数理解析研究所講究録
第108巻 1971年 303-328

多価函数の積分

東大·理　青本和彦

§1. 線型微分方程式の解や特殊函数など

には複素多価函数及びその有限の積分として書き表わされるものがある. 例えば古典的な Euler の積分

$$(1.1) \qquad \int (x-t)^{\sigma} \varphi(t)\, dt$$

は Gauß の超幾何函数の積分表示を与えた. 多価函数のある族を対象とする微分積分学を代数的に組み立てることを一つの問題とすることができる。ここではある仮定の下でそれが局所系(système local)及びその無限小表示である局所坦な接続(connexion localement plate)を用いることによって実行されうることを述べ 簡単な場合にその積分路を計算する.

§2. 今 V をコンパクトな複素多様体とするとき V 上に $n\times n$ の [redacted] 複素行列環 $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ (これは一般に複素 Lie 環に拡大される)に値を持つ有理型 1-form ω で局所坦なもの : $d\omega+\omega\wedge\omega=0$ を想定する.

このとき線型の完全積分可能な方程式

$$(2.1) \qquad du = u\cdot\omega \qquad\qquad u=(u_1,\cdots,u_n)$$

の基本解を $Y(x)$ とする: $dY = Y\cdot\omega$

ω の polar support S は V の中で codim 1 の解析的集合である. 今 $\Omega^r(V,*S)$ でもって S にのみ pole を持つ V 上のベクトル値有理型 r-form 全体を書くならば テンソル積 $Y\otimes\Omega^r(V,*S)=\Omega^r(V,*S\,;Y)$ は ある V上の多価函数の族を与える. 今任意の $\Omega^r(V,*S)$ の元 φ に対して $\psi=Y\varphi \in \Omega^r(V,*S\,;Y)$ であるが 外微分をとれば $d\psi = dY\cdot\varphi + Y\cdot d\varphi = Y(\omega\wedge\varphi+d\varphi)$ で $\omega\wedge\varphi+d\varphi \in \Omega^r(V,*S)$ であるから 外微分 d は

$$(2.2) \qquad d:\ \Omega^r(V,*S\,;Y)\longrightarrow\Omega^{r+1}(V,*S\,;Y)$$

或いは $\delta(\varphi)=\omega\wedge\varphi+d\varphi$ は

$$(2.3) \qquad \delta:\ \Omega^r(V,*S)\longrightarrow\Omega^{r+1}(V,*S)$$

明らかに　$dd=0$, $\delta\delta=0$ であるから　これによって De Rham Cohomology が定義される。これをそれぞれ
$\mathcal{H}(V,*S;Y)=\sum_{r=0}^{\infty}\mathcal{H}^r(V,*S;Y)$,
$\mathcal{H}(V,*S;\omega)=\sum_{r=0}^{\infty}\mathcal{H}^r(V,*S;\omega)$ で表わそう。
明らかに

(2.4) $$\mathcal{H}(V,*S;Y)\cong\mathcal{H}(V,*S;\omega)$$

且つ $\mathcal{H}^r$ は $r>l=\dim V$ に対しては 0.

函数 $Y(x)$ は基本群 $\pi_1(V-S)$ から $GL(n,\mathbb{C})$ への線型表現 ρ (モノドロミー) を引き起す。$V-S$ の普遍被覆空間を $\widetilde{V-S}$ とするとき $\widetilde{V-S}$ 上の n 次元ベクトル値の函数又は form で $\pi_1(V-S)$ の作用によって ρ-型の変換をするゼータズックス函数の族全体 $\widetilde{\Omega}(V-S;\rho)$ は d によって不変であるからこの De Rham cohomology が考えられる。これを $\widetilde{\mathcal{H}}(V-S;\rho)=\sum_{r=0}^{\infty}\widetilde{\mathcal{H}}^r(V-S;\rho)$ とおく。$\widetilde{\mathcal{H}}^r(V-S;\rho)=0$ $(r>l)$ は明らか。さてこのとき Deligne によれば

定理 1 (Deligne)　$\mathcal{H}^r(V,*S;Y)\cong\widetilde{\mathcal{H}}^r(V-S;\rho)$

（これは $\omega=0$ のとき Grothendieck によってすでに証明されている'比較定理'の一系）．

$\tilde{\mathcal{H}}^r(V-S;\rho)$ はさらに $V-S$ が Stein 多様体ならば局所系を係数とするコホモロジーと同型である．以後我々はいつも $V-S$ が Stein であると仮定する．実際以後は V を l 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^l$ にとるからよいのである．

V が 1 次元の Riemann 面で S がいくつかの点からなっているときは $\tilde{\mathcal{H}}^1(V-S;\rho)$ は $\pi_1(V-S)=\Gamma$ の表現 ρ を作用域にもつコホモロジー $H^1(\Gamma;\rho,\mathbb{C}^n)$ と同型であるからコホモロジーの計算は Γ のみで定まってしまう．その計算も比較的簡単である。

例 $V=\mathbb{P}^1$， $S=\{a_1,\cdots,a_m,\infty\}$ とする．$V-S$ の base point を 0 とし 0 から出発する各 a_i をまわるひもの $\pi_1(V-S)$ の元を γ_i $(1\leqq i\leqq m)$ とする．このとき $\pi_1(V-S)=\Gamma$ は $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}$ によって生成される自由群である．Γ の ρ-表現は各 γ_i の対応する行列 $\Theta_i\in GL(n,\mathbb{C})$ を与えればよいわけである．このとき Γ の ρ コホモロジー $H^1(\Gamma;\rho,\mathbb{C}^n)$ は各 Θ_i-1 をたてに並べた $mn\times n$ の行列

$$(2.5)\qquad \begin{pmatrix} H_1 - 1 \\ H_2 - 1 \\ \vdots \\ H_m - 1 \end{pmatrix}$$

の kernel に等しい。特に例えば $n=1$ とし

$$(2.6)\qquad Y(x) = (x-a_1)^{\lambda_1} \cdots\cdots (x-a_m)^{\lambda_m}$$

~~$\varkappa_i = e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_i} \neq 1$ と仮定~~ ととれば積分

$$u = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \xi_i\,(x-a_1)^{\lambda_1} \cdots\cdots (x-a_m)^{\lambda_m}\,dx \qquad (\xi_i \in \mathbb{C})$$

は $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{C}^m$ が $H_1(\Gamma; \rho)$ の元

いいかえれば

$$(2.7)\qquad \sum_{i=1}^{m} (\varkappa_i - 1)\,\xi_i = 0 \qquad \left(\varkappa_i = e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_i}\right)$$

