数理解析研究所講究録
第108巻 1971年 349-359

代数的超函数と双対性

東大　浪川幸彦

§0. 序

佐藤の超関数は純代数的構成法にその特徴がある。例えば$\mathcal{O}$を$\mathbb{C}^n$上の複素n変数正則関数の作る層とすれば、$\mathbb{R}^n$上の佐藤の超函数の層$\mathcal{B}$は、局所コホモロジーを用いて、$\mathcal{B}=\mathcal{H}^n_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O})$とかける。これが超関数と呼ばれるゆえんは、$K$が$\mathbb{R}^n$内のコンパクト集合であるとき、位相ベクトル空間として$\mathcal{B}_K(\mathbb{C}^n)$が、$\mathcal{O}(K)$の強双対であることにある。(cf.[HS]) この証明に於てはSerreの双対定理が本質的である。ところで以上の方法は、代数幾何に於ても並行して行うことができ、超函数論に類似したものを作ることができる。

つまり、体kを固定し、k上の完備非特異なn次元多様体Xをとり、Xの純余次元d(次元m)の非特異閉部分多様体Yを考える。X上のn次有理正則微分型式の作る層をω_Xとするとき、層$\mathcal{H}^d_Y(\omega_X)$を、$Y$上の超函数と呼ぼう。さて、$Y$上で消える

関数全体の作る、正則函数層 $\mathcal{O}_X$ のイデアル層を $\mathcal{J}$ とするとき、$X_{/Y} = (Y, \mathcal{O}_{X/Y} = \varprojlim_{k \geq 0} \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{k+1}|_Y)$ を X の Y に沿う完備化と呼ぶ。すると、

$$H^m(Y, \mathcal{H}_Y^d(\omega_X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom.\,cont.}_k(\Gamma(Y, \mathcal{O}_{X/Y}), k)$$

となる。つまり、$\mathcal{H}_Y^d(\omega_X)$ は、形式概型 (formal scheme) $X_{/Y}$ 上の超函数とみることができる。そして、この事実は、Serre の双対定理の代数的なものから導びかれる。

ところで、Grothendieck はこの Serre の双対定理を、非常に一般的な場合に拡張した。そこで、この拡張された定理を用いて、上の事実の拡張を証明しよう。そして、もう一つ、佐藤先生が、局所作用素の作る層として導入した、いわゆる層 $\mathcal{L}$ が、代数的な場合は、普通の微分作用素に他ならぬことを証明する。

§1. 基本的概念達。

体 k 上有限型，擬コンパクト，分離的な概型を，こゝでは k 上の<u>代数多様体</u>（又は単に多様体）と呼ぼう。つまり、有限個の開アフィン被覆があって、その各々は有限次元アフィン空間の閉部分概型としてかけるものである。古典的な代数多様体よりは、構造層に巾零元を許すだけ一般的になっている。この時基底位相空間はネター的であることに注意してお

く。以下、体kは固定して考える。従って、"いちいち体k上の"といわないことにする。

（体k上の代数的）多様体Xが、Xをkの代数閉体$\bar{k}$に拡張しても非特異であるとき、Xは絶対非特異であるという。多様体X、S間の射(morphism) $f: X \longrightarrow S$が、平坦(flat)であって、しかもすべてのファイバーが絶対非特異であるとき、fは滑らか(smooth)であるという。

多様体X、S間の射$f: X \rightarrow S$があって、任意のS上の概型Zに対し、fから導びかれる射$f_Z: X \times_S Z \longrightarrow Z$が閉写像になるとき、fは固有的(proper)であるという。体k上固有的な多様体は、完備多様体に他ならない。射影多様体は完備である。

多様体Xの閉部分多様体Yが、局所的にはX内の余次元とちょうど同じ数のX上の正則函数の零点として書けている時、Yは局所完全交叉(locally complete intersection)であるという。このときYの定義イデアル層を$\mathcal{J}$とすれば、$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$は局所的に、$\mathcal{O}_Y$の余次元個の直和と同型である。

§2、微分（層による定義）

X、Sを付環空間、fをXからSへの射とする。今、ファイバー積$X \times_S X$が存在し、しかも自然な対角線写像Δ_f

が閉埋め込みとする。つまり

$$\begin{tikzcd} X\times_S X \arrow[d, "p_1"'] \arrow[drr, "p_2" near start] & & X \arrow[ll, "\Delta_f"'] \arrow[dll, "id"'] \arrow[d, "id"] \\ X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

$$\Delta_f=(\Delta_f;\ \delta_f)\qquad \Delta_f: X\longrightarrow X\times_S X$$

（基底空間の写像）

$$\delta_f:\mathcal{O}_{X\times_S X}\longrightarrow \Delta_{f*}\mathcal{O}_X$$

とするとき、Δ_fによりXは$X\times_S X$の閉集合に同相であり、δ_fは全射であるとする。δ_fの核を$\mathcal{J}_f$であらわすとき

$$\mathcal{P}_f^n=\Delta_f^{\cdot}\ \mathcal{O}_{X\times_S X}/\mathcal{J}_f^{n+1}$$

$$\Omega_f^1=\Delta_f^{\cdot}\ \mathcal{J}_f/\mathcal{J}_f^2$$ （$\Delta_f^{\cdot}$は連続写像Δ_fによる逆像）

