数理解析研究所講究録
第110巻 1971年 25-35



# Carleson - Hunt - Sjölin の結果について

金沢大 理 小嶋迪孝

## §1. 序

本報告の目的は、L. Carleson [1], R.A. Hunt [2] 及び P. Sjölin [5] の結果の証明について若干の注釈をつけ加えることにある。

$f(x)$ を実数値函数で周期 $2\pi$ をもち、$(-\pi,\pi)$ で可積分とする。$S_n(f)(x)$ を $f(x)$ のフーリエ級数の第 $n$ 部分和 $(n\geq 0)$ とし、$M(f)(x) = \sup_{n\geq 0}|S_n(f)(x)|$ とする。この時次の定理が成立する。

<u>定理1 (L. Carleson).</u> $f(x)\in L^2(-\pi,\pi)$ ならば

(I) $S_n(f)(x)$ は a.e. converge する。

(II) $m\{x\in(-\pi,\pi) : M(f)(x) > y\} \leqq C\, y^{-2}\, \|f\|_2^2 \quad (y>0)$ .

<u>定理2 (R.A. Hunt).</u>

(I) $\|M(f)\|_p \leqq C_p \|f\|_p \quad (1<p<\infty), \quad C_p \leqq C\dfrac{p^4}{(p-1)^3}$

(II) $\|M(f)\|_1 \leqq C\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|(\log^+|f(x)|)^2\,dx + C$

(III) $m\{x\in(-\pi,\pi) : M(f)(x)>y\} \leqq C' e^{-C\frac{y}{\|f\|_\infty}} \quad (y>0)$.

<u>定理3 (P. Sjölin).</u> $f(x)\in L\log^+L\log^+\log^+L\,(-\pi,\pi)$ ならば

$S_n(f)(x)$ は a.e. converge する。

L. Carleson は定理1を次の命題に帰着している。

<u>命題 1-1</u>. $f(x) \in L^2(-\pi,\pi)$ ならば $M(f)(x)$ は正測度をもつある集合上で有限である。

これより定理1が得られることは次のようにしてわかる。

(I). 結論を否定すると，ある正測度をもつ集合が $L^2(-\pi,\pi)$ に対する発散集合である。従って $(-\pi,\pi)$ 全体が $L^2(-\pi,\pi)$ に対する発散集合である（Katznelson [4], p. 58, 定理 3.5）。従ってすべての $x \in (-\pi,\pi)$ に対して $M(g)(x)=\infty$ なるような $g(x) \in L^2(-\pi,\pi)$ が存在する（Katznelson [4], p. 55, 定理）。これは命題 1-1 に矛盾する。

(II) は，(I) より A. Zygmund [7], vol II, p. 165, 定理 (1.22) より知られるが，E. M. Stein [6], p. 148, 系1 より命題 1-1 を用いて示すことも出来る。

命題 1-1 は次のように変形される。

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)} f(t)\,dt \qquad (n \geq 0)$$

$$S_n^*(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{e^{-int}}{x-t} f(t)\,dt\,,$$

$$S_n^{**}(f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(e^{inx} S_n^*(f)(x) - e^{-inx} S_{-n}^*(f)(x)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{\sin n(x-t)}{x-t} f(t)\,dt$$

$$M^{*}(f)(x) = \sup_{n} |S_n^{*}(f)(x)|$$

$$M^{**}(f)(x) = \sup_{n} |S_n^{**}(f)(x)|$$

とおく。そうすると $|S_n(f)(x) - S_n^{**}(f)(x)| \leqq C\|f\|_1$ for all $n \geqq 0$

が成立する故

$$M(f)(x) \leqq M^{**}(f)(x) + C\|f\|_1 \leqq M^{*}(f)(x) + C\|f\|_1$$

従って命題1-1は次の命題1-2より示される。

命題1-2　$f(x) \in L^2(-\pi,\pi)$ ならば $M^{*}(f)(x)$ は正測度をもつある集合上で有限である。

この命題1-2は次の命題より示され，その証明がCarlesonの論文である。

命題（L. Carleson）．$f(x) \in L^2(-\pi,\pi)$，$\|f\|_2 = \varepsilon$ $(0<\varepsilon<1$，十分小$)$，正整数 $N$ に対して，ある集合 $E_{\varepsilon,N}$ が存在して，

$$m(E_{\varepsilon,N}) \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \to 0) \quad \text{unif in } N$$

$$x \in (-\pi,\pi) - E_{\varepsilon,N} \Rightarrow \sup_{0 \leqq n \leqq \Lambda 2^N} |S_n^{*}(f)(x)| \leqq A_\varepsilon \qquad (0<\Lambda<1)$$

ここで $A_\varepsilon$ は，$N$ に無関係で $\to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ 。

R. A. Hunt 及び P. Sjölin は Carleson の証明方法を応用して次の"Basic Result"を証明しこれより結果を導いている。

<u>Basic Result (R.A. Hunt)</u>　任意の可測集合 $F \subset (-\pi,\pi)$ に対して

$$m\{x \in (-\pi,\pi) : M^*(\chi_F)(x) > y\} \leqq \left(\text{const}\,\frac{p^2}{p-1}\right)^p y^{-p}\, m(F) \quad (1<p<\infty,\ y>0)$$

§ 2. 定理 2 の Basic Result への帰着.

