatorname{supp} E \subset \{a \leqq x\}$ 故 $\Omega_c = \{x < c\}$ として n を十分大きくとれば、$\nu_n * E = 0$ in Ω_c

即ち $\mu * E = \mu_n * E$ in Ω_c

一方 μ_n は compact support (in $\mathbb{R}$) 故 $\langle \mu_n, e^{ix\xi} \rangle \underset{Df}{=} J_n(\xi)$ とする時

$$\mu_n * E = \left[\int \frac{J_n(\xi) e^{-ix\xi}}{J(\xi)} d\xi \right]$$ としてよい。

(p.151 参照) ここで、

$$\mu_n * E - 2\pi\delta = \left[\int \frac{J_n(\xi) - J(\xi)}{J(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi \right]$$

となることに注意しよう。

一方、$\tilde{\mu} - \mu_n = \nu_n$ の support は $\{x \geqq n\}$ に含まれているから、$\forall \varepsilon \; \exists C_\varepsilon \; \eta \geqq \varepsilon|\xi| + C_\varepsilon$ 上で $|J_n(\xi) - J(\xi)| \leqq e^{-(n+a)\eta}$ となる。

従って $\operatorname{supp} E \subset \{a \leqq x\}$ の証明と同じにして、$$\left[\int \frac{J_n(\xi) - J(\xi)}{J(\xi)} e^{-ix\xi} d\xi \right] \underset{Df}{=} G(x)$$

(左辺の意味付けは、$E(x)$のそれと同じ)

の support は $\{ n+a \leq x \}$ に含まれること は容易に判る。従って、aは fixed constant 故 nを十分大きくとれば、$\mu_n * E - 2\pi\delta = 0$ in Ω_c.

従って Ω_c において $\mu * E = \mu_n * E = 2\pi\delta$ ここで cは任意だったから、結局 $\mathbb{R}$全体で $\mu * E = 2\pi\delta$.

従って Eが求めるμの逆作用素である。定理の形にまとめておこう。

Th. 4.3.2. $\mu \in \mathcal{B}$, $\operatorname{supp}\mu \subset \Gamma$ が "hyperbolic" である為の必要十分条件は、μの上のような拡張 $\tilde{\mu}$ に対し、$\langle \tilde{\mu}, e^{-ix\zeta} \rangle \underset{\mathrm{Df}}{=} J(\zeta)$ が p. 162の条件 (EH_1)を満たすことである。この条件は、μの拡張の仕方 (i.e. $\tilde{\mu}$ のとり方に)(結果として)依存しない。

◎注意 Gårding [9] では問題を"原点"に reduce してこの問題が (distribution の場合に) 解かれている。

4.4. Hyperbolic polynomial についての注意

このsubsectionでは、4.1. 及び 4.2で local operator に対して得られた結果, 即ち p.144.に与えた条件(H_1)が $S*$ $(\mathrm{supp}\, S = \{0\})$ の(Def. 4.1.1. の意味での) hyperbolicity の必要十分条件であるという結果が、$S*$が通常の偏微分作用素の場合に何を意味するかに触れておこう。尚、この節の結果は、Schapira 氏も最近得られたとの手紙を受けとった。

Th. 4.4.1. $P(D)$が $(1, 0, \cdots, 0)$ 方向に(Def. 4.1.1.の意味で) hyperbolic.

$\Longleftrightarrow$ $P_m(D)$が $(1, 0, \cdots, 0)$ 方向に hyperbolic (*)

但し $P_m(D)$は $P(D)$の principal part.

(*): p. 175. 注意参照)

◎注意。この結果はdistributionの場合との著しい違いを示す。(distributionの場合には、任意の低階の項を付け加えてもhyperbolicityが保たれには、P_mが strictly hyperbolic である必要があった。たとえば、Hörmander

[18] p.136. Cor. 5.5.2.) 但し、それは、Gevrey class の distribution の場合の結果（Larsson [29]，大矢，Schapira [44] 等）を用いて間接的に示すこともできる。即ち、P_m が $(1,0\cdots 0)$ 方向に hyperbolic なら、適当な Gevrey class の distribution の空間で、P_m+Q に対する基本解が作れるからである。しかし "すべての Gevrey class の distribution の和集合' に対して云々" という表現よりは、(論理的には水増しした結果であるが) "超函数に対して" と表現した方を好む人もあろう。尚、以下の証明は、Hörmander [18] Ch.5. Larsson [29] の修正ないし簡易化である。

Th.4.4.1. の証明は以下に示すいくつかの Propositions から自然に得られる。

Prop. 4.4.2. $P(D)$ が $(1,0\cdots 0)$ 方向に hyperbolic $\Longrightarrow P_m(1,0\cdots 0)\neq 0$

証明] $P_m(\xi)\not\equiv 0$ 故 $\exists \alpha_j\in\mathbb{R}$ s.t.

