数理解析研究所講究録
第110巻 1971年 58-65

2^ω 上の capacity と Walsh-Fourier Series

東京純心短大　　小林雅子

§1　序

[1]においてL.H. Harperは次の定理を証明している。

定理. $f(x)$ の Walsh-Fourier Series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$ が $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 [n]^{1-\alpha} < \infty$, $0 \leqq \alpha < 1$, なる関係をみたしている時, $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \psi_k(x)$ が閉集合E上で発散するならばEの α-capacity は 0 である。

上定理はBeurling, Salem-Zygmund等によって得られた三角級数論における古典的結果($\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) n^\beta < \infty$, $0 < \beta \leqq 1$, をみたす三角級数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ が閉集合E($\subset [0, 2\pi]$)で発散するならばEの $(1-\beta)$-Capacity ($\beta = 1$ の時は logarithmic-capacity)は 0 である。)の一変形となっている。

[2]においてL.H. Harperの結果を拡張して次の定理が証明されている。

(1.1) $f(x) \in L^p(2^\omega)$ ($1 \leqq p < \infty$) の Walsh-Fourier Series を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$ とする。$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k \psi_k(x)}{[k]^{\frac{1-\alpha}{p}}}$ ($0 \leqq \alpha < 1$) が閉集合 $E (\subset 2^\omega)$ で発散する時

(i) $1 \leqq p \leqq 2$ なら E の α-capacity は 0 である。

(ii) $2 < p < \infty$ なら E の $(\alpha+\varepsilon)$-capacity は 0 である。

以下において上記の結果が best possible なものであるか否かについて述べる。

§2 記号 定義 補題

(2.1) 2^ω は dyadic group で演算は pointwise mod 2 の加法。Topology は product topology でこれは $x = (x_1, x_2, \cdots)$ $y = (y_1, y_2, \cdots)$ に対して キョリ $|x - y| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n| / 2^n$ によって与えられるものである。

(2.2) $\{\psi_n(x)\}$ は 2^ω 上の Walsh system. $f(x)$ の Walsh-Fourier Series を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$ で表わす.

(2.3) $[n]$ は n に含まれる 2 の最大巾 ($[0]=1$)。

(2.4) $x = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n}, 1, \cdots)$, $(n+1)$ 番目にはじめて 1 が表われる元に対して $\{x\} = 2^{-n}$ と定義する。ただし $\{0\} = 1$. $0 < \alpha < 1$ の時 $K(x) = \{x\}^{-\alpha}$, $\alpha = 0$ の時 $K(x) = \log_2 \frac{1}{\{x\}}$ と定義する. $K(x)$ は 0 を除いて連続 non-negative である。2^ω 上においては $K(x)$ を kernel とする capacity を用いる.

$0<\alpha<1$ の時 $\Phi(x)=|x|^{-\alpha}$ ($|x|=\sum\frac{x_n}{2^n}$), $\alpha=0$ の時 $\Phi(x)=\log_2\frac{1}{|x|}$ とする時 kernel $K(x)$ に関して capacity が 0 になるのは kernel $\Phi(x)$ に関して capacity が 0 且その時に限る。

(2.5)　$x\in Z^\omega$ に対して $\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}$ とすると $\lambda(x)$ は Z^ω から $[0,1]$ への写像で $[0,1]$ における dyadic rational には finite expansion を対応させることにより λ の逆写像 μ が一意に定まる。λ は連続で可算集合を除いて $1:1$ であり Haar 測度を保ち Z^ω 上の Walsh functions を $[0,1]$ 上のそれ等に写す。$\tilde{x},\tilde{y}\in[0,1]$ に対して $\tilde{x}+\tilde{y}=\lambda(\mu(\tilde{x})+\mu(\tilde{y}))$ と定義すると $\tilde{x}+\tilde{y}=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|/2^n$ ($\tilde{x}=\sum x_n/2^n$, $\tilde{y}=\sum y_n/2^n$)。

(2.6)　$\tilde{f}(\tilde{x})$ を $[0,1]$ で定義された関数とする時 $\mu(\tilde{x})=x$ なる $\tilde{x}\in[0,1]$ が存在するなら $f(x)=\tilde{f}(\tilde{x})$, $\mu(\tilde{x})=x$ となる $\tilde{x}$ が存在しない時 $f(x)=\limsup_{y\to x} f(y)$ (lim sup は dyadic irrational なる y について) と定義することにより Z^ω 上の関数 $f(x)$ が得られる。

補題1　$\tilde{f}(\tilde{x})$ が $[0,1]$ 上で Lebesgue 可積分なる時 $f(x)$ は Z^ω 上で可積分となり $\int_0^1\tilde{f}(\tilde{x})\,d\tilde{x}=\int_{Z^\omega}f(x)\,dx$ 。

