数理解析研究所講究録
第110巻 1971年 36-46



# あるバナッハ代数とヤコビの多項式

東北大 理　猪狩 惺

## §1. 序

始めに Gegenbauer 多項式のよく知られているいくつかの事柄を述べよう（例えば [3], [4], [10] など参照）.

degree $\lambda$ の Gegenbauer 多項式は

$$(1-2tr+r^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\lambda}(t)\, r^2, \quad - < r < 1, \ -1 \le t \le 1$$

によって定義される. $C_k^{\lambda}(t)$ はまた

$$(1) \qquad C_k^{\lambda}(t) = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(2\lambda+k)}{\Gamma(\lambda+k+\frac{1}{2})\Gamma(2\lambda)} \cdot \frac{(-1)^k}{2^k k!} \cdot \frac{1}{(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{d^k}{dt^k}(1-t^2)^{\lambda+k-\frac{1}{2}}$$

とかかれる, そして直交関係

$$(2) \qquad \int_{-1}^{1} C_k^{\lambda}(t)\, C_l^{\lambda}(t)\, (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{\pi\, \Gamma(2\lambda+k)}{2^{2\lambda-1} k!\,(k+\lambda)\,\Gamma^2(\lambda)}\, \delta_{kl}$$

をもつ, ここに $\delta_{kl}$ は Kronecker の記号である. 関係式 (2) によって $C_k^{\lambda}(t)$ を定義してもよい, すなわち, $\{C_k^{\lambda}\}$ は,

$1, t, t^2, \cdots$ を内積 $\int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, dt$ に関して Gram-Schmidt の方法で直交化したものである，但し定数倍をして (2) が成りたつようにしておく．

以下 $\lambda=(n-2)/2$, $n=3, 4, \cdots$ とする．今，$\varphi(t)$ を区間 $[-1, 1]$ 上の関数とすれば，$\varphi(\xi\cdot\mathbf{1})$ は $\mathbb{R}^n$ の単位球面 $S^{n-1}$ 上の関数となる，ここに $\mathbf{1}=(0, \cdots, 0, 1)\in S^{n-1}$ である．従って $d\xi$ を $S^{n-1}$ 上の正規化したルベーグ測度とすれば

$$\int_{S^{n-1}} \varphi(\xi\cdot\mathbf{1})\, d\xi = c_\lambda \int_{-1}^{1} \varphi(t)(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, dt$$

が成りたつ，ここに $c_\lambda = 2^{2\lambda-1}\lambda\,\Gamma^2(\lambda)/\pi\,\Gamma(2\lambda)$ である．また $SO(n)$ を $\mathbb{R}^n$ の回転群，$du$ をその上の正規化したハール測度とすれば $S^{n-1}$ 上の関数 $f$ に対して

$$\int_{S^{n-1}} f(\xi)\, d\xi = \int_{SO(n)} f(u\xi_0)\, du, \quad \xi_0 \in S^{n-1}$$

である．$SO(n-1)$ は $\mathbf{1}$ を変えないような $SO(n)$ の閉部分群とみなすことができる．$SO(n)$ 上の関数 $F$ は，すべての $v_1, v_2 \in SO(n-1)$ に対して $F(v_1 u v_2) = F(u)$, $u \in SO(n)$ が成りたつとき帯球関数であるといわれる．そのときは $[-1, 1]$ 上の関数 $\varphi$ がとれて $F(u) = \varphi(u\mathbf{1}\cdot\mathbf{1})$ となる，逆は明らかである．従って

(3) $$\int_{SO(n)} F(u)\, du = c_\lambda \int_{-1}^{1} \varphi(t)(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, dt.$$