($P_m(1,0\cdots 0)=0$ と仮定しよう。)

$P_m(1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \neq 0$ としてよい。

$Q(\lambda, \mu) \underset{\mathrm{Df}}{=} P(\lambda, \lambda\mu\alpha_2, \cdots, \lambda\mu\alpha_n)$

$\underset{\mathrm{Df}}{=} \sum_{\nu=0}^{m} \lambda^\nu R_\nu(\mu)$ と置こう。

$R_m(\mu) = P_m(1, \mu\alpha_2, \cdots, \mu\alpha_n) \neq 0$ 故

$Q(\lambda, \mu) = 0$ の解 $\lambda = \lambda_j(\mu)$ を Puiseux 展開

して、(たとえば Hörmander [18] Appendix

参照) $Q(\lambda, \mu) = R_m(\mu) \prod_{j=1}^{m} (\lambda - \lambda_j(\mu))$

但し $0 < |\mu| < {}^\exists\delta$ において

$\lambda_j(\mu) = \sum_{k \geq N_j} a_k^j (\mu^{1/p})^k$

さて今 条件(H_1) により $R_\nu(0) \neq 0$ となる $\nu = \nu_0$ があることに注意しよう。実際、${}^\forall\nu$ に対し $R_\nu(0) = 0$ ならば $Q(\lambda, 0) \underset{\text{by def.}}{=}$

$= P(\lambda, 0, \cdots, 0) \equiv 0$

特に、$\lambda = \sqrt{-1}\,\eta$ $(\eta > 0)$ として、

$P(i\eta, 0 \cdots 0) \equiv 0$ 条件 (H_1) により

$\eta < \varepsilon|\xi| + C_\varepsilon = C_\varepsilon$ 、これは矛盾。

一方、背理法の仮定 $P_m(1, 0 \cdots 0) = 0$ より

$R_m(0) = 0$ 従って ${}^\exists\{\mu_l\}$ $\mu_l \to 0$,

$R_m(\mu_l) \neq 0$ に対して $|R_{\nu_0}(\mu_l) / R_m(\mu_l)| \to \infty$

しかるに $R_{\nu_0}(\mu_\ell)/R_m(\mu_\ell)$ は $\{\lambda_j(\mu_\ell)\}_{j=1}^m$ の基本対称式故. $|R_{\nu_0}(\mu_\ell)/R_m(\mu_\ell)| \to \infty$ となるには $\exists j\ |\lambda_j(\mu_\ell)| \to \infty$ でなければならぬ。

従って その j_0 に対しては. $\lambda_{j_0} \sim a_{N_0}(\mu^{1/p})^{-N_0}$ $(N_0>0)$ と Puiseux 展開はなる。$(a_{N_0} \neq 0)$

今、まず $\mathrm{Im}\, a_{N_0} > 0$ としよう。このとき. $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ として 条件 (H_1) により $\forall \varepsilon\ \exists C_\varepsilon$

$$(\mathrm{Im}\, a_{N_0})\mu^{-N_0/p} < \varepsilon \mu^{1-\frac{N_0}{p}} + C_\varepsilon \quad (\mu \ll 1)$$

即ち $(\mathrm{Im}\, a_{N_0}) < \varepsilon\mu + C_\varepsilon \mu^{N_0/p}$ $\mu \to 0$ として 右辺 $\to 0$ 左辺 $> c > 0$ 故 矛盾。

$\mathrm{Im}\, a_{N_0} = 0$ のときは $e^{\frac{N_0}{2p}\pi\sqrt{-1}} \cdot \mathbb{R}^+$ にそって今と同じ論法を適用すればよい。$\mathrm{Im}\, a_{N_0} < 0$ の時も同様 ($e^{\frac{N_0\pi}{p}\sqrt{-1}} \cdot \mathbb{R}^+$ にそって行う。)

従って いずれにしても. $P_m(1,0\cdots0) = 0$ と仮定すると矛盾が生じる。従って $P_m(1,0\cdots0) \neq 0$

Prop. 4.4.3. P が $(1,0\cdots0)$-方向に hyperbolic (Def. 4.4.1. の意味で) ならば. P_m は (Gårding

の意味で）hyperbolicである。

注意：明らかに、Gårdingの意味でhyperbolic（Gårding [8], Hörmander [18] 等参照）ならDef. 4.4.1. の意味でhyperbolic故、Pが斉次の時、PがDef. 4.4.1. の意味でhyperbolicであることと、Gårdingの意味でhyperbolicであることは、この定理の帰結である。

証明] 前命題により $P_m(1,0\cdots 0)\neq 0$ は出ているから、斉次双曲型多項式の特徴付けにより（Hörmander [18] Th. 5.5.3.）