これは Lorentz space の立場で考える。$f(x) \in L(-\pi,\pi)$ に対し,

$$\lambda_f(y) \equiv m\{x \in (-\pi,\pi) : |f(x)| > y\}, \quad (y>0)$$

$$f^*(t) \equiv \inf_{\lambda_f(y) \leqq t} y \quad (t>0)$$

とする。そして $1 \leqq p < \infty$ に対して

$$L(p,1) \equiv \{f(x) : \|f\|^*_{p,1} < \infty\}, \quad \|f\|^*_{p,1} \equiv \frac{1}{p}\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \frac{1}{t}\,dt$$

$$L(p,\infty) \equiv \{f(x) : \|f\|^*_{p,\infty} < \infty\}, \quad \|f\|^*_{p,\infty} \equiv \sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\}$$

$$L(p,p) \equiv \{f(x) : \|f\|^*_{p,p} < \infty\}, \quad \|f\|^*_{p,p} \equiv \left[\int_0^\infty (f^*(t))^p dt\right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

とする。また更に

$$\|f\|_{p,\infty} \equiv \sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\}, \quad f^{**}(t) \equiv \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds = \frac{1}{t}\sup_{E : m(E)=t}\int_E |f(x)|\,dx$$

とおく。そうすると $\|f\|^*_{p,\infty}$ は三角不等式をみたさないが, $\|f\|_{p,\infty}$ はそれをみたし, そしてこれらの間には次の不等式が成立する:

$$\|f\|^*_{p,\infty} \leqq \|f\|_{p,\infty} \leqq \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{p,\infty} \quad (1<p<\infty).$$

Basic Result より次の命題が成立する。

命題 2-1. 任意の可測集合 $F \subset (-\pi, \pi)$ に対して

$$\|M^*(\chi_F)\|^*_{p,\infty} \leqq B_p \|\chi_F\|^*_{p,1} \quad (1<p<\infty), \qquad B_p \leqq \text{const.}\ \frac{p^2}{p-1}$$

命題 2-2. 任意の単函数 $f(x)$ に対して

$$\|M^*(f)\|_{p,\infty} \leqq A_p \|f\|^*_{p,1} \quad (1<p<\infty), \qquad A_p \leqq \text{const.}\ \frac{p^3}{(p-1)^2}$$

命題 2-3. 任意の $f(x) \in L(p,1)$ $(1<p<\infty)$ に対して

$$\|M^{**}(f)\|_{p,\infty} \leqq A_p \|f\|^*_{p,1} \quad (1<p<\infty), \qquad A_p \leqq \text{const.}\ \frac{p^3}{(p-1)^2}.$$

命題 2-3 は証明が必要であるように思われる。これを簡単に述べる。与えられた函数 $f(x) \in L(p,1) \subset L$ $(1<p<\infty)$ に対して

$$g_k(x) \equiv \begin{cases} k & \text{for } f(x) > k \\ \dfrac{i}{2^k} & \text{for } \dfrac{i}{2^k} < f(x) \leqq \dfrac{i+1}{2^k} \quad (i=0,1,2,\cdots,k2^k-1) \\ 0 & \text{for } f(x)=0 \\ -\dfrac{i}{2^k} & \text{for } -\dfrac{i+1}{2^k} \leqq f(x) < -\dfrac{i}{2^k} \quad (i=0,1,2,\cdots,k2^k-1) \\ -k & \text{for } f(x) < -k \end{cases}$$

ここで $k=1,2,3,\cdots$。そうすると $|g_k(x)| \uparrow |f(x)|$ $(k\to\infty)$.

