数理解析研究所講究録
第 110 巻 1971 年 14-24

抛物線型特異積分の収斂について

都立大 理 相沢幸子

§2, §3 で抛物線型特異積分の L^p-収斂(次数 p の平均収斂)による存在を述べ, §4 で pointwise の収斂について述べる. 応用上はここに掲げられた定理で足りるということであるが, その結論の成立のために kernel の充たすべき best condition は判っていない.

§1. (記号と定義)　n 次元 Euclid 空間 R^n の点を $x=(x_1,\cdots,x_n)$, 実数の組を $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$; $\alpha_1\leqq\alpha_2\leqq\cdots\leqq\alpha_n$ $\alpha_j\geqq 1$, とするとき $(\sum_j x_j^2)^{\frac{1}{2}}=|x|$, $(\lambda^{\alpha_1}x_1,\cdots,\lambda^{\alpha_n}x_n)=\lambda^\alpha x$ $\lambda>0$, $\sum_j\alpha_j=|\alpha|$, と表わすことにする.

α を固定して次の座標変換をおこなう;　$x\neq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \rho^{\alpha_1}\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= \rho^{\alpha_{n-1}}\sin\theta_1\cos\theta_2\\
x_n &= \rho^{\alpha_n}\cos\theta_1
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix}
\theta_j\in[0,\pi] \quad j=1,\cdots,n-2\\
\theta_{n-1}\in[0,2\pi],\ \rho>0
\end{pmatrix}.
$$

単位球面をΣとすると $\left(\frac{x_1}{\rho^{\alpha_1}},\cdots,\frac{x_n}{\rho^{\alpha_n}}\right)\in\Sigma$ であるから, $x=\rho^{\alpha}x'$ $x'=(x'_1,\cdots x'_n)\in\Sigma$ と表わす. このとき上の変換によると $dx_1\cdots dx_n=\rho^{|\alpha|-1}J(x')\,d\sigma\, d\rho$ ($1\leqq J(x')\leqq|\alpha|$, $d\sigma$ はΣの面積要素) となる. $\rho=\rho(x)$は 原点と点xとの距離を定義する.

何故なら $\rho(x)=\rho_1$, $\rho(y)=\rho_2$ と書くと

$$\left(\frac{x_1+y_1}{(\rho_1+\rho_2)^{\alpha_1}},\cdots,\frac{x_n+y_n}{(\rho_1+\rho_2)^{\alpha_n}}\right)=\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}\left(\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}\right)^{\alpha_1-1}x'_1,\cdots,\left(\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}\right)^{\alpha_n-1}x'_n\right)$$
$$+\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\left(\left(\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\right)^{\alpha_1-1}y'_1,\cdots,\left(\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\right)^{\alpha_n-1}y'_n\right).$$

右辺が単位球の内部の点であることから $\rho(x+y)\leqq\rho_1+\rho_2$ を得る. 定義から $\rho(\lambda^{\alpha}x)=\lambda\rho(x)$ となる.

$\sum_j\frac{x_j^2}{\rho(x)^{2\alpha_j}}=\sum_j\frac{x_j^2}{|x|^2}=1$ であるから $|x_j|\leqq\rho(x)^{\alpha_j}$, $|x|\leqq1$ のとき $\rho(x)^{\alpha_n}\leqq|x|\leqq\rho(x)\leqq1$, $|x|>1$のとき $1<\rho(x)\leqq|x|\leqq\rho(x)^{\alpha_n}$,

従って $C_1\leqq\rho(x)\leqq C_2$ のとき

$$(\min[C_1,1])^{\alpha_n-1}\rho(x)\leqq|x|\leqq(\max[C_2,1])^{\alpha_n-1}\rho(x).$$

定義. $K(x)$は次の条件を充たす kernel とする;

(a) $K(\lambda^{\alpha}x)=\lambda^{-|\alpha|}K(x)\qquad\lambda>0$

(b) $\int_{\Sigma}|K(x)|\,d\sigma<\infty,\qquad\int_{\Sigma}K(x)J(x')\,d\sigma=0$

(c) $\int_{[x;\,\rho(x)>4\rho(y)]}|K(x-y)-K(x)|\,dx\leqq C$ (Cはyに無関係の定数)

