数理解析研究所講究録
第111巻 1971年 21-34

モジュラー群環とモジュラー表現

大阪市大 理　津島 行男

§1 序

Brauer characters の導入によって ordinary characters の上にさらに精密な議論が考察されるようになった。いわば複素数体上に一連の"character" theory とよばれうるものが確立されたわけだが、その発展のための主流ともいえるテーマは ordinary characters と Brauer characters との関係のより深き追及といってよいであろう。しかしながら Brauer characters といえどももとは modular 表現から導入されたものである限り、こういった理論の発展のためにはやはり modular 表現そのものの研究も不可欠なものであろう。そしてこういった研究を推進させる一つの有力な武器はいうまでもなく多元環（order も含めて），なかんずく Frobenius algebra あるいは symmetric algebra の理論であろう。本稿では後に述べる Frobenius algebra に関する中山の定理を

group algebra に応用して modular 表現に関するいくつかの結果を述べる。(近刊 [4] [5])

§2. この章の内容は[1]による。従って詳しいことはそこを参照して欲しい。以後 k は体，A を k 上有限次の多元環とする。

- $A^* = \mathrm{Hom}_k(A, k)$ の元を linear function (l.f.)
- $a \in A$, $\lambda \in A^*$ に対し $\lambda_a(x) = \lambda(xa)$ (A^*の left A-module としての作用。)
- $\lambda \in A^*$　$\lambda(Ax) = 0 \Rightarrow x = 0$ なら λ を正則 L.F. と記す
  $\lambda(xy) = \lambda(yx)$ $\forall x, y \in A$ のとき λ を symmetric
  これを s.l.f. と記す。
- A が Frobenius algebra $\underset{(\mathrm{def.})}{\Longleftrightarrow}$ $A \simeq A^*$ as (left) A-modules
  $\Longleftrightarrow$ $\exists$ L.F. $\lambda \in A^*$　これは A の 1 に対応する A^* の元を λ とすればよい。
- A が symmetric algebra $\underset{(\mathrm{def.})}{\Longleftrightarrow}$ $A \simeq A^*$ as A-A-bimodules
  $\Longleftrightarrow$ $\exists$ s. L. F. $\lambda \in A^*$

Theorem A. (中山 [1])

A を Frobenius algebra (symmetric resp.) λ を L.F. (s. L. F.)
$\mathfrak{J}$ を A の両側イデアル，$r(\mathfrak{J})$ をその右零化イデアル
このとき

$A/\mathfrak{z}$ が Frobeniusean (symmetric resp.) over k $\Longleftrightarrow$
$r(\mathfrak{z})$ が principal (generated by a central element) 又 = のとき
μ を $A/\mathfrak{z}$ 上の L.F. (s. L.F. resp.) とすれば $\exists c \in A$,
$\mu\psi = \lambda c$ and $r(\mathfrak{z}) = cA$ (c は central resp.), $\psi : A \xrightarrow{nat.} A/\mathfrak{z}$
(注) このとき $r(\mathfrak{z}) = cA$ なる実は $r(\mathfrak{z}) = Ac$

§3. よく知られているように semisimple algebra は Frobenius algebra である。従って $\mathfrak{N}$ を Frobenius algebra A の radical とすれば上記の定理より $r(\mathfrak{N}) = Ac$. 一方 e を A の primitive idempotent とすれば $r(\mathfrak{N})e$ は極小左イデアルであり又逆に任意の irreducible A-module はどれかの $r(\mathfrak{N})e$ と同型である。従って上記 c を決定することは (A を与えて) 非常に興味ある問題であろう。特に G が有限群で $A = kG$ のとき $r(\mathfrak{N})$ の生成元が何らかの意味で特徴づけられないであろうか。残念ながら今の所これに対して満足すべき結果を一般の G については得られなかった。ここでは一応 Theorem A の方法に従って一つの生成元を決め，そこから派生するいくつかの結果を述べてみよう。p を体 k の標数として，$|G| = p^n g_0$ $(p, g_0) = 1$ とする。($p = 0$ のときは $|G| = g_0$) l を整数としたとき $\nu_p(l)$ を l の素因数分解における p の指数としよう。よく知られているように $kG/\mathfrak{N}$ は separable over k, 従って K を k の任意の拡大体 $\mathfrak{N}_K$ を KG の radical としたとき $\mathfrak{N}_K = K\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_K \cap kG = \mathfrak{N}$ 同様のことが $r(\mathfrak{N})$ についても成立する。kG は次の写像 λ (以後固定) を通じて Frobeniusean 同時に symmetric となる。