今単函数列 $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ を次のように定義する。

$$f_0(x) \equiv g_1(x)$$

$$f_k(x) \equiv g_{k+1}(x) - g_k(x) = f_k^1(x) + f_k^2(x) \qquad (k=1,2,3\cdots)$$

こゝで，$f_k^1(x)$ は $|f(x)|\leqq k$ なる部分より得られたものであり，$f_k^2(x)$ は $E_k \equiv \{x : |f(x)|>k\}$ なる部分より得られたものである。そうすると $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$，$|f(x)|=\sum_{k=0}^{\infty}|f_k(x)|$ が成立する。

今命題2-2を用いて

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|M^*(f_k)\|_{p,\infty} \leqq A_p\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\|f_k^1\|_{p,1}^* + \sum_{k=0}^{\infty}\|f_k^2\|_{p,1}^*\right\}$$

$$\leqq \underbrace{\mathrm{const.}}_{A_p}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}[m(E_k)]^{\frac{1}{p}}\right\}$$

が得られ，そして最後の級数は $f(x)\in L(p,1)$ 故収束する。またすべての正整数Nに対して

$$\|M^{**}(f)\|_{p,\infty} \leqq \|M^{**}(\sum_{k=0}^{N-1} f_k)\|_{p,\infty} + \|M^{**}(\sum_{k=N}^{\infty} f_k)\|_{p,\infty},$$

こゝで才1項は命題2-2を用いて $A_p\|f\|_{p,1}^*$ でおさえられる。才2項は $\sum_{k=N}^{\infty}\|M^*(f_k)\|_{p,\infty}$ でおさえられ，これはNが十分大きくなれば十分小さくなる。従って命題2-3が成立する。

またこれより次の命題は明らかである。

<u>命題2-4</u>　任意の $f(x)\in L(p,1)$ $(1<p<\infty)$ に対して

$$\|M(f)\|_{p,\infty} \leqq A_p\|f\|_{p,1}^*, \qquad A_p \leqq \mathrm{const.}\frac{p^3}{(p-1)^2}.$$

この命題より定理2は Hunt [3] のある補間定理の考えで(I)が証明出来，(II)(III) もよく知られている方法によって示される。(I)の証明を簡単に述べる。

$f(x) = f^t(x) + f_t(x)$ と分解する，こゝで

$$f^t(x) \equiv \begin{cases} f(x) & \text{for } |f(x)| > f^*(t) \\ 0 & \text{for } |f(x)| \leqq f^*(t) \end{cases}$$

そうすると $(M(f))^*(u) \leqq (M(f^t))^*(\frac{u}{2}) + (M(f_t))^*(\frac{u}{2})$ でそして

$$(f^t)^*(u) \leqq \begin{cases} f^*(u) & \text{for } 0<u<t \\ 0 & \text{for } u \geqq t \end{cases}$$

$$(f_t)^*(u) \leqq \begin{cases} f^*(t) & \text{for } 0<u<t \\ f^*(u) & \text{for } u \geqq t \end{cases}.$$

今与えられた $p$ に対して，$p_0 = \frac{1}{2}(p+1)$，$p_1 = 2p-1$ とおく。そうすると $1<p_0<p<p_1<\infty$ で，$f^t(x) \in L(p_0, 1)$，$f_t(x) \in L(p_1, 1)$．
従って命題 2-4 を $(f^t, p_0)$，$(f_t, p_1)$ に対して適用することにより

$$\|M(f)\|^*_{p,p} \leqq A_{p_0} 2^{\frac{1}{p_0}} \frac{1}{p_0} \left\{ \int_0^\infty \left[ \int_0^t u^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(u)\,du \right]^p u^{-(\frac{p}{p_0}-1)-1}\,du \right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$+ A_{p_1} 2^{\frac{1}{p_1}} \frac{1}{p_1} \left\{ \int_0^\infty \left[ \int_t^\infty u^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(u)\,du \right]^p u^{(1-\frac{p}{p_1})-1}\,du \right\}^{\frac{1}{p}} + A_{p_1} 2^{\frac{1}{p_1}} \|f\|^*_{p,p}$$

が得られ，そして Hardy の不等式を適用して

$$\|M(f)\|^*_{p,p} \leqq C(p, p_0, p_1) \|f\|^*_{p,p}$$

こゝで

$$C(p, p_0, p_1) \leqq \text{const} \frac{p_0^3}{(p_0-1)^2} \frac{p}{p-p_0} + \text{const} \frac{p_1^3}{(p_1-1)^2} \frac{p_1}{p_1-p}$$
$$\leqq \text{const} \frac{p^4}{(p-1)^3}$$

## §3　定理3の Basic Result への帰着

Basic Result より次の命題が成立する。

命題3-1. 任意の可測集合 $F \subset (-\pi,\pi)$ に対して

$$m\{x \in (-\pi,\pi) ;\ M(\chi_F)(x) > y\} \leqq \left(\mathrm{const}\,\frac{p^2}{p-1}\right)^p y^{-p}\, m(F) \quad (1<p<\infty,\ y>0)$$

従ってこれより次の評価が得られる。

(1)　$m\{x \in (-\pi,\pi) ;\ M(\chi_F)(x) > y\} \leqq \mathrm{const}\,\frac{1}{y}\log\frac{1}{y}\cdot m(F)$　for $0<y<\frac{1}{2}$

(2)　$m\{x \in (-\pi,\pi) ;\ M(\chi_F)(x) > y\} \leqq \mathrm{const}\, y^{-2}\, m(F)$　for $y>0$.