これを用いて更に次を定義する

$$K^{\circ}_{\varepsilon}(x)=\begin{cases}K(x) & \rho(x)>\varepsilon>0\\ 0 & \text{その他}\end{cases},\qquad K^{\circ}_{\varepsilon,r}(x)=\begin{cases}K^{\circ}_{\varepsilon}(x) & \rho(x)\leqq r\\ 0 & \rho(x)>r\end{cases}$$

$$(K^\circ_\varepsilon * f)(x) = \int_{R^n} K^\circ_\varepsilon(x-y)\cdot f(y)\,dy\ .$$

以下 C, A_p はその時々に異り，添加記号にだけ関係する定数を表わす.

§2.（L^p-収斂 1）

<u>定理1.</u>[1][2] $f \in C_0^\infty(R^n)$ のとき $(K^\circ_\varepsilon * f)(x)$ は到る所で存在して

$$\|K^\circ_\varepsilon * f\|_p \leqq A_p \|f\|_p \qquad 1<p<\infty,$$

$\exists g \in L^p;\ K^\circ_\varepsilon * f \to g\ (\varepsilon\to 0)$ in L^p 及び pointwise e.

（この g を $K^\circ * f$ と表わす）

<u>証明の概略.</u> $0<\varepsilon<\varepsilon'<5<r'<r$ とする. (b)の後半により

$$\left|(K^\circ_\varepsilon * f)(x) - (K^\circ_{\varepsilon'} * f)(x)\right| \leqq \int_\Sigma J(y')|K(y')|\left(\int_\varepsilon^{\varepsilon'} |f(x-y)-f(x)|\,\rho(y)^{-1}\,d\rho\right)d\sigma$$

$$\leqq C_\alpha \int_\Sigma J(y')\,|K(y')|\left(\int_\varepsilon^{\varepsilon'}\left(\sum_j \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x-\theta y)\right|\right)d\rho\right)d\sigma.$$

これにより定理の後半を得る.　　定理の前半は,

$\widehat{K^\circ_{\varepsilon,r}}(x) - \widehat{K^\circ_{\varepsilon,r'}}(x) = \widehat{K^\circ_{\varepsilon,\varepsilon'}}(x) + \widehat{K^\circ_{r',r}}(x)$ であり，$x \in \Sigma$ のとき

$$\left|\widehat{K^\circ_{\varepsilon,\varepsilon'}}(x)\right| = \left|\int_{R^n}(e^{\pi i x\circ y}-1)\,K^\circ_{\varepsilon,\varepsilon'}(y)\,dy\right|$$

$$\leqq \pi \int_\Sigma J(y')|K(y')|\left(\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \rho(y)^{-1}|y|\,d\rho\right)d\sigma$$

$$2\left|\widehat{K^\circ_{r',r}}(x)\right| = \left|\int_{R^n} e^{\pi i x\circ y}\left\{K^\circ_{r',r}(y-x) - K^\circ_{r',r}(y)\right\}dy\right|$$

$$\leqq 2\left(\int_{r'-1<\rho(y)<r'+2} + \int_{r-2<\rho(y)<r+1}\right)|K(y)|\,dy + \int_{\rho(y)>r'-1} |K(y-x)-K(y)|\,dy\ .$$

最後の項は(c)を用いると，各右辺が ε', r' に関係無く有界であ

り（ε', $\frac{1}{r'}$ と共に zero に収斂する）. 従って $\widehat{K^\circ_{\varepsilon,r}}(x)$ は有界(且つ $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to\infty}} \widehat{K^\circ_{\varepsilon,r}}(x)$ は存在する). $\widehat{K^\circ_{\varepsilon,r}}(\lambda^\alpha x)=\widehat{K^\circ_{\frac{\varepsilon}{\lambda},\frac{r}{\lambda}}}(x)$ であるから $x\notin\Sigma$ の場合も同じである. 従って $\|K^\circ_{\varepsilon,r}*f\|_2 \leqq A\|f\|_2$, Fatou の Lemma により $\|K^\circ_\varepsilon*f\|_2\leqq A\|f\|_2$. 又 $M>0$ のとき
$|[x:|(K^\circ_\varepsilon*f)(x)|>M]|\leqq \frac{C}{M}\|f\|_1$; $|E|$ は集合 E の Lebesgue 測度, となることが Hörmander の方法に全く類似の方法で導かれる. 以上の事柄に Marcinkiewicz の補間定理を用いて $1<p\leqq 2$ の場合を, conjugacy により $p>2$ の場合の結論を得る.