を各々、n-階主要部分、一次微分の作る層と呼ぶ。Ω_f^1は$\mathcal{P}_f^1$のイデアル層である。なお$\mathcal{P}_f^n$のかわりに$\mathcal{P}_{X/S}^n$ともかく。

射影p_1, p_2に伴う構造層の射π_1, π_2により、自然な写像

$$\mathcal{O}_X\xrightarrow{\Delta^{\cdot}(\pi_1)}\Delta_f^{\cdot}\ \mathcal{O}_{X\times_S X}\longrightarrow\mathcal{P}_f^n$$

$$\mathcal{O}_X\xrightarrow{\Delta^{\cdot}(\pi_2)}\Delta_f^{\cdot}\ \mathcal{O}_{X\times_S X}\longrightarrow\mathcal{P}_f^n$$

があるが、上の写像により$\mathcal{P}_f^n$を$\mathcal{O}_X$加群層とみてみる。下の写像をd_f^nであらわし、$t\in\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$（$U$は$X$の開集合）の$d_f^n$による像$d_f^n(t)$を$n$階の主要部分と呼ぶ。さらに$d_f(t)=d_f^1(t)-t\cdot 1\in\Gamma(U,\Omega_f^1)$を$t$の微分と呼ぶ。

$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$を$\mathcal{O}_X$加群層とするとき

$$\mathcal{D}iff^n_{X/S}(\mathcal{F},\mathcal{G})=\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_f^n\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F},\ \mathcal{G})$$

（$\mathcal{P}_f^n$はd_f^nによって右$\mathcal{O}_X$-加群層とみる）

を$\mathcal{F}$から$\mathcal{G}$へのたかだかn階の微分作用素の作る層と呼ぶ。

その全体

$$\mathcal{D}iff_{X/S}(\mathcal{F},\mathcal{G})=\varinjlim_{n}\mathcal{D}iff^{n}_{X/S}(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

を<u>微分作用素の作る層</u>とよぶ。$f\in\Gamma(U,\mathcal{F})$に対する $D\in\Gamma(U,\mathcal{D}iff^{n}_{X/S}(\mathcal{F},\mathcal{G}))$の作用は、自然な射 $d^{n}_{f,\mathcal{F}}:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{P}^{n}_{f}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}$ を用いて、$D(f)=D\circ d^{n}_{f,\mathcal{F}}(f)$ としてあらわされる。

以上の概念は通常のそれらと一致する。

以下、代数多様体の圏にもどろう。そこでは本節の初めの条件はみたされる。次の定理が基本的である。

<u>定理</u>1. 多様体X，S間の射 $f:X\longrightarrow Y$ が滑らかならば，①$\Omega^1_{X/S}$ は有限次元の局所自由層である。その次元はfのファイバーの次元（fの<u>相対次元</u>と呼ぶ）と同じである。②$\mathcal{J}^{n}_{f}/\mathcal{J}^{n+1}_{f}=\mathcal{S}^{n}(\Omega^1_{X/S})$ ―（$\mathcal{S}^{n}$は対称積）③$\mathcal{P}^{n}_{f}$も有限次元局所自由層である。（[EGA] IV-17-2-3）//

§3. 局所コホモロジーと超関数の定義

代数多様体に於ては局所コホモロジーは、次の様に比較的簡単にかける。

<u>定理</u>2. Xを代数多様体、Yを連接イデアル層$\mathcal{J}$で定義された閉部分多様体とすると，X上の連接層$\mathcal{F}$に対し，

(1) $\varinjlim_{k\geq 0}\mathcal{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{k+1},\mathcal{F})\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}^{p}_{Y}(\mathcal{F})$

(2) $\varinjlim_{k\geq 0}\mathrm{Ext}^{p}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{k+1},\mathcal{F})\xrightarrow{\sim}H^{p}_{Y}(\mathcal{F})$.