$\xi\in\mathbb{R}^n$ とに

$$P_m(\xi+i\tau(1,0\cdots 0))=0 \Rightarrow \mathrm{Re}\,\tau=0$$

をいえばよい。P_mの斉次性により $\mathrm{Re}\,\tau\geq 0$ と仮定しておいてよい。このとき

$$0=P_m(\xi+i\tau(1,0\cdots 0))=\lim_{\sigma\to+\infty}\sigma^{-m}P(\sigma\xi+$$

$$+i\sigma\tau(1,0\cdots 0))\ ,\ P_m(1,0\cdots 0)\neq 0 \text{ 故}$$

$\tau(\sigma^{-1})$ は $\sigma\gg 1$ で連続，従って条件

(H_i)により. $\forall \varepsilon$ $\mathrm{Re}\,\tau \leq \varepsilon$ 即ち,
$\mathrm{Re}\,\tau = 0$

Prop. 4.4.4. P_m は $(1, 0, 0 \cdots, 0)$ 方向に hyperbolic であるとする。この時. $(1, 0 \cdots 0)$ の十分近くの N に対しても $P_m(N) \neq 0$ であること (Hörmander [18] Ch. 5, Gårding [8] 等) はよく知られている。この時 任意の $m-1$ 次の微分作用素 Q に対し $P = P_m + Q$ とする。
この時 $P(\xi + i\tau N) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ として,
$|\mathrm{Im}\,\tau| \leq C_N (|\xi| + 1)^{1 - 1/m}$ ここで C_N は N に関して連続にとれる。特に,
P は $(1, 0 \cdots 0)$ 方向に, Def. 4.4.1. の意味で hyperbolic である。

証明は, 殆んど Hörmander [18] p. 148. Lem 5.7.3. のそれと同じだから省略する。極く容易である。

従って Prop. 4.4.2. ~ Prop. 4.4.4. により,

p.171. Th. 4.4.1. の得られることは明らか。

尚, p.172 で触れた "Gevrey class の distribution" における結果はかなり面倒な計算 (Hörmander 流の多項式の比較定理) を必要とする物であることを注意しておく。

4.5. Non-admissible data

我々は 4.1. において hyperbolicity を有限伝播速度の観点から "定義" した。これは Gårding [8] 以来の表現法であるが, それが実際極めてよい定義であることを示すものに F. John の Non-admissible data の理論がある。(F. John [23] 参照) この理論が, 以下に示す形で超函数論でも正しいことを示そう。方法は John の論文そのままといってよいが, 結果は前節 Th. 4.4.1. と合せ考えると, 超函数が, 双曲型作用素の理論の研究に distribution より, よりすぐれている例証とみなせるかも知れない。尚, この

理論は ある "Ideal Theorem"（p.192 参照）がもし正しければ，かなり面白い結果を産むことが判っている。この "Ideal Theorem" の周辺を詳しく調べることは残された重要な課題であろう。

Th. 4.5.1. Pを定数係数の通常の偏微分作用素とする。$P = \prod P_j$ と既約成分に分解した時，どのP_jも N方向に hyperbolic でなく，しかも $\dot{P}_m(N) \neq 0$ とする。（$\dot{P}_m(N) \neq 0$ については p.185 参照）
今 $\{x \mid a < \langle x, N \rangle < b\} \underset{\mathrm{Df}}{=} \Omega$ として，
$P(D)u = 0$ (in Ω), $u \in \mathcal{B}(\Omega)$, supp u 有界，とする。この時 $u \equiv 0$ (in Ω) である。

証明］定理の形から Pは最初から既約としておいてよい。又，$\dot{P}_m(N) \neq 0$ と仮定してあるから，適当に座標軸をとることにより，

$\Omega = \{x \mid -2 < x_n < 2\}$ 又 $P_m(\xi', 0) \neq 0$

と仮定してよい。ここで $\xi' = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$

今 $P(D)u = 0$ かつ $P_m(0, \cdots, 0, 1) \neq 0$ 故，Directional regularity theorem (p.107. Th. 2.1.5.) の Cor (p.109) により，uは

x_nをreal analyticなparameterとする。従って各x_nに値を„specialize"できる。即ち
$u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n^0) \in \mathcal{B}(\Omega \cap \{x_n = x_n^0\})$
ここで定理の仮定により
$u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n^0)$は$(n-1)$変数の超函数としてcompact supportをもつ。
従って$\int \cdots \int u(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)\, e^{-i\langle (x_1, \cdots, x_{n-1}), (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})\rangle} dx_1 \cdots dx_{n-1}$なる積分を考え得る。これを$\hat{u}(\xi', x_n)$と記すことにしよう。
一般にcompact supportの超函数$\theta(x)$に対し$\int \cdots \int \frac{\partial}{\partial x_j}\theta(x)\, dx_1 \cdots dx_n = 0$が成立することから明らかに$P(\xi', D_n)\hat{u}(\xi', x_n) = 0$が成立する。($D_n = 1/\sqrt{-1}\ \partial/\partial x_n$) $P_m(0, \cdots, 0, 1) \neq 0$と仮定したからこの方程式は$D_n$を含む。
そこでJohnに従って

$$R(\xi', \sigma, \tau) \underset{\mathrm{Df}}{=} P(\xi', \sigma) - P(\xi', \tau) \Big/ \sigma - \tau$$