$$\lambda\left(\sum_{\sigma\in G} a_\sigma \sigma\right) = a_1 \qquad a_\sigma \in k \qquad 1 \text{ は } G \text{ の identity}$$

$\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2 \cdots \bar{\varphi}_r$ を G の適当な分解体($\supset k$)上での異なる irreducible characters 全体とする。$\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^{r} \bar{\varphi}_i$ とすれば $\bar{\varphi}(\sigma)$ は任意の $\sigma \in G$ に対して素体の中に入っている。

Proposition 1. $v = \sum_{\sigma\in G} \bar{\varphi}(\sigma^{-1})\sigma$ とすれば

(1) $r(\mathfrak{N}) = (kG)v$

(2) $f \in Aut(G)$ なる任意の f に対して $v^f = v$.

(もちろん f は自然な意味で kG の自己同型に拡張した上で)

(証明) (1) 上の注意から k を G の分解体と仮定してよい。

$kG/\mathfrak{N} = \bigoplus_{i=1}^{r} (k)_{n_i}$. $\psi : kG \xrightarrow{nat.} kG/\mathfrak{N}$, $p_i : kG/\mathfrak{N} \xrightarrow{projection} (k)_{n_i}$

$p_i\psi$ によって kG の表現が得られるがその character を $\bar{\varphi}_i$ とする。よく知られているように trace map $tr_i : (k)_{n_i} \longrightarrow k$ は L.F. であり従って $\sum tr_i$ も又 $kG/\mathfrak{N}$ 上の L.F. である。従って Th. A. より $\exists v \in kG$, $(\sum tr_i)\psi = \lambda_v$, $r(\mathfrak{N}) = (kG)v$. $v = \sum a_\sigma \sigma$ とする。もちろん $(\sum tr_i)\psi = \bar{\varphi}$ だから

$a_\sigma = \lambda(\sigma^{-1}v) = \lambda_v(\sigma^{-1}) = \overline{\varphi}(\sigma^{-1})$

(2) $\overline{\varphi}_i^{\,f}(\sigma) = \overline{\varphi}_i(\sigma^f)$ によって f は $\{\overline{\varphi}_1 \cdots \overline{\varphi}_r\}$ 上に置換を引き起す。とくに $\overline{\varphi}(\sigma^f) = \overline{\varphi}^f(\sigma) = \overline{\varphi}(\sigma)$ これより明らか。

$\overline{\varphi}(\sigma)$ が何らかの意味で特徴づけができればいいが、そうでない限り上の v は余りいい形とはいえないであろう。むしろ興味あるのは(2)の方である。そこで H を G の正規部分群とし $\mathfrak{m}$ = radical of kH, $\mathcal{L} = kG\,\mathfrak{m} = \mathfrak{m}\,kG$ とすれば $\mathcal{L}$ は nilpotent two sided ideal である。

Corollary 1 上の記号の下で

(1) $kG/\mathcal{L}$ は symmetric algebra over k

(2) $(\mathcal{L} : \mathfrak{R}) = \{x \in kG \mid \mathfrak{R}x \subset \mathcal{L}\}$ 任意の primitive idempotent e に対して $(kG)e/\mathfrak{R}e \simeq (\mathcal{L} : \mathfrak{R})e/\mathcal{L}e$

Proof. (1) $H \triangleleft G$ だから G の各元は H の自己同型を induce する。$r_H(\mathfrak{m})$ を $\mathfrak{m}$ の kH における annihilator ideal とすれば Prop 1 より $r_H(\mathfrak{m}) = kH \cdot v'$ で v' は kG の中で central. よって $r(\mathcal{L}) = (kG)v'$ は central element v' で生成された単項イデアル。従って Theorem A より $kG/\mathcal{L}$ は symmetric.