([LC] Th.2.8) //

(1)式から，(2)式を導びくのは次の補題による。

<u>補題</u>3. Xがネーター空間のとき，X上の加群層の圏で，有向帰納的極限と，大域切断$\Gamma(X,\ )$とは可換である。//

<u>命題</u>4. 代数多様体Xの純余次元dの閉部分多様体Yについて，次の命題は同値である。

① Yは局所完全交叉である。

② 任意のX上の局所自由層$\mathcal{L}$，Y内に台を持つ連接層$\mathcal{F}$に対し，$\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{L}) = 0 \quad \forall p < d$

([LC] Th.3.8よりただちに出る) //

定理2と命題4，及びLeray被覆(⇔Koszul複体)を用いて，次の定理がえられる。

<u>定理</u>5 代数多様体Xの余次元dの閉部分多様体Yが局所完全交叉のとき，任意のX上の局所自由層$\mathcal{L}$に対し，

$$\mathcal{H}^p_Y(\mathcal{L}) = 0 \qquad p \neq d$$
$$\mathcal{H}^d_Y(\mathcal{L}) = \mathcal{H}^d_Y(\mathcal{O}) \otimes \mathcal{L} \quad //$$

つまり，$\mathcal{H}^p_Y(\mathcal{L})$は純$d$-余次元であるが，これは$Y$の幾何的性質の直接的な反映なのである。

さて，多様体X，S間の射$f: X \to S$が滑らかで，相対次元がnであるとしよう。

$$\omega_{X/S} = \bigwedge^n \Omega^1_{X/S}$$

をX上のn次微分型式の作る層と呼ぶ。定理1から $\omega_{X/S}$ は可逆層（局所的に $\mathcal{O}_X$ に同型）である。

定義6. X, S を代数多様体、$f: X \to S$ を滑らかな射、Y を余次元dの局所完全交叉閉部分多様体とする。$\mathcal{H}^d_Y(\omega_{X/S})$ をY（正確には X/Y）上の超関数の層と呼ぶ。

§4. Serreの双対定理

Grothendieckによって得られたSerreの双対定理は余りに一般的で、こゝにその完全な形を述べることさえできない。（[RD]等参照）そこで、こゝでは、後で用いる二つの特別な場合の形を記すにとどめる。

定理7 Xがk上のn次元代数多様体であって、自然な射 $X \to \mathrm{Spec}(k)$ が固有的で滑らかとする。X上の任意の擬連接層 $\mathcal{F}$ に対して、

(3) $\quad \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(H^{n-p}(X, \mathcal{F}), k)$

特に、$\mathcal{F}$ が連接層ならば、$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_{X/S})$, $H^{n-p}(X, \mathcal{F})$ はともにk上有限次元であるから、これらは互いに双対である。//

これは"古典的な"双対定理である。さらに、

定理8 $f: X \to S$ を代数多様体間の固有的で滑らかな、相対次元nの射, YをX内の閉集合とする。今、Y内に台を持つ任意の擬連接層 $\mathcal{F}$ に対し、$R^p f_*(\mathcal{F}) = 0$ $(p > 0)$ とする。

この時任意のY内に台をもつ擬連接層$\mathcal{F}$, S上の擬連接層$\mathcal{G}$に対し,

(4) $$f_*(\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_{X/S}\otimes f^*(\mathcal{G}))) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^{n-p}_{\mathcal{O}_S}(f_*(\mathcal{F}), \mathcal{G}) \quad //$$

§5. 定理7の応用：超関数の作用.

この節では，体k上固有的かつ滑らかな次元nの多様体X, およびXの連接イデアル層$\mathcal{I}$で定義される余次元d, 次元m ($n=m+d$) の閉部分多様体を固定する。$\omega_{X/\mathrm{Spec}(k)}$を$\omega_X$と略記する。X上の層$\mathcal{F}$に対し，$\hat{\mathcal{F}}=\varprojlim_k \mathcal{F}/\mathcal{I}^{k+1}\mathcal{F}$を$\mathcal{F}$のYに沿う完備化と呼ぶ。$\hat{\mathcal{F}}$の台はY内にある。

命題9. $\mathcal{F}$がXの連接層ならば,

$$H^p(X,\hat{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k H^p(X, \mathcal{F}/\mathcal{I}^{k+1}\mathcal{F}) \quad //$$

([CD] Prop. 4.1)

これにより，左辺には離散位相空間の極限位相を入れる。
さて，一般的な方法により，X上の連接層$\mathcal{F}$に対し，函手的なk-二次形式

(5) $$H^p(X,\hat{\mathcal{F}})\times \mathrm{Ext}^{m-p}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}^d_Y(\omega_X)) \longrightarrow k$$