として、

$$W(\xi', \sigma, x_n) \underset{\mathrm{Df}}{=} R(\xi', \sigma, D_n)\, \hat{u}(\xi', x_n)$$

と定めよう。この時、明らかに、

$(D_n - \sigma) W(\zeta', \sigma, x_n)$

$= (P(\zeta', D_n) - P(\zeta', \sigma))\, \hat{u}(\zeta', x_n)$

$= -P(\zeta', \sigma)\, \hat{u}(\zeta', x_n)$　($\because$ $P(\zeta', D_n)\hat{u}$

$=0$ 故）が成立する。よって $P(\zeta', \sigma) = 0$

$\Rightarrow (D_n - \sigma) W(\zeta', \sigma, x_n) = 0$　従って

$P(\zeta', \sigma) = 0$ ならば $W(\zeta', \sigma, 0)$

$= e^{-i\sigma x_n} W(\zeta', \sigma, x_n)$

一方，x_n を fix するごとに，

$$|W(\zeta', \sigma, x_n)| \leq C_\varepsilon (1+|\sigma|)^{m-1} \times e^{\exists M |Im\, \zeta'| + \varepsilon |Re\, \zeta'|}$$

（C_ε は x_n に depend しうる。）が成立することは $u(x_1, \cdots, x_{n-1}; x_n)$ が x_n を fix して，$(n-1)$-変数の超函数として compact support 故明らか；（M は，たかだか diam Ω で押えうる。）　特に $x_n = +1$ or -1 として $P(\zeta', \sigma) = 0$ ならば，

$$|W(\zeta', \sigma, 0)| = |e^{-i\sigma x_n}|\, |W(\zeta', \sigma, x_n)|$$
$$\leq C_\varepsilon (1+|\sigma|)^{m-1} e^{M|Im\, \zeta'| + \varepsilon |Re\, \zeta'| - |Im\, \sigma|}$$

（$Im\, \sigma \geq 0$ のときは $x_n = -1$．$Im\, \sigma < 0$ の時は $x_n = 1$ と選ぶ。）

この事実と P が non-hyperbolic という仮定から，我々は，$W(\zeta', \sigma, 0) \equiv 0$ を示そう。

P が non-hyperbolic 故，Th. 4.4.1. によって，P_m は non-hyperbolic，従って斉次双曲型多項式の characterization により，$P_m(\xi', \sigma) = 0$ は適当な $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して non-real な根 σ を持つことに注意して，代数学の（多項式に関する）初等的な議論により，$P(\zeta', \sigma) = 0$ かつ $\zeta' = \tau\xi' + \eta'$ として $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$，$\eta' \in \mathbb{C}^{n-1}$ が次の条件 i)〜iii) を満たすようにとれる。（η' は general position としてよい。）証明は Hörmander [18] p.143. 及び，Appendix 参照。

i) $P(\eta', \sigma) = 0$ は σ についての次数と同じだけの単根をもつ。

ii) $P_m(\xi', 0) \neq 0$ かつ $P_m(\exists c_0 \xi', 1) = 0$

　但し．$\mathrm{Im}\, c_0 \neq 0$　（ここで，$P_m(\zeta', 0) \neq 0$ と座標軸をとっておいたことを用いた。）

iii) $P(\tau\xi' + \eta', \sigma)$ は (τ, σ) の多項式とし

して既約.

従ってここで $\tau = w\sigma$ とすれば 仮定より

$P(w\sigma\xi' + \eta', \sigma) = 0$ 従って

$$P_m(w\xi' + \eta'/\sigma, 1) + 1/\sigma\, P_{m-1}(w\xi' + \eta'/\sigma, 1)$$
$$+ \cdots + (1/\sigma)^m P_0(w\xi' + \eta'/\sigma, 1) = 0$$

(P_j は P の j 次斉次な部分.) ここで

条件 ii) により $P_m(w\xi', 1) \not\equiv 0$, $P_m(c_0\xi', 1) = 0$

故 $w = \sum_{j \geq 0} c_j (\sigma^{-1/p})^j$ と Puiseux 展開

される。(Hörmander [18] Appendix) 従って

$\tau = \tau(\sigma) = \sigma \sum_{j \geq 0} c_j (\sigma^{-1/p})^j$ なる解を
$(|\sigma|^{1/p} \geq {}^{\exists}R)$

$P(\tau\xi' + \eta', \sigma) = 0$ は持つ。

又. 条件 iii) から (τ, σ) はある連結な Riemann 面を作っていることに注意しておこう。

さて. $\tau = \tau(\sigma)$ を上のような展開をもつものとすれば. $|\tau|/|\sigma| \leq {}^{\exists}C$ 故.