定理1により作用素 $K^\circ_\varepsilon(f)=K^\circ_\varepsilon*f$, $K^\circ(f)=K^\circ*f$ を L^p 上の有界作用素に拡張できる. それを

$$(K^\circ_\varepsilon*f)=\int K^\circ_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy$$
$$(K^\circ*f)=\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\int K^\circ_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy$$

と表わす. 特に $K(x)$ が Σ 上で有界のとき, 右辺は表現された意味で存在して $(K^\circ_\varepsilon*f)(x)$, $(K^\circ*f)(x)$ に等しい. $p=2$ の場合はこの条件が無くても $\|K^\circ_{\varepsilon,r}*f-K^\circ_{\varepsilon',r'}*f\|_2=A\|(\widehat{K^\circ_{\varepsilon,r}}-\widehat{K^\circ_{\varepsilon',r'}})\hat{f}\|_2$ $\to 0$ $(\varepsilon', \frac{1}{r'}\to 0)$ となる.

§3. (L^p-収斂 2)　特に $n=N+1$, $\alpha=(1,\cdots,1,\beta)$ $\beta\geqq 2$, の場合を考える. R^{N+1} の点を (x,t) $x\in R^N$, $t\in R^1$, (x,t) の §1 の意味での距離を $\rho(x,t)$ と表わす. kernel は条件(a)を

充たし，$t \leqq 0$ で $K(x,t)=0$ となるものを考える．(a)により，$t>0$ のとき $K(x,t)=K(t^{\frac{1}{\beta}} t^{-\frac{1}{\beta}}x,\ t\cdot 1)=t^{-\frac{N}{\beta}-1}K(t^{-\frac{1}{\beta}}x,\ 1)$ となるから

$$K(x,1)=\Omega(x), \qquad K(x,t)=t^{-\frac{N}{\beta}-1}\Omega(t^{-\frac{1}{\beta}}x), \quad t>0$$

と表わすことができる．今 $|x|\Omega(x)$ の可積分性を仮定すると§1の条件(b)(c)と，次の(b′)(c′)とが同値になる．

(b′) $\displaystyle\int_{R^N}|\Omega(x)|\,dx<\infty, \qquad \int_{R^N}\Omega(x)\,dx=0$

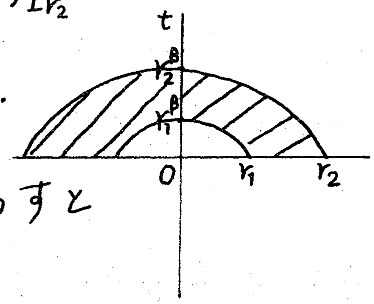
(c′) $\displaystyle\int_{[(x,t);\ t>(4\rho(y,s))^\beta]}\left|K(x-y,\ t-s)-K(x,t)\right|dx\,dt \leqq C.$

<u>(b)⟺(b′) の証明.</u> $I_\mu \equiv [(x,t);\ 0<t<\mu^\beta,\ \rho(x,t)>\mu>0]$ とする．

$$\int_{I_1}|K(x,t)|\,dx\,dt=\int_0^1 t^{-1}\int_{t^{\frac{1}{\beta}}|x|>\sqrt{1-t^2}}|\Omega(x)|\,dx\,dt$$
$$\leqq \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{\beta}-1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\int_{R^N}|x|\,|\Omega(x)|\,dx=C<\infty$$

であるから変数変換が可能で $\displaystyle\int_{I_\mu}K(x,t)\,dx\,dt=\int_{I_1}K(x,t)\,dx\,dt$ となる．従って $r_2>r_1>0$ とすると

$$\int_{[(x,t);\ r_1<\rho(x,t)<r_2]}K(x,t)\,dx\,dt=\left(\int_{r_1^\beta}^{r_2^\beta}\int_{R^N}+\int_{I_{r_1}}-\int_{I_{r_2}}\right)K(x,t)\,dx\,dt$$
$$=\int_{r_1^\beta}^{r_2^\beta}\int_{R^N}K(x,t)\,dx\,dt.$$