(2) 一般にAがsymmetricなら $Ae/\mathcal{R}e \simeq r(\mathcal{R})e$.
よって $(\mathcal{L}:\mathcal{R})/\mathcal{L}$ が $kG/\mathcal{L}$ の radical $\mathcal{R}/\mathcal{L}$ の right annihilator ideal であることに注意して

$$(kG)e/\mathcal{R}e \simeq (kG/\mathcal{L})\overline{e} / (\mathcal{R}/\mathcal{L})\overline{e} \simeq \frac{(\mathcal{L}:\mathcal{R})}{\mathcal{L}}\overline{e} \simeq (\mathcal{L}:\mathcal{R})e/\mathcal{L}e$$

ここで $\overline{e}$ は e の $kG/\mathcal{L}$ における class である。Q.E.D.

ここでさらに H が G の normal p-subgroup であると仮定しよう。このとき $\mathfrak{m} = \ker(kH \xrightarrow{augu.} k) = \{\sum a_\sigma \sigma \mid \sum a_\sigma = 0\}$
よって $r_H(\mathfrak{m}) = kH \cdot \Delta_H = k\Delta_H$, $\Delta_H = \sum_{\sigma \in H} \sigma$. とくに
$r(\mathcal{R}) \subset r(\mathcal{L}) = kG\Delta_H \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{R}$
(もちろんこれは G が non-trivial normal p-subgroup をもてば G は defect 0 の block をもたないという事実に対応している。後の章参照)

Lemma 1. $P_2 \supset H_2 \supset P_1 \supset H_1$ をすべて G の normal subgroups とし, P_i/H_i は non-trivial p-groups とする。$\mathcal{L}_i$ を前の通り $\mathcal{L}_i = kG(\mathrm{rad}.\, kP_i)$ $\mathfrak{z}_i = \ker(kG \xrightarrow{nat.} k(G/H_i))$

(1) $(\mathcal{L}_2 + \mathfrak{z}_2 : \mathcal{R}) \supset \mathcal{L}_2 + \mathfrak{z}_2 \supset (\mathcal{L}_1 + \mathfrak{z}_1 : \mathcal{R}) \supset \mathcal{L}_1 + \mathfrak{z}_1$

(2) e を $\mathfrak{z}_2$ に入らない primitive idempotent とすれば

$$(\mathcal{L}_i + \mathfrak{z}_i : \mathcal{R})e / (\mathcal{L}_i + \mathfrak{z}_i)e \simeq (kG)e/\mathcal{R}e$$

proof. (1) 明らかに　真中の包含関係を証明すればよい。

$\mathrm{rad}\,k(P_2/H_2)\cdot k(G/H_2) = \mathfrak{L}_2+\mathfrak{J}_2/\mathfrak{J}_2 \supset r(\mathrm{rad}\,k(G/H_2))$ これは P_2/H_2 が p-group だから。$\bar{G} = G/H_1$ $\bar{P}_1 = P_1/H_1$ とおく。

$\mathfrak{L}_1+\mathfrak{J}_1/\mathfrak{J}_1 = (\mathfrak{L}_1+\mathfrak{J}_1 : \mathfrak{N}+\mathfrak{J}_1)/\mathfrak{J}_1 = ((\mathrm{rad}\,k\bar{P}_1)k\bar{G} : \mathrm{rad}\,k\bar{G})$