のときのみ意味を持つ。 $H_1(\Gamma; \rho)$ は $H^1(\Gamma; \rho)$ と双対で $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ がすべて 1 のときはその次元は m , それ以外では $(m-1)$ である。

これは $a_1, a_2, \cdots, a_m$ の函数として超幾何函数の一例である。

§3. $V=P^l$ のときに具体的に積分路(サイクル)を構成することはできないか？周知のように斉質次の常数係数の双曲型微分作用素においては具体的にサイクルの構成が可能(Leray, Gårding, Bott, Atiyah)になった。これはもっと一般の常数係数の作用素でも可能~~であることは~~であろうか？ これは一見複素領域の問題提起のように思われるが実はそうではない。'原理的に可能である' というのでは答にはならない。具体化が可能かどうか？ 以下にみるある例でもわかるように この問題には 'ある reality の問' が深くかかわっていると思われる。これは恐らく P^l-S の基本群の型を決める上で問題になることと思われる。

さて高次元のサイクルを低次元のセル特に1次元のセルから組立てることができないか？を一つの計画とすることができる。今 f を X から Y への surjective な正則写像とするときこれにかかわるスペクトル列を完全に明らかにできれば X のコホモロジー(或はホモロジー)は Y と $f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ のそれで計算できる。特に $f^{-1}(y)$ が1次元ならば計算は1次元低い Y に還元される。Y についてさらに同じことを繰り返すという操作をやってゆけば すべては

1次元のコホモロジー(又はホモロジー)に帰着せしめられる.
今1次元の Riemann 面 の集合 $\{X_1, X_2, X_3, \cdots\}$
を用意し そのコホモロジー の集合

$$(3.1) \qquad H^1(X_1; H^1(X_2; H^1(X_3; \cdots\cdots)\cdots)))$$

と 夫れらの間の写像の集合

$$(3.2) \quad \tau_{XY} : H^1(X_1; H^1(X_2; H^1(X_3; \cdots)\cdots))) \to$$
$$\to H^1(Y_1; H^1(Y_2; H^1(Y_3; \cdots)\cdots)))$$

とから得られる交錯した回路網の通信関係を調べることに帰着されよう. 以下 $V = \mathbb{P}^l$; S は超曲面とする. 我々の道具はスペクトラル列, Leray, Thom Gysin の ホモロジー完全列及び 基本群を求める定理 (Zariski-Van Kampen) である。

以下 $l = 2$ とする. $\hat{X} = \mathbb{P}^2 - S$. 0 を $\hat{X}$ の base point とし $X = \mathbb{P}^2 - S - \{0\}$ とおく. $\mathbb{P}^2 - \{0\}$ は $\mathbb{P}^1$ を base space (これを $\hat{Y}$ で表わす) とする line bundle である。写像 $\pi : X \to \hat{Y}$ (射影) の branch points の $\hat{Y}$ の中への 像を $b_1, b_2, \cdots$

b_Nとする. $\pi^{-1}(y)$ $(y \in \hat{Y}-\{b_1,\cdots,b_N\})$ (general fibre) を F で表わせば F は $\mathbb{P}^1$ から $\{a_1, a_2, \cdots, a_m, \infty\}$ (m は S の次数) をのぞいた空間である. $X_i^{(1)} = \pi^{-1}(b_i)$, $X^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{N} X_i^{(1)}$ とおく. 今 $\hat{X}$ の基本群 $\pi_1(\hat{X})$ のある線型表現 ρ, その実現されるベクトル空間 (n次元) を A とおくとき A を局所係数とする $\hat{X}$ のホモロジー群 $H_p(\hat{X}; A)$ が定義される. このとき自然に $H_p(X-X^{(1)}; A)$, $H_p(X^{(1)}; A)$, $H_p(F; A)$ などが定義されている. $X^{(1)}$ のまわりでは A には $\pi_1(X-X^{(1)})$ は trivial に働らく. 故に Leray の完全系列が適用される:

$$
(3.3)\quad
\begin{cases}
\xrightarrow{\delta_2} H_3(X-X^{(1)}; A) \xrightarrow{i_3} H_3(X; A) \xrightarrow{\varpi_3} H_1(X^{(1)}; A) \xrightarrow{\delta_1} \\
\xrightarrow{\delta_1} H_2(X-X^{(1)}; A) \xrightarrow{i_2} H_2(X; A) \xrightarrow{\varpi_2} H_0(X^{(1)}; A) \xrightarrow{\delta_0} \\
\xrightarrow{\delta_0} H_1(X-X^{(1)}; A) \xrightarrow{i_1} H_1(X; A) \xrightarrow{\varpi_1} \{0\}
\end{cases}
$$

さて一般に M が Stein ならば局所係数 A のホモロジー $H_p(M; A)$ は $p \geqq \dim M+1$ のとき 0.

$\hat{X}$, $X - X^{(1)}$ は Stein である．よって $H_3(X;A)$ は 0 のまわりの tubular boundary cycle より生成される．すなわち

$$(3.4) \qquad H_3(X;A) \cong A$$

さらに $X^{(1)} = \bigcup_{i=1}^{N} X_i^{(1)}$ (disjoint) から

$$(3.5) \qquad \begin{cases} H_1(X^{(1)};A) = \sum_{i=1}^{N} \oplus H_1(X_i^{(1)};A), \\ H_0(X^{(1)};A) = \sum_{i=1}^{N} \oplus A^{\pi_1(X_i^{(1)})} \end{cases}$$

（A^{Γ} は A の Γ－不変な元全体）である．又明らかに

$$(3.6) \qquad \begin{cases} H_i(\hat{X};A) \cong H_i(X;A) & (2 \geqq i \geqq 0) \\ H_p(\hat{X};A) = \{0\} & (p \geqq 3) \end{cases}$$

それ故 $H_i(X - X^{(1)};A)$ が計算されれば $\hat{H}_i(X;A)$ が完全に求まる．よく知られているようにうまいスペクトラル列 $E^i_{p,q}$ が存在して

(3.7) $$E^2_{pq} \cong H_p(Y; H_q(F; A))$$

ここで $Y = \hat{Y} - \{b_1, b_2, \cdots, b_N\}$. 且つ E^2_{pq} は $p \geqq 2$ 又は $q \geqq 2$ ならばつねに 0. よって

(3.8) $$E^2_{1,1} \cong E^3_{1,1} \cong \cdots \cong E^\infty_{1,1} \cong H_2(X - X^{(1)}; A)$$

すなわち

<u>Prop 1.</u> $H_2(X - X^{(1)}; A) \cong H_1(Y; H_1(F; A))$.