左辺を極座標で，右辺をΩを用いて表わすと

$$\int_\Sigma K(x,t)\,J(x',t')\,d\sigma=\beta\int_{R^N}\Omega(x)\,dx.$$

$|K(x,t)|$, $|\Omega(x)|$ を代入しても同様である．次に(b)を仮定して

<u>(c)⟺(c′) の証明.</u> $\rho(y,s)=\rho_1$ と書く．

$$\int_{[(x,t);\ \rho(x,t)>4\rho_1]} |K(x-y,t-s)-K(x,t)|\,dx\,dt$$

$$(1)\qquad = \int_{[(x,t);\ t>(4\rho_1)^\beta]} + \int_{[(x,t);\ t\leqq(4\rho_1)^\beta,\ \rho(x,t)>4\rho_1]} |K(x-y,t-s)-K(x,t)|\,dx\,dt.$$

右辺才二項の積分範囲に於て $\rho(x-y,t-s)\geqq 3\rho_1$, $|s|\leqq\rho_1^\beta$, 従って $|t-s|\leqq(4^\beta+1)\rho_1^\beta$ であるから才二項は次式で抑えられる.

$$\Big(\int_{[(x,t);\ t<(4^\beta+1)\rho_1^\beta,\ \rho(x,t)>3\rho_1]} + \int_{I_{4\rho_1}}\Big)|K(x,t)|\,dx\,dt \leqq \Big(\int_{I_{4\rho_1}} + \int_{I_{3\rho_1}} +$$

$$+ \int_{(3\rho_1)^\beta}^{(4^\beta+1)\rho_1^\beta}\int_{R^N}\Big)|K(x,t)|\,dx\,dt \leqq 2C + \int_{(3\rho_1)^\beta}^{(4^\beta+1)\rho_1^\beta} t^{-1}\,dt\int_{R^N}|\Omega(x)|\,dx.$$

従って(1)から (c) $\Leftrightarrow$ (c′) となる.

応用上で用いられる kernel の truncation を定義する;

定義.
$$K_\mu(x,t)=\begin{cases} K(x,t) & t>\mu>0 \\ 0 & その他\end{cases}$$

$$\mathfrak{f}_\mu(x,t)=(K_\mu * f)(x,t)=\int_{R^{N+1}} K_\mu(x-y,t-s)\cdot f(y,s)\,dy\,ds.$$

定理2. $\Omega(x)$ が有界で $|x|\Omega(x)\in L^1(R^N)$ 且つ (B′)(C′) を充たすとき, $f\in L^p(R^{N+1})$ $1<p<\infty$ であれば

$$\|\mathfrak{f}_\mu\|_p \leqq A_p\|f\|_p,$$

$$\exists\,\mathfrak{f}\in L^p;\ \mathfrak{f}_\mu\to\mathfrak{f}\ (\mu\to 0)\ \text{in } L^p.$$

証明. 各項の値が存在する点で

$$(2)\qquad (K_{\mu^\beta}*f)(x,t)=(K^0_\mu*f)(x,t)+((K_{\mu^\beta}-K^0_\mu)*f)(x,t).$$

又 $$\int_{R^{N+1}}|K_{\mu^\beta}(x,t)-K^0_\mu(x,t)|\,dx\,dt=\int_{I_\mu}|K(x,t)|\,dx\,dt = C.$$

従って $f\in C_0^\infty$ のとき, (2)の右辺に定理1及び Young の不等式

を用いて結論を得る. これと $K_\mu \in L^q(R^{N+1})$ $^\forall q>1$, を用いて一般の場合の結論を得る.

adjoint kernel $K^*(x,t)=K(-x,-t)$ は K と対称的に同じ条件を充たすから, $K^*_\mu * f$ に関しても同じ結論が成立つ. 定理2の微分方程式論えの応用については(3)に述べられている.

§4. (*pointwise* の収斂)　この節で現れる補助函数 $\varphi(x,t)$ $x\in R^N$, $t\in R^1$, は凡て, 次の性質をもつものとする;

$\psi_1(t)\geqq 0$; $t>0$ で単調減少, $t\leqq 0$ で $=0$, R^1 上で可積分

$\psi_2(|x|)\geqq 0$; $|x|$ の単調減少函数, R^N 上可積分,

以上のような ψ_i が存在して $\varphi(x,t)=\psi_1(t)t^{-\frac{N}{\beta}}\psi_2(t^{-\frac{1}{\beta}}|x|)$ と表わすことができる.