$= r(\mathrm{rad}.k(\bar{G}/\bar{P}_1)) \simeq r(\mathrm{rad}\,k(G/P_1))$. ここで3番目の等号は $\bar{P}_1$ が $\bar{G}_1$ で normal p-subgroup だから。一方最後の iso. は mod $\mathfrak{J}_1$ を mod $\mathfrak{J}$ で考えるということだから

結局 $r(\mathrm{rad}\,k(G/P_1)) = (\mathfrak{L}_1+\mathfrak{J}_1 : \mathfrak{N})+\mathfrak{J}/\mathfrak{J}$　ここで $\mathfrak{J}=\ker(kG \longrightarrow k(G/P_1))$　一方 $P_1 \subset H_2$ から induce される $k(G/P_1)\to k(G/H_2)$ は epimorphism だから $r(\mathrm{rad}\,k(G/P_1))$ は $r(\mathrm{rad}\,k(G/H_2))$ の中に移される。即ち $\mathfrak{L}_2+\mathfrak{J}_2/\mathfrak{J}_2 \supset (\mathfrak{L}_1+\mathfrak{J}_1 : \mathfrak{N})+\mathfrak{J}_2/\mathfrak{J}_2$

(2) 上の Cor. 1 (2) で G の代わりに G/H_i を考えればよい。仮定から $k(G/H_i)e \neq 0$. 即ち e は mod $\mathfrak{J}_i$ でも primitive idempotent.　Q.E.D

(2) の中の仮定 $e \notin \mathfrak{J}_i$ はもし e が trivial representation に対応する idempotent なら常に、即ちどんな subgroup H_i に対してもみたされる。何故なら $(kG)e/\mathfrak{N}e \simeq k \simeq k\Delta_G$ (ここで $\Delta_G = \sum_{\sigma\in G}\sigma$) であるから $e\Delta_G \neq 0$. 即ちeは

augumentation ideal $\{\sum a_\sigma \sigma \mid \sum a_\sigma = 0\}$ に入らない。これより明らか。

Theorem 1 G の主組成列の商群のうち p-群となるものの個数を m とする。c_{11} を G の first Cartan invariant とすれば

$$c_{11} \geqq m+1$$

proof. 少くとも m 個あることは上の注意と Lemma 1 (2) より明らか。1 が加わるのは唯一つの極小イデアル $r(\mathfrak{N})e$ の分である。(詳細は省く)

(注) Brauer–Nesbitt [2] によれば N を G の p-regular elements の個数とすれば $c_{11} \geqq |G|/N$ しかし上の結果はこれと一応無関係である。例えば p を odd prime として G を位数 $2p^n$ の dihedral group とする。G の p-regular elements の個数は p^n+1 $\therefore$ $|G|/N < 2$. 一方 G の p-Sylow 群は normal で cyclic だから上記の $m = n$. (実際は $c_{11} = (p^n+1)/2$)

§4. 記号は前の通りとする。P_i を kG の主直既約射影加群で $P_i/\mathfrak{N}P_i$ が irreducible character $\bar{\varphi}_i$ を afford するものとする。P_i の k 上の次元を u_i とすれば一般に $u_i = p^a h_i$ であるが、初めの $u_1 \cdots u_t$ を丁度 p^a でわり切れるもの全部とする。($t \leqq r$)

Brauer character に関するよく知られた直交関係（[ ] p561）から次の等式が成立する。

$$(*)\quad \sum_{i=1}^{t} h_i \overline{\varphi_i}(\tau) = \begin{cases} g_0 & \tau \text{ が } p\text{-element のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

（もちろん h_i は体 k の中で考えられており 又 $\overline{\varphi_i}(\tau)=\overline{\varphi_i}(1)$.）

Lemma 2. k を G の分解体，$\mathfrak{z}=\sum_e (kG)e+\mathfrak{N}$. ここで e は $\nu_p(\dim_k (kG)e)>n$ なる primitive idempotent 全部をわたる。C を G の p-elements 全部の和（in kG）とすれば

$r(\mathfrak{z})=(kG)C$

proof. prop 1 の証明の記号をそのまま使う。$kG/\mathfrak{N}=\bigoplus_{i=1}^{t}(k)_{n_i}\oplus\sum_{j=t+1}^{n}(k)_{n_j}$

明らかに $\mathfrak{z}=\psi^{-1}\left(\oplus\sum_{j>t}(k)_{n_j}\right)$ であり従って両側 ideal.