これは[3]において得られている結果である。

補題2　Z^ω 上の集合 E が α-capacity 0 なら λ による

像集合の α-capacity も 0 である。

これは $\lambda(x)$ が 2^{ω} から $[0,1]$ への contraction mapping であることから明かである。

§3　(1.1) が最良なる結果であることを示すには次のことが証明されればよい。

(3.1)　$1\leqq p\leqq 2$ の時 β を α ($\alpha>0$) より小なる任意の実数とすると β-capacity 正の集合 E と $f(x)\in L^{p}(2^{\omega})$ が存在して $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\psi_k(x)}{[k]^{\frac{1-\alpha}{p}}}$ がE上で発散する。

これにより (1.1) の (i) が最良の結果であると云える。

(3.2)　$p>2$ の時 α-capacity 正の集合 E と $f(x)\in L^{p}(2^{\omega})$ が存在して $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\psi_k(x)}{[k]^{\frac{1-\alpha}{p}}}$ がE上で発散する。

これによって (1.1) の (ii) が最良の結果であると云える。

(3.1), (3.2) を証明する。

まず $[0,1]$ において capacity 正の集合 $\tilde{E}$ と関数 $\tilde{f}(\tilde{x})\in L^{p}[0,1]$ を [4] にならって作る。

$\{\xi_n\}$ を $0<\xi_n<\frac{1}{2}$ をみたす数列とする。$\tilde{E}_0=[0,1]$ と中心を共有する長さ $(1-2\xi_1)$ の開区間を $\tilde{E}_0$ からとり除く。残った集合 $\tilde{E}_1$ は長さ ξ_1 の2個の閉区間より成るが それ等各々から中心を共有する長さ $\xi_1(1-2\xi_2)$ の開区間をとり除く。残った集合 $\tilde{E}_2$ は長さ $\xi_1\xi_2$ の4個の閉区間より成る。こ

の操作を続けてk回目には長さ$\xi_1\xi_2\cdots\xi_k$なる2^k個の閉区間より成る集合$\hat{E}_k$が残る。

$\hat{E}=\lim_k \hat{E}_k$ のβ-capacityが正となるための必要十分条件は次のようになることが[5]において示されている：

(3.3) $$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(\xi_1\xi_2\cdots\xi_k)^{-\beta} < \infty .$$

[0,1]上の関数列$\hat{f}_n(\hat{x})$を次のように定義する。

$$\hat{f}_0(\hat{x}) = 0 \qquad \hat{x}\in\hat{E}_0=[0,1]$$

$$\hat{f}_n(\hat{x}) = (\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)^{-\frac{1-\alpha}{p}}\, n^{-1} \qquad \hat{x}\in\hat{E}_n$$

$$= \hat{f}_{n-1}(\hat{x}) \qquad \hat{x}\in\hat{E}_0-\hat{E}_n .$$

$\{\hat{f}_n(\hat{x})\}$は可測関数の増加列であるから$\hat{f}(\hat{x})=\lim_n \hat{f}_n(\hat{x})$が存在してこれは可測である。更に$\hat{E}_n-\hat{E}_{n+1}$上で

$$\hat{f}(\hat{x}) = (\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)^{-\frac{(1-\alpha)}{p}}\, n^{-1} .$$

(3.4) $$\int_0^1 |\hat{f}(\hat{x})|^p d\hat{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\hat{E}_n-\hat{E}_{n+1}} |\hat{f}(\hat{x})|^p d\hat{x}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1-2\xi_{n+1})\,2^n(\xi_1\xi_2\cdots\xi_n)^{\alpha} n^{-p} .$$

(3.5) $\hat{x}\in\hat{E}$とする時 $\hat{E}_k-\hat{E}_{k+1}$は2^k個の長さ$\xi_1\xi_2\cdots\xi_k(1-2\xi_{k+1})$の閉区間よりなりそのいずれも$\hat{x}$を含まないが、それ等の閉区間のうち一つの$\hat{I}_k$は$\hat{x}$を含む$\hat{E}_k$の区間の一つに含まれる。

$p>2$の時 $\delta>0$を$2(1+\delta)<p$なるように選び、$2\xi_n^{\alpha} = 1+(1+\delta)n^{-1}$とおく。この時$\beta=\alpha$に対して(3.3)が成り立つ。したがって$E$は$\alpha$-capacity正の集合である。

更に (3.4) は有限な値をとる故 $\tilde{f}(\tilde{x}) \in L^p[0,1]$ である。

$1 \leqq p \leqq 2$ の時 β を α より小なる任意の正数として ξ を $2\xi^{\frac{\alpha+\beta}{2}}=1$ をみたす正数とする。すべての ξ_n を $\xi_n=\xi$ として上の集合 $\tilde{E}$ を作ると $\tilde{E}$ は β-capacity 正となり $\tilde{f}(\tilde{x})$ を同様に定義すると $\tilde{f}(\tilde{x}) \in L^p[0,1]$ となることがわかる。