さて，$H_n^k$ を $n$ 変数 $k$ 次同次調和多項式の作る空間とすると，$Y_n^k(u^{-1}\xi) = Y_n^k(\xi)$ for all $\xi \in S^{n-1}$, $u \in SO(n-1)$ なる元は定数倍を除いて唯一つ存在する，そして $Y_n^k(\xi) = C_k^\lambda(\xi\cdot D)/C_k^\lambda(1)$ であることが示される．$T_n^k$ を $T_n^k(u)F(v) = F(u^{-1}v)$, $u, v \in SO(n)$ によって定義される $H_n^k$ 上の表現とすると，$\{T_n^k\}_{k=0}^{\infty}$ は完備既約ユニタリー表現となる．特に帯球関数 $F(u) = \varphi(uD\cdot D)$ を $T_n^k = (t_{ij}^{n,k})$ でフーリエ展開すると

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k\, c_{11}^k \frac{C_k^\lambda(t)}{C_k^\lambda(1)}, \qquad c_{11}^k = c_\lambda \int_{-1}^{1} \varphi(t) \frac{C_k^\lambda(t)}{C_k^\lambda(1)} (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, dt$$

となる，$t_{11}^k(u) = Y_n^k(uD)$．$c_{ij}^k = 0$ $(i,j) \neq (0,0)$ だからである，$d_k = \dim H_n^k = \Gamma(k+n-2)(2k+n-2)/\Gamma(n-1)\Gamma(k+1)$ である．

$[-1, 1]$ 上の関数 $\varphi$, $\psi$ に対して積 $\varphi * \psi$ を

(4) $$(\varphi*\psi)(uD\cdot D) = \int_{SO(n)} \varphi(vD\cdot D)\,\psi(uv^{-1}D\cdot D)\, dv,$$

$$\|\varphi\| = c_\lambda \int_{-1}^{1} |\varphi(t)|\,(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, dt$$

とするとき

(5) $$\|\varphi * \psi\| \le \|\varphi\|\,\|\psi\|$$

は明らかである，更に

(6) $$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k\, a_k \frac{C_k^\lambda(t)}{C_k^\lambda(1)}, \qquad \psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k\, b_k \frac{C_k^\lambda(t)}{C_k^\lambda(1)}$$

とすれば

$$(\varphi * \psi)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k a_k b_k \frac{C_k^{\lambda}(t)}{C_k^{\lambda}(1)}$$

がえられる. $L^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})} = \{\varphi : \|\varphi\| < \infty\}$ とおくと上のことから次の定理が容易に示される.

定理1（[7]）. $L^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}$ は可換, 準単純, 正則, 単位元のないバナッハ代数であって, その極大イデアルの空間 $\mathfrak{M}$ は $\{0, 1, 2, \cdots\}$ とみなせる. $\varphi \in L^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}$ に対してその Fourier-Gelfand 変換は, $\hat{\varphi}(k) = a_k$, $k \in \mathfrak{M}$ で与えられる, ここに $a_k$ は (6) で与えたものである.

今迄は $\lambda = (n-2)/2$, $n = 3, 4, \cdots$ としたけれども上の定理は $\lambda \geq 0$ に対して成りたつ（$\lambda = 0$ のときは $L^1(0, \pi)$ の関数の cosine 級数展開に他ならない）ことがわかっている. 定理1から Gegenbauer 多項式展開に対して群代数で生じたような問題が当然起こるが, $\lambda \geq 1/2$ あるいは $\lambda > 0$ に対して, それらは $L^1(-\pi, \pi)$ などの場合よりはるかに単純な形で殆んどすべて解決されている. また級数論的な問題は $L^p(-\pi, \pi)$ の関数の Fourier 展開の問題に殆んどすべて帰着させることができる, この方面に関しては, Askey, Askey-Wainger, Hirschman などの研究がある．また其役関数もある意味で定義できる（［ 9 ］参照）．

§ 2. degree $(\alpha, \beta)$ のヤコビ多項式は

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}\left[(1-x)^{k+\alpha}(1+x)^{k+\beta}\right],\ \alpha,\beta>-1$$

によって定義される．ヤコビ多項式も測度 $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt$ に関して完備な直交系であって Gegenbauer 多項式のと類似な結果が成りたつことが知られている．しかし特別な $(\alpha, \beta)$ にしか convolution の定義が単純にならないため計算は煩雑である．