同じく

(3.9) $$\begin{cases} E^2_{1,0} \cong E^3_{1,0} \cong \cdots \cong E^\infty_{1,0} \cong \dfrac{H_1(X - X^{(1)}; A)}{\mathcal{G}_0} \\ E^2_{0,1} \cong E^3_{0,1} \cong \cdots \cong E^\infty_{0,1} \cong \mathcal{G}_0 \end{cases}$$

ここで $H_1(X - X^{(1)}; A) \supset \mathcal{G}_0 \supset \{0\}$ はこのスペクトラル列が定める $H_1(X - X^{(1)}; A)$ の filtration である. これより

<u>Prop 2.</u> $H_1(X - X^{(1)}; A) \cong H_1(Y; A^{\pi_1(F)}) \oplus H_1(F; A)^{\pi_1(Y)}$.

<u>Prop 3.</u> $H_0(X - X^{(1)}; A) \cong A^{\pi_1(X - X^{(1)})} = A^{\pi_1(F)}$

なんとなれば $\pi_1(\hat{X})$ の生成元は $\pi_1(F)$ から引き出されることが Zariski-Van Kampen の定理からわかるから．

我々は $H_1(Y;H_1(F,A))$ を求めればよいことになった．そのためには $\pi_1(Y)$ が $H_1(F,A)$ に働らくようを明らかにせねばならない．S が一般の曲線のときに一般の法則を求めることが可能であろうか？ 以下 S が 'real' でしかも直線集合に近いときに計算する．

まず次の積分の場合を考える．

$$(3.10)\quad \iint(\alpha_1x+\beta_1y+\xi_1)^{\lambda_1}(\alpha_2x+\beta_2y+\xi_2)^{\lambda_2}\cdots(\alpha_mx+\beta_my+\xi_m)^{\lambda_m}dx\,dy$$

すなわち S は $(m+1)$ 個の直線 $L_i\ (0\leqslant i\leqslant m)$ の和：
$S=\bigcup_{i=0}^{m}L_i$ でしかもすべての L_i は互いに横切るものとし且つ L_i は実線であるとする．$\lambda_i\ (1\leqslant i\leqslant m)$ は

$$(3.11)\quad \begin{cases} \varkappa_i=e^{2\sqrt{-1}\pi\lambda_i}\neq 1 \\ \varkappa_1\cdots\varkappa_m\neq 1 \end{cases}$$

をみたすものとする。さらに L_i の相互位置関係について次のことを仮定する：

（仮定）L_i と L_j とが横切る点 (L_iL_j) は あるアフィン

座標(x', y')について　各L_iはy'軸と次の順序で交わる：

$$-\infty < (L_1 y') < (L_2 y') < \cdots < (L_{m+1} y') < \infty \tag{3.12}$$

（但$L_0 = L_{m+1}$とおく）

さらに　$(L_i L_j)$のx'座標について

$$\left\{\begin{aligned} &c > (L_1 L_2) > (L_1 L_3) > \cdots > (L_1 L_m) > (L_1 L_{m+1}) > \\ &> (L_2 L_3) > \cdots > (L_2 L_{m+1}) > \cdots > (L_m L_{m+1}) > -\infty \end{aligned}\right. \tag{3.13}$$