考える *kernel* は, §3 に記されたもので条件 (b'), (c'), $|x|\Omega(x)\in L^1(R^N)$ 及び次の (c'') を充たしているものと仮定する;

(c'')　$\exists\, \varphi(x,t)$;

$$t>2,\ |s|,|y|\leqq 1 \Rightarrow |K(x-y,t-s)-K(x,t)|\leqq\varphi(x,t)$$

$$|x|>2 \qquad \Rightarrow \int_0^4\int_{|y|\leqq 1}|K(x-y,s)|\,dy\,ds\leqq\varphi(x,1).$$

例えば $|\Omega(x)|+|\frac{\partial}{\partial x_j}\Omega(x)|\leqq C(1+|x|^{N+\delta})^{-1}$ $\delta>1$[(4)], のとき (c'') は成立つ.　又 $(b')(c'')\Rightarrow(b')(c')$ が云える.

<u>定理3.</u> $f\in L^p(R^{N+1})$ $1<p<\infty$, とする.

$u \to 0$ のとき殆んど到る所で $\hat{f}_u(x,t) \to \hat{f}(x,t)$

且つ $\| \sup_{u>0} |\hat{f}_u(x,t)| \|_p \leqq A_p \|f\|_p$.

補助定理 3.1 $|H(x,t)| \leqq \varphi_1(x,t) + \varphi_2(x,-t)$ であるとき compact support をもつ任意の階段函数 f に対して

$$\lim \lambda^{N+\beta} \int_{R^{N+1}} H(\lambda(x-y), \lambda^\beta(t-s)) \cdot f(y,s)\,dy\,ds = f(x,t) \int_{R^{N+1}} H(y,s)\,dy\,ds \quad a.e.$$

証明. f を区間 I (R^{N+1} の区間) の特性函数とする. (x,t) を I の内点として正数 r_1, r_2 を次のようにえらぶ;

$$|x-y| \leqq r_1, \ |t-s| \leqq r_2 \Rightarrow f(y,s) = 1 .$$

lim 記号下の積分を変数変換して, 次のように表わす.

$$\left(\int_{|s| \leqq \lambda^\beta r_2} \int_{|y| \leqq \lambda r_1} + \int_{|s| > \lambda^\beta r_2} \int_{R^N} + \int_{|s| \leqq \lambda^\beta r_2} \int_{|y| > \lambda r_1} \right) H(y,s) \cdot f\left(x - \frac{y}{\lambda}, t - \frac{s}{\lambda^\beta}\right) dy\,ds.$$

$\lambda \to \infty$ のとき, 第一積分は $\int H(y,s)\,dy\,ds$ に収斂する. 残りは, R^{N+1} 上で $\varphi_i(x,t)$ が可積分であるから, zero に収斂する.

定義. $f \in L^p(R^{N+1})$ $1 \leqq p \leqq \infty$ とする.

$$\bar{f}(x,t) = \sup_{r>0} \frac{1}{c r^N} \int_{|y|<r} |f(x-y,t)|\,dy$$

(c は R^N の単位球の測度)

$$\bar{\bar{f}}(x,t) = \sup_{|\sigma|>0} \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \bar{f}(x, t-s)\,ds .$$

補助定理 3.2 $H(x,t)$ は 3.1 の条件を充たすものとする. $f \in L^p(R^{N+1})$ $1 < p$, のとき 殆んど到る所で

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^{N+\beta} \left| \int_{R^{N+1}} H(\lambda(x-y), \lambda^\beta(t-s)) \cdot f(y,s)\,dy\,ds \right| \leqq \bar{\bar{f}}(x,t) \int_{R^{N+1}} (\varphi_1 + \varphi_2)\,dy\,ds.$$

証明. $f^\lambda(x,t) \equiv \lambda^{N+\beta} \int_{R^{N+1}} \varphi(\lambda(x-y), \lambda^\beta(t-s)) \cdot |f(y,s)|\,dy\,ds$ とする.