$F(\sigma) \underset{\text{def}}{=} W(\tau(\sigma)\xi' + \eta', \sigma, 0)$ と定める時.

$F(\sigma)$ は $|\sigma| > R^p$ で exponential type

である。更に $\mathrm{Im}\, c_0 \neq 0$ 故

$M|\xi'|\,|\mathrm{Im}(c_0 e^{i\theta})| < |\sin\theta|/3$ となる θ

を見つけることができる。もちろんそのような θ はある open set 全体を動きうる。又 $|\mathrm{Re}(c_0 e^{i\theta})| \leq |c_0|$ 従って ε を十分小さくとれば

$|F(re^{i\theta})| \leq C e^{-r|\sin\theta|/3}$ が p.180 の $|W(\xi',\sigma,0)|$ に対する評価から成立する。しかるに上のような θ に対して $\theta+\pi$ も同じ条件を満たすことは明らかであり、しかも θ がある open set を動きうることから Phragmen-Lindelöf の定理により、$|F|$ は $|\sigma^{1/p}| > R$ で有界。

従って $F(\sigma) = \sum_{j\geq 0} a_j (\sigma^{-1/p})^j$ しかるに

上の評価により F はある方向には exponential で decay するから、$a_j \equiv 0$ $(\forall j)$ でなければならない。従って $F(\sigma) \equiv 0$

しかるに $\{(\tau,\sigma) \mid P(\tau\xi'+\eta',\sigma)=0\}$ は連結な Riemann 面であることを注意しておいたから、結局

$$P(\tau\xi'+\eta',\sigma)=0 \implies W(\tau\xi'+\eta',\sigma,0)=0$$

よって特に $\tau=0$ として、

$$P(\eta',\sigma)=0 \Longrightarrow W(\eta',\sigma,x_n)$$
$$\left(\underset{\text{by def.}}{=} e^{i\sigma x_n} W(\xi',\sigma,0)\right)=0$$

一方、η' についての条件 i) (p. 181.) により、
$P(\eta',\sigma)$ は η' を fix して σ について単根
$\sigma_1\cdots\sigma_k$ をもつから、

$R(\eta',\sigma_j,\sigma)=P(\eta',\sigma)-P(\eta',\sigma_j)\big/\sigma-\sigma_j$
は次数が k より小さい σ の多項式全体の base になる。よって

$W(\eta',\sigma,x_n)=R(\eta',\sigma_j,D_n)\hat{u}(\eta',x_n)$
$=0$ より、$D_n^j\hat{u}(\eta',x_n)=0$ $(j<k)$

特に $\hat{u}(\eta',x_n)=0$ これが general position の η' $(\in\mathbb{C}^{n-1})$ について成立するから
$\hat{u}(\eta',x_n)\equiv 0$ ($\because$ x_n fix して $\hat{u}(\eta',x_n)$ は η' について entire) 故に x_n を fix して
$u(x',x_n)=0$ しかるに $u(x',x_n)$ は
x_n を fix して compact support (今、更に強く適当にある $\prod_{j=1}^{n-1}K_j$ の形の compact set 内に support をもつとしてよい。) 従って $u(x',x_n)$

の定義函数 $\varphi(z', x_n)$ は $x_n \in {}^{\exists} I\,(\text{open})\,(\subset \mathbb{R})$
に対して、たとえば z_1 平面内で正則となる。
$(\because\ u(x', x_n) = 0)$ 従って Cauchy の
積分公式と一致の定理により、
$\varphi(z', x_n)$ は $-2 < x_n < 2$ において
z_1 平面内で正則，特に $u(x', x_n) = 0$ は
n 変数の超函数として $\equiv 0$.
$\therefore\ u(x', x_n) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega$

◎注意 $P_m(N) = 0$ だったとしよう。このとき、
もし ${}^{\exists} N_j$ s.t. $N_j \longrightarrow N$, $P_m(N_j) \neq 0$ かつ
P は各 N_j について non-hyperbolic，となる
なら、上の証明により定理は正しい。又、もしそう
でなかったとすると、$\Gamma(P, N_j) \underset{\text{def}}{=} (\{\vartheta \mid P_m(\vartheta) \neq 0\}$
の N_j を含む成分) と定めると、これは open
かつ convex，(双曲型多項式の一般論)。しかも
$N \in [\Gamma(P, {}^{\exists} N_j)]^a$ であり、このような形の集合が
N の近傍から $P_m(\xi) = 0$ なる部分をとりさった
所を埋めつくすことになってしまう。これは
$\Gamma(P, N_j)$ の凸性により，$P_m(\xi)$ が ξ の一次函