$kG/\mathfrak{z}\simeq\bigoplus_{i=1}^{t}(k)_{n_i}$. そこで $\mu=\sum_{i=1}^{t}h_i\, tr_i$ とすれば仮定から $h_i\neq 0$ だから μ は $kG/\mathfrak{z}$ 上の L.F. 以下 prop 1 と同じ議論によって $r(\mathfrak{z})=(kG)C$ を得る。もちろん (*) は使う。特に $\mathfrak{z}\supset\mathfrak{N}$ より $r(\mathfrak{N})\supset r(\mathfrak{z})\ni C$ を得る。そしてこれは §2 の初めに述べた注意によって k を分解体と仮定しなくてもよい。即ち

Theorem 2. $r(\mathfrak{N})$ は p-elements 全部の和を含む.

この定理は例の Maschke の定理の精密化といってよい。即ち
$p \nmid |G|$ なる $c=1$ よって $r(\mathfrak{N}) \ni 1$ $\therefore \mathfrak{N}=0$.
所で e を primitive idempotent とすれば $r(\mathfrak{N})e$ は極小であった。上の定理より $r(\mathfrak{N})e \supset (kG)ce$

Corollary 2. k を G の分解体と仮定する。

$$r(\mathfrak{N})e = (kG)ce \iff \nu_p(\dim_k kGe) = n$$

proof. $l(-)$ 左零化イデアルをとる作用とする。Lemma 2 より $ce=0 \iff e \in l(c) = l(r(\mathfrak{Z})) = \mathfrak{Z} \iff \nu_p(\dim kGe) > n$.

Corollary 3. $x = \sum a_\sigma \sigma$ に対し $x(p)$ をこの表示の中にでてくる p-elements の係数全体の和とする。

$$x \in \mathfrak{N} \Longrightarrow x(p) = 0$$

proof. $x(p)$ は xc の 1 の係数 であることから明らか.

一般に $\mathfrak{N}$ がどのような元から構成されているかという問題は非常に難しく、その完全なる解答は G の Sylow p-群が G で normal であるという場合以外わかっていない。上の結果はその一つ必要条件を与えている。
所で G が p-可解なる実はすべての primitive idempotent に対して $\nu_p(\dim_k kGe) = n$ となる (P. Fong [3]) よって $\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}$ であり $r(\mathfrak{Z}) = r(\mathfrak{N})$.

Corollary 4. G が p-可解なら $r(\mathcal{H})=(kG)C$

§5. Defect 0 の block

ここでは K を代数体，$\mathfrak{p}$ を p をわる一つの prime divisor，R を $\mathfrak{p}$-整数のつくる ring，$k=R/\mathfrak{p}$ とする。任意の KG 加群に対し $\exists N$: RG-module $M=K\otimes_R N$