$\bar{f}$, $\bar{\bar{f}}$共に定義できる点(x,t)に於て次式が成立つことを云えばよい;
$$\sup_{\lambda>0}|f^{\lambda}(x,t)| \leqq \bar{\bar{f}}(x,t)\int_{R^{N+1}}\varphi\, dy\, ds.$$
今R^Nの，中心x，半径rの球上での$|f(x-y,t-s)|$の積分を$I_s(r)$と表わす．φの定義により
$$f^{\lambda}(x,t)=\lambda^{N+\beta}\int_0^\infty \psi_1(\lambda^\beta s)(\lambda^\beta s)^{-\frac{N}{\beta}}\left(\int_0^\infty \psi_2(s^{-\frac{1}{\beta}}r)\,dI_s(r)\right)ds.$$
ψ_2の単調減少性から，$r\to0$又は$r\to\infty$のとき$r^N\psi_2(s^{-\frac{1}{\beta}}r)\to0$．又$I_s(r)\leqq cr^N\bar{f}(x,t-s)$．従ってこの事柄を用いながら二度部分積分を行うと
$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \psi_1(\lambda^\beta s)(\lambda^\beta s)^{-\frac{N}{\beta}}\left(\int_0^\infty \psi_2(s^{-\frac{1}{\beta}}r)\,dI_s(r)\right)ds\\ &\qquad\leqq -c\int_0^\infty \psi_1(\lambda^\beta s)(\lambda^\beta s)^{-\frac{N}{\beta}}\bar{f}(x,t-s)\left(\int_0^\infty r^N d\psi_2(s^{-\frac{1}{\beta}}r)\right)ds\\ &\qquad\qquad=\int_0^\infty \psi_1(\lambda^\beta s)(\lambda^\beta s)^{-\frac{N}{\beta}}\bar{f}(x,t-s)\left(\int_{R^N}\psi_2(s^{-\frac{1}{\beta}}|y|)\,dy\right)ds.\end{aligned}$$
ここで$\bar{f}(x,t-\sigma)$をσについて$(0,s)$上で積分したものを$I(s)$と表わすと最後の式は次のように書ける
$$\int_0^\infty \psi_1(\lambda^\beta s)(\lambda^\beta s)^{-\frac{N}{\beta}}\left(\int_{R^N}\psi_2(s^{-\frac{1}{\beta}}|y|)\,dy\right)dI(s).$$
ψ_1の単調減少性により$s\to0$又は$s\to\infty$のとき$s\psi_1(s)\to0$，又$I(s)\leqq s\bar{\bar{f}}(x,t)$であるから再び部分積分をくり返し行うと上式は$\bar{\bar{f}}(x,t)\int_{R^{N+1}}\varphi(\lambda y,\lambda^\beta s)\,dy\,ds$に等しくなる．

<u>定理3の証明.</u> $H(x,t)$を，集合$[(x,t);|x|\leqq1,\frac{1}{2}<t<1]$内にsupportをもち$\int H\,dx\,dt=1$となる$C^\infty$に属す函数とする．$\tilde{f}_n$の$L^p$-収斂による極限函数$\tilde{f}$を用いて次の$(\tilde{f})_\lambda$を定義する．

$$(\hat{f})_\lambda(x,t) = \lambda^{N+\beta}\int_{R^{N+1}} H(\lambda(x-y), \lambda^\beta(t-s))\cdot \tilde{f}(y,s)\,dy\,ds.$$

定理 3.2，$\|\bar{\bar{g}}\|_p \leqq A_p\|g\|_p$ 及び定理2 により

(1) $$\|\sup_{\lambda>0}|(\hat{f})_\lambda|\,\|_p \leqq A_p'\|\tilde{f}\|_p \leqq A_p\|f\|_p.$$

定理 3.1 と(1)の第一不等式を用いると，よく知られている方法で $\lambda\to\infty$ のとき$(\hat{f})_\lambda$ が a.e. 収斂することが云える。

又 $H\in C_0^\infty$ だから

$$(\hat{f})_\lambda(x,t) = \lim_{\mu\to 0}\lambda^{N+\beta}\int H(\lambda(x-y), \lambda^\beta(t-s))\cdot \tilde{f}_\mu(y,s)\,dy\,ds$$

$$= \lambda^{N+\beta}\int f(z,\sigma)\,dz\,d\sigma \lim_{\mu\to 0}\int H(\lambda(x-y), \lambda^\beta(t-s))K_\mu(y-z, s-\sigma)\,dy\,ds.$$