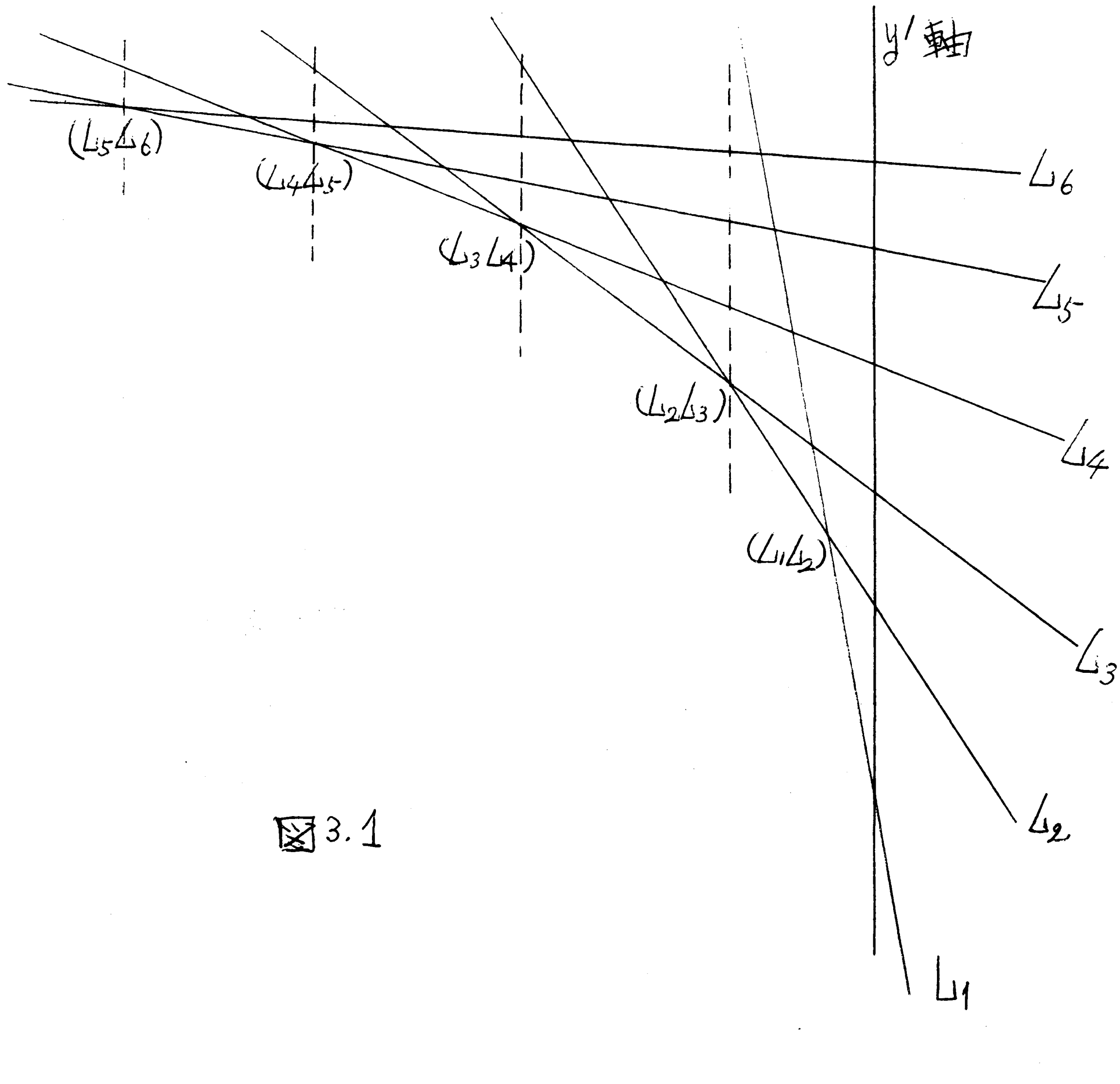


図3.1

$x'=0$ のときの y' にかんする S の根を $a_1<a_2<\cdots<a_m<a_{m+1}$ とするとき Riemann 球面の ∞ を基点とするしかも $\sqrt{-1}\,\infty$ から たて軸に平行に 各 a_i を結ぶ標準的な F での道をそれぞれ $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m, \gamma_{m+1}$ とすると

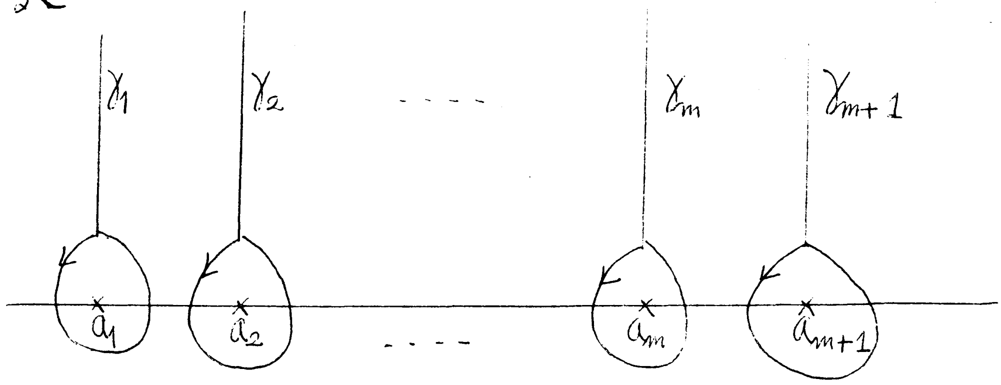


図3.2

(3.14) $$\gamma_1\gamma_2 \quad \gamma_m\gamma_{m+1} = 1$$

一方 Y の中での道の選び方は $x'y'$ 平面上原点 0 を基点として上半面を実軸に沿って走り 各 b_i に結ぶひもを σ_i とする. ここで 仮定から

(3.15) $$0>b_1>b_2>\cdots>b_N \qquad \left(N=\frac{m(m+1)}{2}\right).$$

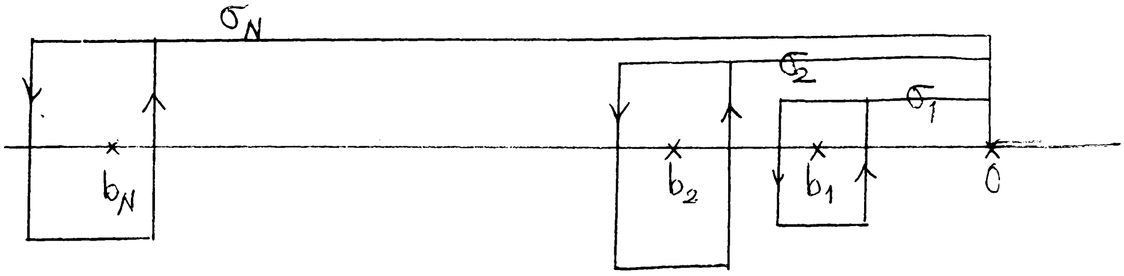


図3.3

しかして

(3.16) $$\sigma_N\sigma_{N-1}\cdots\sigma_2\cdot\sigma_1=1$$

さて a_i と a_j とが一致する x' の点 すなわち L_i と L_j との交叉点の近傍で考えるに 対応する Y の点を $b_{(i,j)}$、ひもを $\sigma_{(i,j)}$ と表わしておくと $b_{(i,j)}$ は実点だが $b_{(i,j)}$ の近傍でしかも $b_{(i,j)}$ の右に位置する実軸の点 $y\in Y$ での根 $\{a_i\}$ の大きさの順序は

(3.17) $$a_{i+1}<\cdots<a_{j-1}<a_i<a_j<a_{j+1}<\cdots<a_{m+1}<$$

$$<a_{i-1}<a_{i-2}<\cdots<a_1 \quad .$$

$\sqrt{-1}\infty$ を基点とするたて軸に平行な各 a_i を結ぶひも

を それぞれ $\tilde{\gamma}_i$ で表わせば

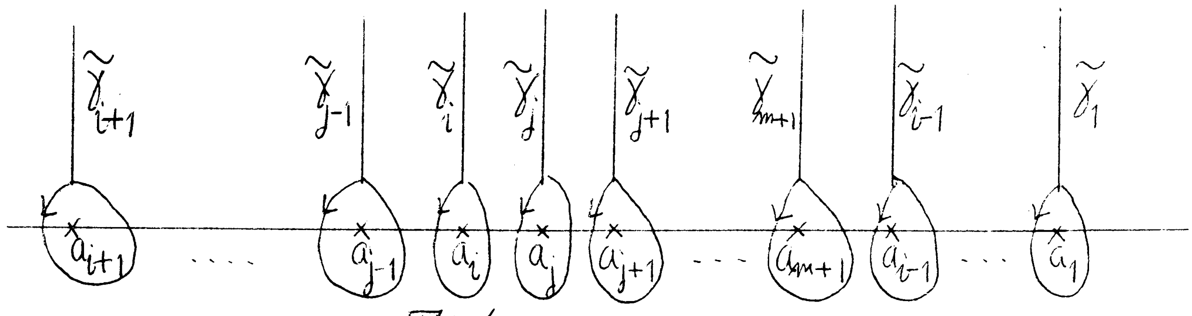


図3.4.

点 y が 各 $l_{(ij)}$ を上半面内で正半回転するとき $a_j - a_i$ は文半回転正方向にすることから 上記の点列 $\{a_1, \cdots, a_{m+1}\}$ の位置関係は 各 $a_1, a_2, \cdots$ a_{i-1}, a_i が 順々に下半面から移動したものである.