数(実係数)の積に分解される場合にしか起り得ない。即ち定理で $P_m(N) \neq 0$ を落してもここ迄はしぼれる。上に除いた場合にも定理が成立するであろうことはもっともらしいが未だ証明できない。

§5 Problem of unique continuation
(佐藤の基本定理の系について。)

この節の内容は、佐藤[43]により得られた基本定理から一連の一意性定理がたちどころに従うことを注意するのみで、特に original な部分はない。ただ前節4.5.の結果がある大域的な一意性定理を意味することに鑑み、その結果その物が成立つということ自身は重要であると考えられるので、ここにまとめておく。

5.1. Holmgren の定理とその周辺

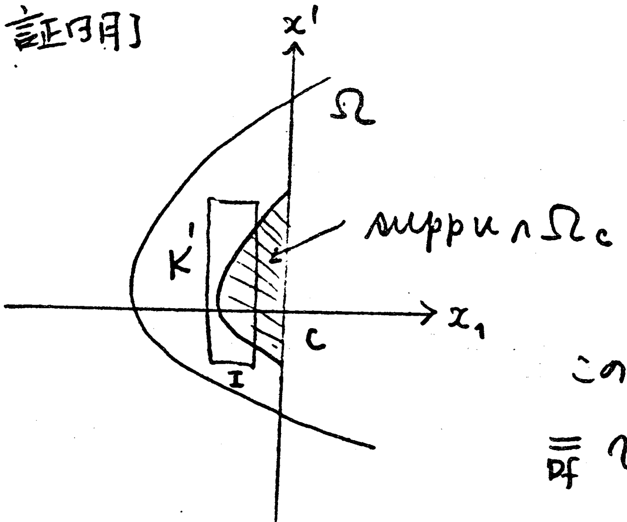
我々の理論の出発点となるのは、次の„佐藤の基本定理"である。

Th. 5.1.1. (佐藤) $P(x, D)$ を通常の偏微分作用素(実解析的係数)かつ考える領域 Ω 内で $P_m(x, (1, 0\cdots, 0)) \neq 0$ と仮定する。(P_m: Pの principal part) この時 $P(x, D)u = 0$ ($u \in \mathcal{B}(\Omega)$) を満たす u は、x_1 を real analytic parameter とする。

証明は、佐藤[43]を参照。

系.(Holmgren) Ω において $P_m(x,(1,0\cdots,0))$ $\neq 0$ と仮定する。この時、$u\in\mathcal{B}(\Omega)$ に対し、
$P(x,D)u=0$ in $\Omega\cap\{x_1<c\}$ $(\underset{\mathrm{Def}}{=}\Omega_c)$
とし、更に、$\operatorname{supp}u\cap(\Omega\cap\{x_1<c\})$ が Ω 内で relatively compact とすれば、
$u\equiv 0$ in $\Omega\cap\{x_1<c\}$

証明]



今 $\varphi(x')$ を $x_2,\cdots,x_n$ についての任意の正則函数とする。
この時 $u(x_1,x')\varphi(x')$ $\underset{\mathrm{Def}}{=} v(x_1,x')$ を考えれば、
定理により、これは x_1 を real analytic な parameter とする。今 I を $\mathbb{R}^1$ の開区間とし、$K'\supset\bigcup_{x_1\in I}\operatorname{supp}_{x'}u(x_1,x')$，但し、ここで $\operatorname{supp}_{x'}u(x_1,x')$ とは、$u(x_1,x')$ を $x_1=x_1$ に specialize して得た $(n-1)$ 変数の超函数の support の意であり、更に、$I\times K'\Subset\Omega$ とする。この時 上に述べた事実から

$\theta(x_1) \underset{\mathrm{Df}}{=} \underbrace{\int \cdots \int}_{n-1} v(x_1, x')\,dx'$ は real analytic である。従って $\inf\{x_1 \mid x_1 \in \mathrm{pr}_1 \operatorname{supp} u\} \underset{\mathrm{Df}}{=} c_0$ として c_0 の十分小さな ($\mathbb{R}^1$ での) 近傍 I において $\forall x_1 \in I$ に対し $\theta(x_1) \equiv 0$ ($\because$ $x_1 < c_0$ ならば $\varphi(x_1) \equiv 0$ 故、一致の定理) 一方、仮定から $\forall c' < c$ に対し $\operatorname{supp} u \wedge \{x_1 \leqq c'\}$ は有限個の $I \times K'$ 型の集合で覆われることにより、

$\theta(x_1) \equiv 0 \quad (x_1 < c)$

従って これが任意の $\varphi(x')$ に対して成立つことから (x_1 を fix して) $u(x_1, x') = 0$ (($n-1$)変数の超函数として。) ($\because$ K を $\mathbb{R}^n$ 内の任意の compact set とする時、容易に判るように、$\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ は $\mathcal{O}(K)$ で dense である。たとえば、小松[28] p. 203. 参照)