λ によって集合 $\tilde{E}$ に対応している 2^ω のそれを E, 関数 $\tilde{f}(\tilde{x})$ に対応している 2^ω 上のそれを $f(x)$ とする。補題1, 2より $p>2$ の時 E は α-capacity 正で $f(x) \in L^p(2^\omega)$。$1 \leqq p \leqq 2$ の時 E は $\beta(<\alpha)$-capacity 正で $f(x) \in L^p(2^\omega)$ となる。

$p>2$, $1 \leqq p \leqq 2$ なる各々の場合に $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \psi_k(x)}{[k]^{\frac{1-\alpha}{p}}}$ が E 上で発散するならば (3.1), (3.2) は成り立つことになる。以下これを証明する。

$x \in E$ として

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k \psi_k(x)}{[k]^{\frac{1-\alpha}{p}}} = \int_{2^\omega} f(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi_k(x+t)}{[k]^{\frac{1-\alpha}{p}}}\, dt$$

$$H_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi_k(t)}{[k]^{\frac{1-\alpha}{p}}}$$ とおく。Abel の公式で

(3.6) $$H_n(t) = \left(2^{\frac{1-\alpha}{p}}-1\right) \sum_{k=1}^{\log[n-1]} \frac{1}{2^{\frac{1-\alpha}{p}k}} D_{2^k}(t) + \frac{1}{[n-1]^{\frac{1-\alpha}{p}}} D_n(t),$$ ここで $D_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j(t)$。

$|D_n(t)| \leqq \frac{2}{|t|}$ より $t \neq 0$ の時

$$\lim_{n\to\infty} H_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left(2^{\frac{1-\alpha}{p}}-1\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{\frac{1-\alpha}{p}k}} D_{2^k}(t)。$$

右辺の関数列は増加列で積分は有界である。極限は殆ど至る所で存在して $L^1(2^\omega)$ の関数となる。

(3.6) より $H_{2^n}(t) \geqq 0$。Fatou の補題から

$$\liminf_{n\to\infty} S_{2^n}(x) = \liminf_{n\to\infty} \int_{2\omega} f(t) H_{2^n}(x+t)\, dt$$

$$\geqq \int_{2\omega} \liminf_{n\to\infty} f(t) H_{2^n}(x+t)\, dt$$

$$= \int_{2\omega} f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x+t)}{[k]^{\frac{1-\alpha}{p}}}\, dt .$$

[6] に示されている結果から x の近傍 U が存在して $t \in U$ なる時 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x+t)}{[k]^{\frac{1-\alpha}{p}}} \geqq A|x+t|^{\frac{1-\alpha}{p}-1}$ (A は定数)。上式の最後の項の積分を U 上での積分と U の補集合上での積分の和に表わす時 U の補集合上での積分は有限な値となるから U 上での積分を評価する。(3.5) より番号 k_0 が存在して $k \geqq k_0$ なら $I_k \subset U$ となることを用いて次の結果を得る。

$p>2$ の時

$$\int_U f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x+t)}{[k]^{\frac{1-\alpha}{p}}}\, dt \geqq A \int_U f(t) |x+t|^{\frac{1-\alpha}{p}-1} dt$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \int_{U(E_k - E_{k+1})} f(t) |x+t|^{\frac{1-\alpha}{p}-1} dt$$

$$\geqq A \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{I_k} f(t) |x+t|^{\frac{1-\alpha}{p}-1} dt$$

$$\geqq \sum_{k=k_0}^{\infty} (1 - 2\xi_{k+1}) k^{-1} = +\infty$$

同様にして

$1 \leqq p \leqq 2$ の時

$$\int_U f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_k(x+t)}{[k]^{\frac{1-\alpha}{p}}}\, dt \geqq A \int_U f(t) |x+t|^{\frac{1-\alpha}{p}-1} dt$$

$$\geqq \sum_{k=k_0}^{\infty} (1 - 2\xi) k^{-1} = +\infty .$$

したがって $p>2$, $1 \leqq p \leqq 2$ いずれの場合にも $S_n(x)$ は E 上で

発散する。

文献

[1] L.H. Harper, Capacities of sets and Harmonic analysis on the group 2^{ω}, Trans. Amer. Math. Soc., (126)(1967), 301-315.

[2] M. Kobayashi, ————, Tôhoku. Math. J., (21)(1969), 419-433.

[3] G.W. Morgenthaler, On Walsh-Fourier Series, Trans. Amer. Math. Soc., (84)(1957), 472-507.

[4] N. Du. Plessis, A theorem about fractional integral, Proc. Amer. Math., (3)(1952), 892 ~ 898.

[5] R. Salem and A. Zygmund, Capacity of sets and Fourier-series, Trans. Amer. Math. Soc., (59)(1946), 23-41.

[6] Sh. Yano, On Walsh-Fourier series, Tôhoku. Math. J., (3)(1951), 223-242.

[7] ————, Cesàro summability of Fourier series, Tôhoku. Math. J., (5)(1953), 196-197.