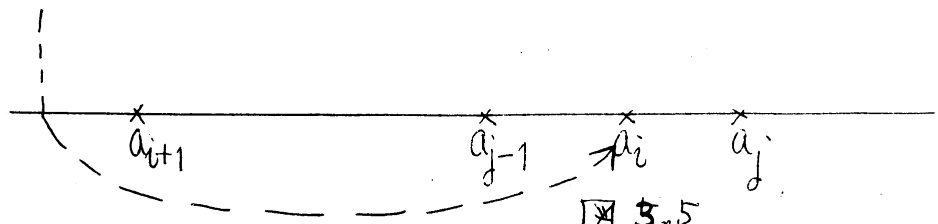


図3.5

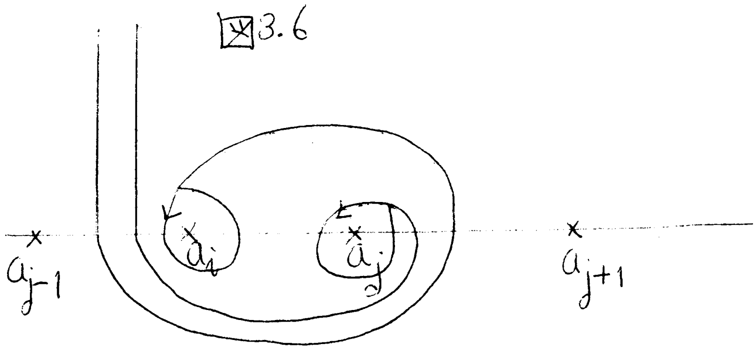
よって最初の $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m+1}$ と $\tilde{\gamma}_1, \cdots, \tilde{\gamma}_{m+1}$ との関係は

$$
(3.18)\quad \begin{cases}
\gamma_1 = (\gamma_2 \cdots \gamma_{m+1})\, \tilde{\gamma}_1\, (\gamma_2 \cdots \gamma_{m+1})^{-1} \\
\cdots \\
\gamma_{i-1} = (\gamma_i \cdots \gamma_{m+1})\, \tilde{\gamma}_{i-1}\, (\gamma_i \cdots \gamma_{m+1})^{-1} \\
\gamma_i = (\gamma_{i+1} \cdots \gamma_{j-1})\, \tilde{\gamma}_i\, (\gamma_{i+1} \cdots \gamma_{j-1})^{-1} \\
\gamma_{i+1} = \tilde{\gamma}_{i+1} \\
\vdots \\
\gamma_{m+1} = \tilde{\gamma}_{m+1}
\end{cases}
$$

ところで $b_{(ij)}$ のまわりをまわる $\tilde{\gamma}_\nu$ の変換は

$$(3.19)\begin{cases}\tilde{\gamma}_i \to \tilde{\gamma}_i\tilde{\gamma}_j\tilde{\gamma}_i\tilde{\gamma}_j^{-1}\tilde{\gamma}_i^{-1}\\ \tilde{\gamma}_j \to \tilde{\gamma}_i\tilde{\gamma}_j\tilde{\gamma}_i^{-1}\\ \tilde{\gamma}_k \to \tilde{\gamma}_k \quad (k \neq i, j)\end{cases}$$

図3.6



によって与えられるから直ちに

$$(3.20)\begin{cases}\gamma_i \to (\gamma_i\cdots\gamma_{j-1})\gamma_j(\gamma_{i+1}\cdots\gamma_{j-1})^{-1}\gamma_i(\gamma_{i+1}\cdots\gamma_{j-1})\gamma_j^{-1}(\gamma_i\cdots\gamma_{j-1})^{-1}\\ \gamma_j \to (\gamma_{i+1}\cdots\gamma_{j-1})^{-1}\gamma_i(\gamma_{i+1}\cdots\gamma_{j-1})\gamma_j(\gamma_{i+1}\cdots\gamma_{j-1})^{-1}\gamma_i^{-1}(\gamma_{i+1}\cdots\gamma_{j-1})\\ \gamma_k \to \gamma_k \quad (k \neq i, j)\end{cases}$$

$H^1(F; A)$ の $\sigma_{(i,j)}$ による変換公式を求める. F において A に値をもつ(従って多価) 1-form θ を任意にとって

$$(3.21)\qquad \varphi_i = \int_{\gamma_i} \theta$$

とおく。このとき $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{m+1}$ の各 $\sigma_{(ij)}$ による変換は

$$(3.22)\qquad \int_{\gamma\gamma'} \theta = \int_{\gamma} \theta + \rho(\gamma)\int_{\gamma'} \theta \quad \text{(crossed home)}$$

に注意すれば直ちに

$$(3.23)\qquad \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{pmatrix} \to \begin{array}{ccccc} i & i+1 & & j-1 & j \\ \left(\begin{matrix} x_i(x_j-1), \\ \dfrac{1-x_j}{x_{i+1}\cdots x_{j-1}}, \end{matrix}\right. & \begin{matrix} x_i(1-x_i)(1-x_j), \\ \dfrac{(1-x_i)(x_j-1)}{x_{i+1}\cdots x_{j-1}}, \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} x_i\cdots x_{j-2}(1-x_i)(1-x_j), \\ \dfrac{(1-x_i)(x_j-1)}{x_{j-1}}, \end{matrix} & \left.\begin{matrix} x_i\cdots x_{j-1}(1-x_i) \\ x_i \end{matrix}\right) \end{array} \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \vdots \\ \varphi_j \end{pmatrix}$$

$$\varphi_k \to \varphi_k \qquad (k \neq i, j)$$

$H^1(F; A)$ の変換としては特に $\displaystyle\sum_{j=1}^{m+1} \xi_j \int_{\gamma_j} \theta$

$$\sum_{j=1}^{m+1} \xi_j (x_j - 1) = 0$$ にかぎって考えるのである．さて行列 $\sigma_{(ij)} - 1$ をたてに並べた合成行列の rank を計算するに $x_j \neq 1$ とすれば maximal rank つまり rank は m である．よって次の結果を得る：

<u>Th 1.</u> (i) $x_j \neq 1$ ($1 \leqq j \leqq m+1$) ならば $H^1(F; A)$ の dual である $H_1(F; A)$ の元は

$$\sum_{j=1}^{m+1} \xi_j \otimes \gamma_j \;, \quad \sum_{j=1}^{m+1} \xi_j (x_j - 1) = 0$$

で与えられる（F の ∞ 点を考慮して）．これの $\sigma_{(ij)}$ によるモノドロミーの変換は (3, 23) で与えられる．

(ii) $\dim H_1(Y; H_1(F; A))$ は $m(N-1) - m = m(N-2)$ $\left(N = \dfrac{m(m+1)}{2}\right)$ に等しい．