を作ることができる。これに対し,

定理10. X, Y等は上の通りとする。X上の連接層$\mathcal{F}$に対して，k-二次形式(5)は次の意味で双対的である。

(6) $$H^p(X,\hat{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Ext}^{m-p}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{H}^d_Y(\omega_X)), k)$$

(7) $\quad \mathcal{E}xt^{m-p}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}^d_Y(\omega_X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom.cont.}_k(H^p(X, \hat{\mathcal{F}}), k)$ //

(7) は位相の定義から、(6) に帰着される。(6)は、命題9, 定理7, および、スペクトル列、

$(7)^{bis} \quad \mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}^q_Y(\omega_X)) \Longrightarrow \varinjlim_k \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{k+1}, \omega_X)$

が、定理5から退化することを用いて、証明される。

系 11. (7)式で、特に $\mathcal{F}=\mathcal{O}_X$ とおけば、

$$H^{m-p}(X, \mathcal{H}^d_Y(\omega_X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom.cont.}_k(H^p(X, \hat{\mathcal{O}}_X), k) \text{ //}$$

§ 6. 定理8の応用：微分作用素

命題 12. Yが多様体Xの余次元 d の局所完全交叉閉部分多様体とする。Yに台をもつXの連接層 $\mathcal{F}$, 及びX上の局所自由層 $\mathcal{L}$ に対し、

$$\mathcal{E}xt^d_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}^d_Y(\mathcal{L})) \text{ //}$$

([LC] Th.5.1)

補題 13. 多様体X上の擬連接層の射影系 $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ があり、しかも $\mathcal{F}_{i+1} \longrightarrow \mathcal{F}_i$ は全射とする。このとき射影的極限によって位相を入れた $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ の射影的極限、及び、別のX上の擬連接層 $\mathcal{G}$ に対し、

(8) $\quad \mathcal{H}om.\mathrm{cont.}_{\mathcal{O}_X}(\varprojlim \mathcal{F}_i, \mathcal{G}) \cong \varinjlim \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_i, \mathcal{G})$ //

以下次の様な場合を考えよう。

(S) 次ページの図の様な代数多様体間の射の可換図式があ

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[l, "i"'] \arrow[dl, "g"] \\ S & \end{tikzcd}$$

り、しかも ① f は固有的でかつ滑らか，相対次元 n，② g は同型とする。すると ③ i は余次元 n の局所完全交叉の閉埋め込みになる。これより、Y を X の閉部分多様体と考える。//

<u>補題</u>14. $\mathcal{F}$ を Y に台をもつ擬連接層とすれば、

$$R^p f_*(\mathcal{F}) = 0 \qquad (p>0) \quad //$$

<u>定理</u>15. 条件 (S) を仮定する。任意の X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対し、

(9) $$f_*(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}^d_Y(\omega_{X/S}))) \simeq \mathcal{H}om.cont_{\mathcal{O}_S}(f_*(\hat{\mathcal{F}}), \mathcal{O}_S) \quad //$$

なぜなら、左辺

$= f_*(\varinjlim \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{k+1}, \omega_{X/S}))$ （$\mathcal{J}$ は定義イデアル）

$= \varinjlim f_*(\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{k+1}, \omega_{X/S}))$ （補題3）

$= \varinjlim \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(f_*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^{k+1}), \mathcal{O}_S)$ （定理8）

$= \mathcal{H}om.cont_{\mathcal{O}_S}(f_*(\hat{\mathcal{F}}), \mathcal{O}_S)$ （補題13）

<u>系</u> 16　$f: X \to S$ は滑らかな多様体間の射で、相対次元 n とする。f で定まる対角線埋め込み

$$\begin{tikzcd} X\times_S X \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[dl, "id"] \\ X & \end{tikzcd}$$

に、定理15を用いると

$$\mathcal{H}^n_X(\omega_{X\times_S X/X}) \simeq \mathcal{H}om.cont_{\mathcal{O}_X}(p_*(\hat{\mathcal{O}}_{X\times_S X}), \mathcal{O}_X)$$
$$= \mathcal{D}iff_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \quad //$$

参考文献.

[EGA] A. Grothendieck : "Éléments de Géométrie Algébrique" Publ. Math. I.H.E.S. Paris (1960 ff.)

[LC] A. Grothendieck : "Local Cohomology". Lecture Notes in Math. 41. Springer. Berlin (1967).

[RD] R. Hartshone : "Residues and Duality". Lecture Notes in Math. 20, Springer, Berlin (1966).

[CD] R. Hartshone : "Cohomological dimension of algebraic varieties." Ann. of Math. Vol. 88 (1968) pp. 403 − 450.

[HS] 小松彦三郎：「佐藤の超函数と定数係数線型偏微分方程式」 東大セミナーノート, 22, 東京 (1968).