これに $K_\mu(y,s) = \mu^{-\frac{N}{\beta}-1}K_1(\mu^{-\frac{1}{\beta}}y, \mu^{-1}s)$ の関係を代入して変数変換をおこなうと，内部の積分は $\int K_{\lambda^\beta\mu}(\lambda(x-z)-y, \lambda^\beta(t-\sigma)-s)\cdot H(y,s)\,dy\,ds$ となる。$\mu\to 0$ のときこれは各点で $\hat{H}(\lambda(x-z), \lambda^\beta(t-s))$ に収斂する。従って $(\hat{f})_\lambda(x,t) = \lambda^{N+\beta}\int \hat{H}(\lambda(x-y), \lambda^\beta(t-s))\cdot f(y,s)\,dy\,ds$。従って

(2) $$(\hat{f})_\lambda(x,t) - \tilde{f}_{\lambda^{-\beta}}(x,t) = \lambda^{N+\beta}\int G(\lambda(x-y), \lambda^\beta(t-s))\cdot f(y,s)\,dy\,ds$$

ここに $G(x,t) = \hat{H}(x,t) - K_1(x,t)$ である。

$|G(x,t)| \leqq \varphi_1(x,t) + \varphi_2(x,-t)$ を充たす φ_i の存在を云えば，(2) の右辺に 3.2 を用い，これと(1)とにより定理3の証明を終る。以下で φ_i の存在を証明する。

(i) $t>2$ のとき

$$G(x,t) = \int\{K(x-y, t-s) - K(x,t)\}H(y,s)\,dy\,ds$$

であるから条件(C″) により φ は存在する。

(ii) $\frac{1}{2}<t<2$，$|x|>2$ のとき。

$$|\hat{H}(x,t)| \leqq \int |K(x-y,t-s)|\cdot|H(y,s)|\,dy\,ds \leqq C\int_0^3 \int_{|y|\leqq 1} |K(x-y,s)|\,dy\,ds.$$

(C″) によりこれは $\varphi(x,t)$ で抑えられる. $\frac{1}{2}<t<3$ としてもこれが云えるから (i) を考えると $2<t<3$, $|x|>2$ で

$$|K_1(x,t)| \leqq |G(x,t)| + |\hat{H}(x,t)| \leqq \varphi(x,t)$$ (φ は前のものと異る).

即ち $|\Omega(t^{-\frac{1}{\beta}}x)| \leqq \psi_2(t^{-\frac{1}{\beta}}|x|)$ となる ψ_2 が存在する. 従って $|x|>3^{-\frac{1}{\beta}}\times 2$ で $|\Omega(x)| \leqq \psi_2(|x|)$. 従って $\frac{1}{2}<t<2$, $|x|>2$ で $|K_1(x,t)| \leqq \varphi(x,t)$ となる φ が存在する.

(iii) $t \leqq \frac{1}{2}$ のとき $K_1(x,t)=0$, $\hat{H}(x,t)=0$.

(iv) $\frac{1}{2}<t<2$, $|x|\leqq 2$ のとき. $\hat{H}(x,t)$ は有界だから或 $\varphi(x,t)$ で抑えられる. (ii)の場合と同様に考えて $|\Omega(x)| \leqq \psi_2(|x|)$ $|x|>0$, となる ψ_2 が存在する. 従って $K_1(x,t)$ を抑える $\varphi(x,t)$ が存在する.

Q. E. D.

文　献

(1) E. B. Fabes, N. M. Rivière; Singular integrals with mixed homogeneity, Studia Math. XXVII (1966) 19—38

(2) ——————; Symbolic calculus of kernels with mixed homogeneity, Proc. Symp. in Pure Math. X (1967) 106-127

(3) E. B. Fabes; Singular integrals and partial differential equations of parabolic type, Studia Math. XXVIII (1966) 81—131

(4) E. B. Fabes, C. Sadosky; Pointwise convergence for parabolic singular integrals, Studia Math. XXVI (1966) 225—232.