$\dim H_1(Y; A) = (m-1)N$ だから完全列 (3.3) において $\dim \operatorname{im} \delta_1 = (m-1)N - 1$．故に

<u>Th 2.</u> (i) $\left(\begin{array}{c}\dim H_2(X; A) \\ \| \\ \dim H_2(\hat{X}; A)\end{array}\right) = \dfrac{(m-1)(m-2)}{2}$

$(x_j \neq 1,\ 1 \leq j \leq m+1)$

(ii) もし x_j がすべて1に等しいときは

$$\dim H_2(X;A) = \frac{m(m-1)}{2} .$$

§4. 次に§3の仮定を少しずらして得られるS(特異点なしの代数曲線と1本の直線)の場合について考えてみる。$m=2\nu$ (ν 正整数) とするとき S_0 を

$$(4.1) \qquad S_0 : L_1 L_2 \cdots L_m \pm \varepsilon G = 0$$

によって定義する。G は 2ν 次の実，正の~~定値~~斉次多項式(例えば $(\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2)^\nu$)，$\varepsilon$ は正負適当に選び，しかも0に十分近いとする。このとき S_0 は既約な実代数曲線で特異点なしとしてよい。$S = S_0 \cup L_{m+1}$ について我々は以下ホモロジーを求める。ε を十分0に近くとれば符号をうまくとることによって S の実断面は図(4,1)のように図(3.1)の近似図形が得られる。§3と同じく $x'=\text{const}$ なる直線で切ってゆけば§3における交点$(L_i L_j)$は S_0 との接点になる。各 $l_{(ij)}$ の近傍に2つずつ S_0 の接点があり $j-i$ が偶のとき x' 座標は虚数(互いに共役)でそれを $l_{(ij)}^+$ ($\operatorname{Im} l_{(ij)}^+ > 0$)，$l_{(ij)}^-$ ($\operatorname{Im} l_{(ij)}^- < 0$) で表わす。$j-i$ が奇数のときは

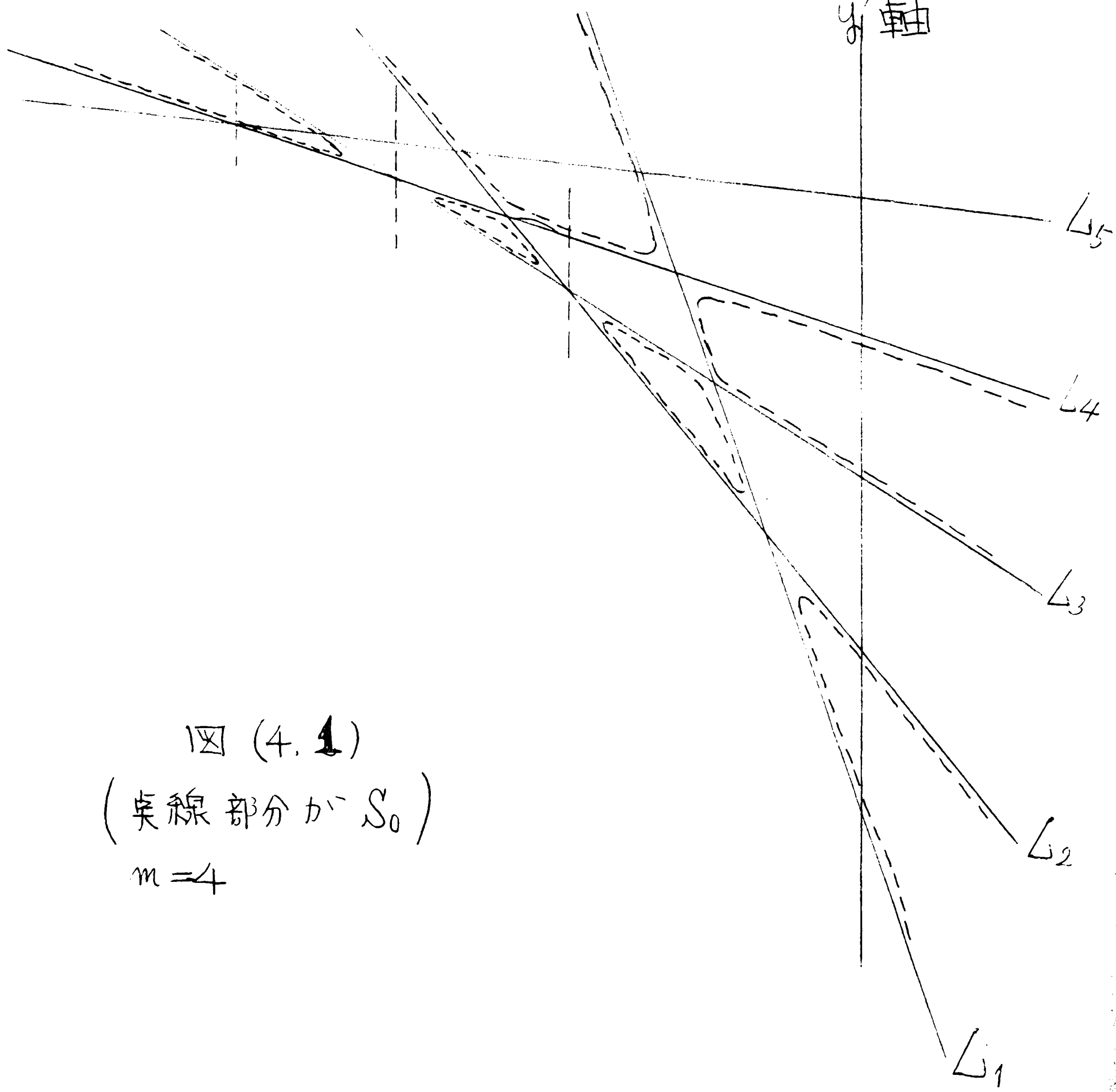
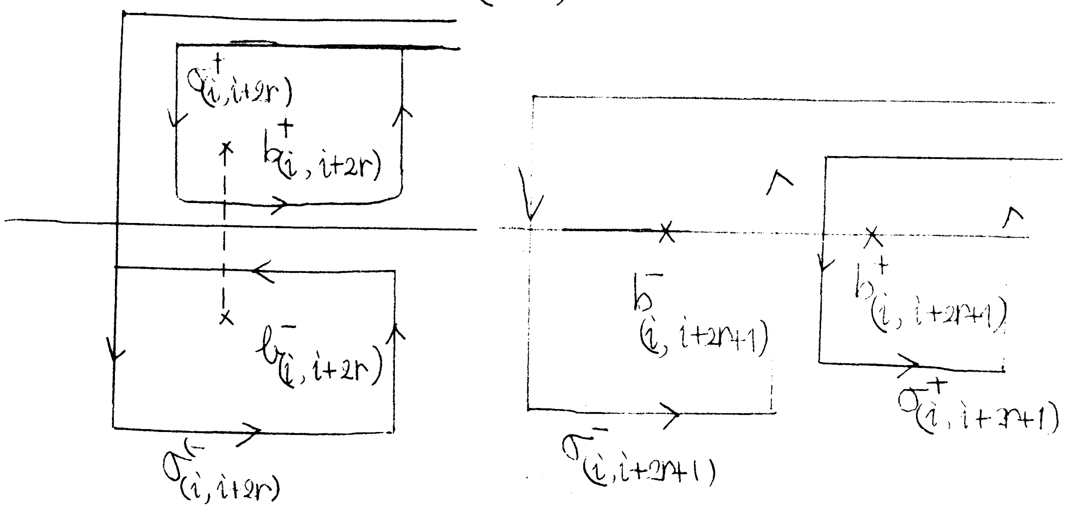