$L = L^{(\alpha,\beta)}$ を

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} = c\int_{-1}^{1}|\varphi(t)|(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt < \infty$$

なる関数 $\varphi$ 全体の集合とする，ここに $c = c_{(\alpha,\beta)} = \Gamma(\alpha+\beta+2) / 2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)$ である．$\varphi \in L$ に対してそのフーリエ展開を $R_k(t) = R_k^{(\alpha,\beta)}(t) = P_k^{(\alpha,\beta)}(t) / P_k^{(\alpha,\beta)}(1)$ とおいて

$$\varphi(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k\, a_k\, R_k(t)$$

によって定義する，ここに $a_k = c\int_{-1}^{1}\varphi(t)R_k(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt$,

$d_k = (2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+\alpha+1)[\Gamma(k+\beta+1)$

$\Gamma(\alpha+\beta+2)\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(\alpha+1)\,]^{-1}$ である．

$\psi(t)=\sum d_k \ell_k R_k(t)$ とするとき $\varphi*\psi$ を形式的に $\sum d_k a_k \ell_k R_k(t)$ によって定義する．[1] によって次の定理は明らかである．

定理2．$\alpha\geq\beta\geq-1/2$ とするとき $L=L^{(\alpha,\beta)}$ は定理1と同様な性質をもつ．

今 $\mu$ を $[-1,1]$ 上の有界な測度とする．$\mu$ の Fourier 係数は

$$\mu_k=\int_{-1}^{1} R_k(t)\,d\mu(t)$$

によって定義する．$\mu_k$ が 0 と 1 しか値をとらないとき $\mu$ は巾等であるといわれる．

定理3．$\alpha\geq\beta\geq-1/2$，$\mu$ を $[-1,1]$ 上の有界な測度とする．もし $\alpha>\beta$ なら，$\mu$ が巾等である必要十分条件は $\mu_k=0$，1 で十分大なる $k$ に対して定数値をとることである．$\alpha=\beta>-1/2$ なら，必要十分条件は，$\mu_k=0$，1 で十分大なる $k$ に対して周期2をもつことである．

系4．$\alpha\geq\beta\geq-1/2$，$\alpha>-1/2$ なら $E$ が Sidon 集合で

あるための必要十分条件は$E$が有限集合であることである。

定理3，系4は，$L^{(-1/2,-1/2)}$は通常のcosine展開に対応するから，$\alpha=\beta=-1/2$のときは成りたたない。作用関数$6$，$\alpha=\beta=-1/2$のときは「解析的」によって特徴ずけられるが，$\alpha=\beta>-1/2$（より一般にしてもよい）のときは適当な微分可能性でよい。

次に$L^{(\alpha,\beta)}$の dual を考えよう。$R_m(t)R_n(t)$を$R_k(t)$で展開すると，

$$R_m(t)R_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty} g(k,m,n)\,d_k\,R_k(t)$$

となる。[6]によって$\alpha\geq\beta\geq-1$，$\alpha+\beta+1\geq 0$ならば$g(k,m,n)\geq 0$であるから$1=\sum_{k=0}^{\infty}|g(k,m,n)\,d_k|$となる。$A=A^{(\alpha,\beta)}$を複素数列$\{a_n\}_{k=0}^{\infty}$で

$$\|a\|=\|a\|_{(\alpha,\beta)}=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty$$

なるものの全体とする。$a=\{a_k\}$，$b=\{b_k\}$に対して

$$a*b=\left\{\sum_{m,n=0}^{\infty} g(k,m,n)\,d_k\,a_m b_n\right\}_{k=0}^{\infty}$$

と定義するとAは可換，単位元をもつバナッハ代数となる。

定理5. $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha + \beta + 1 \geq 0$, $\alpha \geq -1/2$ とすれば $A$の極大イデアルの空間 $\mathfrak{M}$ は閉区間 $[-1, 1]$ と homeomorphic で $a = \{a_m\} \in A$ の Fourier-Gelfand 変換は次のような項式展開

$$\hat{a}(M_x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m R_m(x)$$

で与えられる，ここに $M_x$ は $x$ に対応する極大イデアルである．

証明は [8] にある．

定理6. $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\alpha > -1/2$ とするとき $[-1, 1]$ の閉集合 $E$ が Helson 集合であるための必要十分条件は $E$ が有限集合であることである．