従って p. 185. と同様にして $u(x) \equiv 0$ in Ω_c (n 変数の超函数として。)

○ 最近、Schapira 氏も Holmgren の定理

を得た旨の手紙を受けとった。多分この形で証明されたのだと思う。但し、証明はもっと Hörmander [18] Ch.5. に近い物であろう。

これを通常の Holmgren 変換を用いて言いかえれば;

系′ φ を real-valued の $C^{\omega}(\Omega)$ の函数とし更に $P_m(x^0, \mathrm{grad}\,\varphi(x^0)) \neq 0$ が $x_0 \in \Omega$ で満たされるなら、x^0 の近傍 Ω' であって、P の Ω での超函数解 u で $\varphi(x) > \varphi(x^0)$ では 0 になっている物は必らず、Ω' 全体で 0 になる，というような性質をもつ物が存在する。

証明はよく知られているから省略する。

更に この系から次の2つの定理が成立することは、Hörmander [18] と全く同じである。証明については、Hörmander [18] p.126. ~p.129. を参照

Th. 5.1.2. φ を real-valued の $C^\omega(\Omega)$ の函数とし P は principal part が real coefficient であるとする。今 $x^0 \in \Omega$ において $\operatorname{grad}\varphi(x^0) \stackrel{=}{\text{def}} N^0 \neq 0$, $P_m(x^0, N^0) = 0$ であり更に

$$\sum_{j,k} \partial^2\varphi(x^0)/\partial x_j \partial x_k \, P_m^{(j)}(x^0, N^0) \cdot$$

$$\cdot P_m^{(k)}(x^0, N^0) + \sum_k P_m^{(k)}(x^0, N^0) P_{m,k}(x^0, N^0)$$

>0 が成立するとする。($P_m^{(j)} \stackrel{=}{\text{def}} \partial P_m/\partial \xi_j$, $P_{m,j} \stackrel{=}{\text{def}} \partial P_m/\partial x_j$) この時 x^0 は前系に言う Ω' を持つ。

Th. 5.1.3 Pを定数係数とする。この時 Ω_1, Ω_2 を２つの凸開集合, $(\Omega_1 \subset \Omega_2)$ として $H_\xi \stackrel{=}{\text{def}} \{\langle x, \xi\rangle = 0\}$ と定める時 $P_m(\xi) = 0$ なる任意の ξ に対して

$H_\xi \cap \Omega_2 \neq \phi \Rightarrow H_\xi \cap \Omega_1 \neq \phi$ が成立するならば, $P(D)u = 0$, $u \in \mathcal{B}(\Omega_2)$ かつ $u = 0$ in Ω_1 なるuは Ω_2 で恒等的に零となる。

尚．この方面では．次の Ideal Theorem が成立つかどうかは極めて興味深い問題であると考えられる。

Ideal Theorem： $P(x,D)u=0$， $P_m(x,(1,0\cdots 0)) \neq 0$ （原点の近傍で）この時．佐藤の基本定理 5.1.1. により u の $x_1=0$ への specialization $u(0,x')$， $\frac{\partial}{\partial x_1}u\Big|_{x_1=0}$ ，$\cdots$，$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m u\Big|_{x_1=0}$ が考えれる。もし．これが．これらがすべて 0 であるなら、 u は原点のある近傍で 0 であろうか？

尚．これに関して．一般に． $u(x_1,x')$ が x_1 を complex holomorphic parameter としていて．しかも． $u(0,x')=\frac{\partial}{\partial x_1}u\Big|_{x_1=0}=\cdots\cdots=$ $=\left(\partial/\partial x_1\right)^l u\Big|_{x_1=0}=\cdots\cdots=0\ (\forall l)$ となっており．しかも． $\underbrace{u\neq 0}_{(\text{near } 0)}$ なる例の存在することが佐藤先生により知られていることに注意しておこう。（未発表） 従って上の Ideal Theorem

が成立するかどうかは、微分方程式論の立場から極めて重要である。

最後に本論からはずれるが、Th. 5.1.1. は、いままで述べて来た所からもよく判るように、所謂 "time-like な curve 上での積分" の正則性とも密接に関係していることを注意しておく。それらに関する物は、残念ながら未だ"定理のための定理"というべき物しか結果として得ていないので、ここには省略する。

◎追加：(1970, 4.) Ideal theorem は Th. 5.1.1. から明らかに正しいことを柏原君に御注意頂きました。従って次の形に Th. 4.5.1 の結論を精密化できる。

Th. 4.5.1′ : Th. 4.5.1 の仮定のもとで、$u\big|_{\langle x, N\rangle=0}$ が compact support をもつなら $u\big|_{\langle x, N\rangle=0} \equiv 0$ が成立する。

文　献

1] G. Bengel, Régularité des solutions hyperfonctions d'une équation elliptique, C. R. Acad. Sc. Paris, 262 ('66) 569–570