図 (4.1)
(実線部分が S_0)
$m=4$

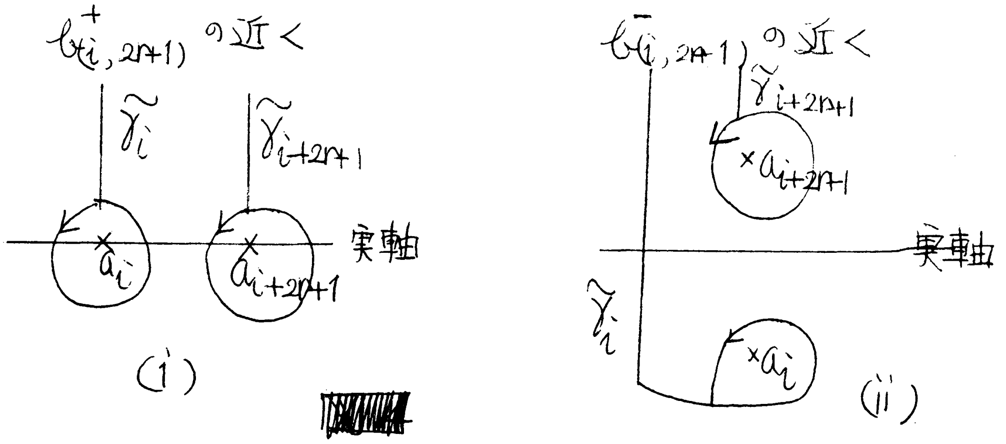
x座標は実数であるが　大きさの順に $\ell_{(ij)}^{-} < \ell_{(ij)} < \ell_{(ij)}^{+}$
ととっておく．S_0 と L_{m+1} との交点については　§3 と全く
同じ．Plücker の公式　　$n + 2\delta + 3\sigma = m(m-1)$
（n 接点数，δ node 数，σ cusp 数）より
今の場合　$\delta = \sigma = 0$　だから　$n = m(m-1)$ で

S_0は特異点なし．S_0の genus は $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$．
§3と同じく原点0を base point とする．各 $b^{\pm}_{(ij)}$ を結ぶひも $\sigma^{\pm}_{(ij)}$ は上半面より図(4,3)の如くとる．

図(4.2)

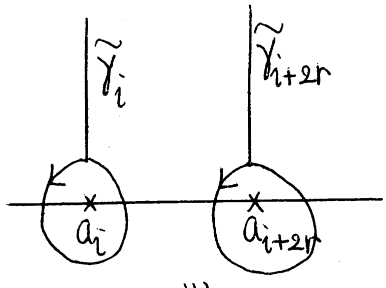


これらのひもは他の $b^{\pm}_{(kj)}$ とは決してまつわらないようにとることができる．$b^{\pm}_{(ij)}$ を1まわりする直前における x' の実軸上の点に対応する $\tilde{\gamma}_i$ $(1 \leq i \leq m)$ の標準形として前と同じく $\sqrt{-1}\infty$ よりでてたて軸に平行に各 a_i を結ぶものを次の図のようにとる．



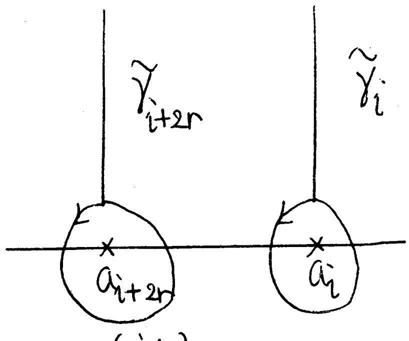
$b^{+}_{(i,i+2r)}$ の近く

$\frac{1}{2}\left(b^{+}_{(i,i+2r)}+b^{-}_{(i,i+2r)}\right)$ において



(iii)

$b^{-}_{(i,i+2r)}$ の近く



(iv)

図(4.3)

これらに対応して各 $b^{\pm}_{(i,j)}$ を1まわりすることによって得られるモノドロミーの変換は

$$
(4.2)\quad
\begin{cases}
\sigma^{+}_{(i,2r+1+i)} : \begin{cases} \tilde{\gamma}_i \to \tilde{\gamma}_i\,\tilde{\gamma}_{i+2r+1}\,\tilde{\gamma}_i^{-1} \\ \tilde{\gamma}_{i+2r+1} \to \tilde{\gamma}_i \end{cases} \\[2ex]
\sigma^{-}_{(i,2r+1+i)} : \begin{cases} \tilde{\gamma}_i \to \tilde{\gamma}_i\,\tilde{\gamma}_{i+2r+1}\,\tilde{\gamma}_i^{-1} \\ \tilde{\gamma}_{i+2r+1} \to \tilde{\gamma}_i \end{cases} \\[2ex]
\sigma^{+}_{(i,i+2r)} : \begin{cases} \tilde{\gamma}_i \to \tilde{\gamma}_i\,\tilde{\gamma}_{i+2r}\,\tilde{\gamma}_i^{-1} \\ \tilde{\gamma}_{i+2r} \to \tilde{\gamma}_i \end{cases} \\[2ex]
\sigma^{-}_{(i,i+2r)} \quad \begin{cases} \tilde{\gamma}_i \to \tilde{\gamma}_{i+2r} \\ \tilde{\gamma}_{i+2r} \to \tilde{\gamma}_{i+2r}\,\tilde{\gamma}_i\,\tilde{\gamma}_{i+2r}^{-1} \end{cases}
\end{cases}
$$