証明. $E$ が有限集合ならば Helson 集合であることは明らかである．今無限 Helson 集合があったとする．部分集合を考えてそれは唯一つの集積点 $x_\infty$ をもち可付番であるとしてよい，従って $\{x_1, x_2, \cdots, x_\infty\}$ とする．定義から $\{a_m\} \in A$ が存在して

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m R_m(x_n) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots, \infty.$$

最初に $x_\infty = 1$ とする． $4(1 - x_{n+1}) < 1 - x_n$ としてよい．

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (-1)^n \left[ R_m(x_n) - R_m(x_\infty) \right] = \frac{1}{n}$$

より $$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left[ R_m(x_n) - R_m(x_\infty) \right] = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n},$$

ところで $R_m(x_n) - R_m(x_\infty) = O(m^2(1-x_n))$, $R_m(x_n) = O(m^{-(\alpha+\frac{1}{2})}(1-x_n)^{-(\alpha+\frac{1}{2})/2})$ であるから $k = k_m$ を $1 - x_{k+1} < m^{-2} \leq 1 - x_k$ となるようにとると,

$$\sum_{k+1}^{N} |R_m(x_n) - R_m(x_\infty)| = O(1), \ \sum_{0}^{k} |R_m(x_k)| = O(1)$$

となって第一行の式の右辺 $\to \infty$ $(N \to \infty)$ なることに矛盾する. $x_\infty = -1$ のときも同様である.

最後に $\{x_n\}$ が $-1$, $1$ と距離をもつときを考えよう. このときは定数 $c > 0$ が存在して

$$\sup_m \left| \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n R_m^{(\alpha,\beta)}(x_n) \right| > c \sum_{n=1}^{\infty} |\ell_n|$$

となることが dual の論法と測度 $\sum \ell_n \delta_{x_n}$ を考えると出る. $R_m(x_n) = O(m^{-\alpha-1/2})$ であるから $N > 0$ が存在して

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n R_m(x_n) \right| < \frac{c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\ell_n|, \quad m > N$$

一方 non-zero な列で $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n R_m(x_n) = 0$, $m = 1, 2, \cdots, N$ なるものがとれる. 矛盾.

定理 7. $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $\alpha \geq 1/2$ ならば各点 $\{p\}$, $-1 <$

$p<1$ は非S集合である.

証明は $R^3$ に対する Schwartz の論法でできる.

## 文献

[1] R. Askey and S. Wainger, A convolution structure for Jacobi series, Math. Res. Cent. tech. rep., 1967.

[2] R. Askey and S. Wainger, A dual convolution structure for Jacobi polynomials, Orth. Expansion and their Conti. Analog., 1968.

[3] S. Bochner, Positive zonal functions on spheres, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 40 (1954) 1141 − 47.

[4] R. R. Coifman and G. Weiss, Representations of compact groups and spherical harmonics, Enseig. Math.

[5] C. Dunkl, Operators and harmonic analysis on the sphere, Trans. A. M. S., 125 (1967), 250 − 263.

[6] G. Gasper, Linearization of the product of Jacobi polynomials, I, II to appear.

[7] I. I. Hirschman, Jr, Harmonic analysis and ultraspherical polynomials, Proc. Conf. on Harmonic Analysis, Cornell 1956.

[8] S. Igari and Y. Uno, Banach algebra related to the Jacobi polynomials, Tôhoku. M. J. 21 (1969) 678 – 683 with the Correction to it.

[9] B. Muckenhoupt and E. M. Stein, Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions, Trans. A. M. S., 118 (1965) 17 – 92.

[10] N. J. Vilenkin, Special functions and the theory of group representations, A. M. S. transl. 1968.