2] J. Boman, On the propagation of analyticity of solutions of differential equations with constant coefficients, Ark. för Math. 5 ('64) 271–279

3] T. Carleman. L'integrale de Fourier et question qui s'y rattachet Uppsala ('44)

4] L. Ehrenpreis Mean periodic functions I. Amer. J. of Math. 77 ('55) 293–328

5] ——, General theory of

elliptic equations, Proc. Nat. Acad. of Sci. 42 ('56) 39-41

6] ———, Solutions of some problems of division IV Amer. J. Math. 82 ('60) 522-588

7] ———, ——— V Ibid 84 ('62) 324-348

8] L. Gårding, Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta. Math. 85 ('50) 1-62

9] ———, Hyperbolic convolution operators (to appear)

10] ———, 双曲型方程式の lacuna

について (to appear ; 東大セミナリーノート)

11] —— et B. Malgrange. Opérateurs différentiels partiellement hypoellip. et partiellement elliptiques, Math. Scand. 9 ('61) 5-21.

12] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris ('58)

13] H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, Ann. Math., 68 ('58) 460-472

14] A. Grothendieck,

15] R. Harvey, Hyperfunctions and partial differential equations, Thesis, Stanford Univ.

16] L. Hörmander, On the division of distribution by polynomials, Ark. för Math. 3 ('58) 555-568

17] ———, On the range of convolution operators, Ann. of Math. 76 ('62) 148-170

18] ———, Linear Partial Differential Operators, Springer, Berlin, ('63)

19] ———, L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta. Math. 113 ('65) 89-152

20] ——, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. Van Nostrand, Princeton, ('66)

21] 一松 - 森口 - 宇田川, 数学公式 II 岩波, 東京, ('65 : 第5刷)

22] F. John, The fundamental sol. of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, Comm. P. A. M. 3 ('50) 273-304.

23] ——, Non-admissible data for differential equations with constant coefficients. ——, 10 ('57) 391-398

24] ——, Continuous dependence on data for solutions of partial

equations with a prescribed boundo
Comm. P. A. Math. 13 ('60) 551–585

25] M. Kashiwabara ; 数理研シンポジウム
報告集 ('69)

26] H. Komatsu , Projective and
injective limits of weakly
compact sequences of locally
convex spaces, J. of Math. Soc.
of Japan. 19 ('67) 366–383

27] ——— , Resolutions by
hyperfunctions of sheaves of
solutions of differential equations
with constant coefficients, Math.
Annalen, 176 ('68) 77–86

28. ——— , 佐藤の超函数と定数
係数線形偏微分方程式 (東大セミナリー・

)-k. 22) ('68)

29] E. Larsson, Generalized hyperbolicity, Ark. för Math. 7 ('67)

30] J. Leray. Hyperbolic Differential Equations, Princeton-Lecture Note ('52)

31] Levin. Distributions of zeros of entire functions A.M.S. translation Providence ('64)

32] E. Lindelöf, Sur les fonctions entières d'ordre entier, Ann. Sci. École Norm. Sup. 22 ('05) 369-395

33] B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, 6 ('55) 271-355

34] ———, Faisceaux sur des variétés analytiques réelles Bull. Soc. Math. Fr. 83 ('57) 231-237

35] ———, Sur la propagation de la regularité des solutions des equations à coefficients const. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumanie 3. ('59) 433-440

36] A. Martineau, Les hyperfonctions de M. Sato, Sem. Bourbaki, 13 ('60) No. 214.

37] ——, Sur les fonctionelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. d'anal. Math. 9 ('63) 1-164

38] ——, Distribution et value au bord des fonctions holomorphes Proc. International Summer Course at Lisbon. ('64)

39] F. Pham, Bros, et Itzykson, Representations intégrales de fonctions analytiques et formule de Jost-Lehmann-Dyson, Ann. Inst. Henri Poincaré, V ('66) 1-35.

40] G. Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Z. 29. ('29) 549-640

41] M. Sato, 超函数の理論について
数学 10-1 ('58) 1-27

42] ——, Theory of hyperfunctions
II. J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo,
8 ('59) 387-436

43] ——, 層 $\mathcal{C}$ について.
堅田シンポジウム報告集 (to appear)

44] P. Schapira. Sur les ultradistributions
Ann. Éc. Norm. Sup 4^e serie t. 1.
('68) 395-415

45] ——, Équations aux
dérivées partielles dans l'espace
des hyperfonctions. Sem. P. Lelong
Springer Lecture Note 71 ('68)

46] ——, Elliptic boundary value problems (to appear).

47] G. Valiron. Sur les solutions des équations differentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants, Ann. École Norm. Sup. 46 ('29) 25-53.

48] H. Komatsu: Elliptic boundary value problems ('69 函数解析国際会議報告集)