$\gamma_1 \cdots \gamma_{m+1}$ と $\tilde{\gamma}_1 \cdots \tilde{\gamma}_{m+1}$ との関係は
各 $\ell^{\pm}_{(i_j)}$, $\ell_{i,m+1}$ において $\ell^{-}_{(i,i+2r)}$ において以外
では §3 の (3.18) で与えられ，このときは

$$
(4.3)\quad \begin{cases}
\gamma_1 = (\gamma_2 \cdots \gamma_{m+1})\,\tilde{\gamma}_1\,(\gamma_2 \cdots \gamma_{m+1})^{-1} \\
\cdots\cdots \\
\gamma_{i-1} = (\gamma_i \cdots \gamma_{m+1})\,\tilde{\gamma}_{i-1}\,(\gamma_i \cdots \gamma_{m+1})^{-1} \\
\gamma_i = (\gamma_{i+1} \cdots \gamma_{i+2r})\,\tilde{\gamma}_i\,(\gamma_{i+1} \cdots \gamma_{i+2r})^{-1} \\
\gamma_{i+\nu} = \tilde{\gamma}_{i+\nu} \quad (m+1-i \geqq \nu \geqq 1)
\end{cases}
$$

かくして §3 と同様の計算により

<u>Th 3</u>. (i) $\dim H_2(\hat{X}; A) = (m-1)^2$
$(x_j \neq 1,\ 1 \leqq j \leqq m+1)$

(ii) $S = S_0$ のときは $\dim H_2(\hat{X}; A) =$
$= m^2 - 3m + 3 \quad (m \geqq 3) \qquad (x_j \neq 1,\ 1 \leqq j \leqq m)$

(注) (i) に相当する積分は

$$\iint a(x, y)^{\lambda}\, dx\, dy$$

($a(x,y)$ は m 次の多項式) で与えられる.

§5、$l=3$ のときについて少しく言及する．

$\hat{X} = \mathbb{P}^3 - S$ （$\dim S = 2$） として $X = \hat{X} - \{0\}$

とおく．0を通る直線族より全射

$$\pi : X \to \hat{Y}_0 \ (\cong \mathbb{P}^2) \qquad (5.1)$$

が定義されてその一般ファイバー $F = \pi^{-1}(y)$ （$y \in \hat{Y}_0$）

は $\mathbb{P}^1 - \{a_1, \cdots, a_m, \infty\}$ （mはSの次数）とhomeo--morph．πの分岐所の$\hat{Y}_0$の中での像を$Y^{(1)}$とすると$Y^{(1)}$は$\mathbb{P}^2$の中で代数曲線である．今 $\hat{Y} = \hat{Y}_0 - Y^{(1)}$ の1点

O_1をとりO_1を通る直線族より再び全射

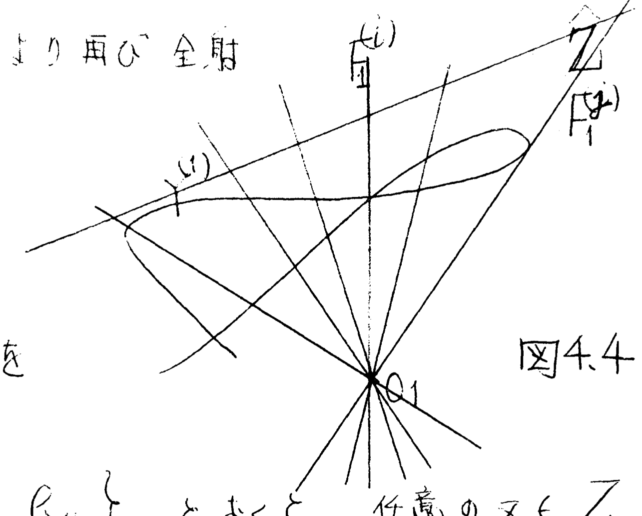


図4.4

$$\pi_1 : \hat{Y} \to \hat{Z} \ (\cong \mathbb{P}^1) \qquad (5.2)$$

が得られる．その分岐所を

$\{b_1, b_2, \cdots, b_N\}$とする．

$Z = \hat{Z} - \{b_1, \cdots, b_N\}$ とおくと 任意の $z \in Z$

に対して $\pi_1^{-1}(z) = F_1$ とおく． $\pi^{-1}(b_i) = F_1^{(i)}$ とおいて

$Y^{(2)} = \bigcup_{i=1}^{N} F_1^{(i)}$ とすれば $\pi^{-1}(Y^{(2)}) = X^{(2)}$，

$\pi^{-1}(Y^{(1)}) = X^{(1)}$ は $\mathbb{P}^3 - \{0\}$ の

中で解析的集合をなす．このとき次の定理は簡単に検証

される.

<u>Prop 4.</u> $H_3(X-X^{(1)}-X^{(2)};A)\cong H_1(Z;H_1(F_1;H_1(F;A)))$

$H_2(X^{(1)}-X^{(1)}\wedge X^{(2)};A)\cong H_1(Y^{(1)}-Y^{(1)}\wedge Y^{(2)};H_1(F^{(1)};A))$

など,

さらに完全列

$$\to H_p(X-X^{(1)};A)\xrightarrow{i} H_p(X;A)\xrightarrow{\varpi} H_{p-2}(X^{(1)};A)\xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} H_{p-1}(X-X^{(1)};A)\to\cdots$$

及び

$$\to H_p(X-X^{(1)}-X^{(2)};A)\xrightarrow{i} H_p(X-X^{(1)};A)\xrightarrow{\varpi} H_{p-2}(X^{(1)}-X^{(1)}\wedge X^{(2)};A)\xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} H_{p-1}(X-X^{(1)}-X^{(2)};A)\to$$

から $H_p(X;A)$ の計算は実行可能である. しかし一般的な次元の法則, サイクルの構成法を予見することはいまの筆者にはわからない. ご存知の方はお知らせ下さい.

文献

(1) F. Enriques : La superficie algebriche

(2) F. Hurewitz : Oeuvres completo II

(3) Van Kampen : Amer. J. Math. 1932

(4) J. Leray : Jour. Math. Pure et Appli 1950 ; Bull. Soc. Math. France 1963 , 1967

(5) S. Maclane : Homology

(6) E. Picard et G. Simart : Théorie des fonctions algébriques de deux variables II

(7) O. Zariski : Amer. J. Math. 1931

(8) P. Deligne : Grothendieck への手紙 (1967)

26