次に函数空間Nをとる値が0または $2^{N_1}+2^{N_2}+\cdots+2^{N_n}$ ($N_n<N_{n-1}<\cdots<N_2<N_1$, $N_i$ は整数) の単函数の集合と定義する。また $f(x) \in L\log^+L\log^+\log^+L(-\pi,\pi)$ に対して

$$J(f) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\left\{\log^+|f(x)|\log^+\log^+|f(x)|+1\right\}dx$$

とおく。今 $f(x)\in N$, $J(f)<1$ なる任意の $f(x)$ に対して $\bar{f}(x)\in N$, $J(\bar{f})<1$ なる $\bar{f}(x)$ を次のように定義する。

(a). $J(f)=0$ の時. $\bar{f}(x)\equiv 0$

(b). $J(f)>0$ の時. $\alpha=\alpha(f)$ を $J(f)\geqq 5\cdot 2\pi\cdot\alpha'$ $\left(\alpha'=\frac{1}{2^n}\ (n\geqq 2)\right)$ をみたす最大の $\alpha'$ とし, 集合 $G_n \equiv \left\{x\in(-\pi,\pi) ;\ 2^n \leqq \frac{1}{\alpha}f(x) < 2^{n+1}\right\}$ $(n\geqq 2)$ とするとき

$$\bar{f}(x) \equiv f(x) - \alpha\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \chi_{G_n}(x) .$$

そうすると次の評価が得られる。

(3) $f(x)\in N,\ J(f)<1 \Rightarrow J(\bar{f}) \leqq \frac{9}{10} J(f)$.

評価(1)(2)から次の命題が示される。

命題 3-2. $f(x)\in N$, $J(f)<1$ ならばある集合 $E=E_f$ が存在して

$$m(E) \leqq \text{const}\, [J(f)]^{\frac{1}{5}}$$

$$x\in(-\pi,\pi)-E \Rightarrow M(f)(x) \leqq M(\bar{f})(x) + [J(f)]^{\frac{2}{5}}.$$

この命題及び評価(3)から次の命題が得られる。

命題 3-3. $J(f)<1$ ならば、ある集合 $E=E_f$ が存在して

$$m(E) \leqq C_1 [J(f)]^{\frac{1}{5}}$$

$$x\in(-\pi,\pi)-E \Rightarrow M(f)(x) \leqq C_2 [J(f)]^{\frac{2}{5}}$$

定理3の証明は、結論否定すると、ある函数 $f(x)$ : $J(f)<\infty$ が存在して、ある $\varepsilon>0$ 及び $\delta>0$ に対して

$$m\left\{x\in(-\pi,\pi) ;\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(f)(x) - \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(f)(x) \geqq \varepsilon \right\} \geqq \delta.$$

この $\varepsilon>0$ 及び $\delta>0$ に対して、ある三角多項式 $T(x)$ が存在して

$$J(f-T) < 1$$

$$[J(f-T)]^{\frac{1}{5}} < \frac{\delta}{C_1} \qquad (C_1, C_2 \text{ は命題3-3のもの}).$$

$$[J(f-T)]^{\frac{2}{5}} < \frac{\varepsilon}{C_2}.$$

従って

$$\varlimsup_{n\to\infty} S_n(f)(x) - \varliminf_{n\to\infty} S_n(f)(x) = \varlimsup_{n\to\infty} S_n(f-T)(x) - \varliminf_{n\to\infty} S_n(f-T)(x)$$
$$\leqq M(f-T)(x) + M(f-T)(x) = 2M(f-T)(x)$$
$$\leqq 2C_2[J(f-T)]^{\frac{2}{5}} < \varepsilon \quad \text{for } x \in (-\pi,\pi) - E_{f-T},$$
$$m(E_{f-T}) \leqq C_1[J(f-T)]^{\frac{1}{5}} < \delta.$$

これは矛盾である。

引用文献


[1] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math., 116 (1966), 135-157.

[2] R.A. Hunt, On the convergence of Fourier series, Orthogonal expansions and their continuous analogues, Southern Illinois University Press, 1968, 235-255.

[3] R.A. Hunt, On L(p,q) spaces, Enseignment Math., 12 (1966), 249-276.

[4] Y. Katznelson, An introduction to harmonic analysis, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[5] P. Sjölin, An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series, Arkiv för Matematik, 7-42 (1968), 551-570.

[6] E.M. Stein, On limits of sequences of operators, Ann. Math., 74 (1961), 140-170.

[11] A. Zygmund, Trigonometric Series, vols. 1 and 2, Cambridge University Press, New York, 1959.