$kG=\oplus\sum B_i$ を kG の block ideal への分解とする。この分解と one to one に対応して G の ordinary characters が完全に disjoint systems $\widetilde{B_i}$ に分解される。即ち ζ を上記 M から afford された irreducible character とすれば $\zeta\in\widetilde{B_i}$ $\Longleftrightarrow$ $\overline{\zeta}=N/\mathfrak{p}N$ の主組成因加群のすべてが B_i に属する。各 B_i (又は $\widetilde{B_i}$) には G の p-subgroup が共役を除いて唯一つ対応する。それを D, $|D|=p^d$ とするとき B_i は defect group D をもつ defect d_i の block とよばれる。そしてある p-regular element x が存在して $C_G(x)$ の p-Sylow 群が D となる。character の研究の上で block，defect groups の果す役割は非常に大きい。特に $\zeta(1)$ が p^a でわり切れている場合はそれを含む $\widetilde{B_i}$ は唯一つの元 ζ から成り，$\overline{\zeta}$ は irreducible，B_i は simple algebra となる。この場合 $D=\{1\}$ であることがわかっていて従って $d=0$，即ち defect 0 の block と呼ばれる。こういう block は必ずしも存在するとは限らないが

その存在条件は(一般論として) G の p-subgroup を与えたときそれを defect group とするような block の存在と深く関係する。その存在の必要条件については Brauer はもちろんとして Green (Math. Z. 79 (1962)), 十分条件については 伊藤(昇)の諸結果(G: solvable Nagoya J. 1951, 1970) 等が興味深い。 ここでは前章の応用として

Theorem 3. c を p-elements 全部の和とする。c^2 は defect 0 の block idempotents の和である。

即ち defect 0 の block が存在するか否かは G の p-elements 全体の乗法構造に依存しているといってよい。しかし実際に c^2 を計算することは容易でない。
まず証明の前に2つの注意を Lemma の形で述べておく。
いずれも証明は容易である。
Lemma 3. A を k 上の (quasi) Frobenius algebra. e を A の primitive idempotent. Ae が irreducible なら Ae を含む A の block は simple algebra.

Lemma 4. kG の simple block は defect 0.
(即ちその degree が p^a で割れる ordinary character から

この§の初めに述べた方法で induce された block)

<u>定理の証明</u>　まず B を positive defect の block, δ をその block idempotent とする。e を B の任意の primitive idempotent とすれば Lemma 3,4, より $\mathfrak{N}e \neq 0$

$\therefore \mathfrak{N}e \supset r(\mathfrak{N})e \ni ce$　$\therefore ce \in \mathfrak{N}$　$\therefore c^2e = 0$

$\therefore c^2\delta = 0$.　次に δ を defect 0 の block idempotent とすれば　$c = 1 +$ (p-element の class の和)　だから

$\psi_B(c) = \psi_B(1) = 1$　(ψ_B は block B の unique linear character)

$\therefore c\delta = \psi_B(c)\delta = \delta$ (初めの等号は B が simple だから)　$\therefore c^2\delta = c\delta = \delta$.　Q.E.D

Corollary 5. kG が defect 0 の block を持つなら $\exists\, \theta_1, \theta_2$: p-elements があって $\theta_1\theta_2$ は defect 0 の p-regular element.

prrof. defect 0 の block idempotent は defect 0 の p-regular elements の和であるから。　Q.E.D.

この逆は一般には駄目であろう。もし $p=2$ で θ_1, θ_2 が共に involution なら上の条件は $\exists\, v$: p-regular defect 0 $\exists\, \theta$: involution　$\theta^{-1}v\theta = v^{-1}$ と同値である。

Theorem 4. G の Sylow 2-subgroup が elementary abelian とする。このとき G が 2-defect 0 の block をもつ $\Longleftrightarrow$ $\exists v$: 2-regular of defect 0, $\exists \theta$: involution $\theta^{-1} v \theta = v^{-1}$

Proof. $\Leftarrow$ を示せばよい。$\mathcal{S} = \{ (I, J) \mid IJ = v : I, J$ は involution$\}$ として $\mathcal{S}$ の個数が odd であることを示せばよい。これは involution に関する簡単な計算から直ちに知れる。

文献

[1] 中山, 東屋 ; 代数学 II (岩波)

[2] R. Brauer and C. Nesbitt : Annals of Math. 42 (1941)

[3] P. Fong ; Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962)

[4] 津島 : Osaka. J. (to appear)

[5] 〃 : in preparation