数理解析研究所講究録
第111巻 1971年 35-46

表現環の構造について

東京教育大学大学院　岩田恵司

Gを有限群とし　Rを Dedekind domain とする。以後 RG-加群については　R-加群として　有限生成, torsion free なものだけを扱う。RG-加群 M, N について, $M \otimes_R N$ は Gの作用を $g(m\otimes n) = gm \otimes gn$, $g\in G$, $m\in M$, $n\in N$ とすることにより RG-加群になる, これを $M\otimes N$ と書く。RG-加群の同型類を [ ] を付して表わす。いま RG-加群の同型類を生成元とし, 基本関係 $\{[M]=[M']+[M''] \mid M \cong M'\oplus M''\}$ で定義されるアーベル群は　更に　$[M][N]=[M\otimes N]$ と定義することにより環の構造をもつ, これを群Gの(R上の)表現環といい $a(RG)$ で表わす。$\mathbb{C}$-algebra $\mathbb{C}\otimes a(RG)$ を $A(RG)$で表わす。表現環の構造については Lam, Green, Conlon, 等によりいくつかの結果が得られているが, それらの概略をここに紹介する。

§1

本節を通して，Rはcomplete discrete valuation ringとし，Pをその極大イデアル．$\bar{R}=R/P$，$p=\mathrm{char}\,\bar{R}$，とする。

Gの部分群H, Kについて，もし$x^{-1}Kx\subseteq H$ $(\exists x\in G)$ならば このとき$K\leq H$と表わす。RH-加群Lに対してRG-加群$RG\otimes_{RH}L$をL^Gで表わすことにする。

<u>定義.</u> Gの部分群Dについて，$M\mid L^G$，$^{\exists}L$: RD-module，なる様な$[M]$で生成される$a(RG)$の加法的部分群は，更に$a(RG)$のイデアルになる，これを$a_D(RG)$で表わし，環$a_D(RG)/\sum_{H<D}a_H(RG)$を$w_D(RG)$で表わす。又それらを複素数丈まで係数拡大したものをそれぞれ$A_D(RG)$, $W_D(RG)$とする。

<u>定理 [1]</u> (Green [2])

$$W_D(RG)\approx W_D(RN(D)) \quad : \quad \text{ring isomorphic}$$

(ここに N(D)はDのGにおける正規化群)

証明は省略するが ここでの同型対応は $t([M])=[M^G]$で定義される transfer map $t: A(R{\cdot}N(D))\longrightarrow A(R{\cdot}G)$から自然に誘導された対応で与えられる。

注意． Dがp-部分群でない場合は$w_D(RG)=0$

補題 [2]

$F([M]) = [\bar{R}G \otimes_{RG} M]$ によって定義される自然な準同型 $F: A(RG) \longrightarrow A(\bar{R}G)$ を考える。$\{[X]-[X']-[X''] \mid \exists\, 0\to X'\to X\to X''\to 0$ $\bar{R}G$- exact sequence$\}$ で生成される $A(\bar{R}G)$ のイデアルを $A'(\bar{R}G)$ とし、$A'(RG) = F^{-1}(A'(\bar{R}G))$ とするとき

$$A(RG) = A_{(1)}(RG) \oplus A^{(1)}(RG)$$

とイデアル分解される。

証明　作り方より $A_{(1)}(\bar{R}G)A^{(1)}(\bar{R}G)=0$ 又 $A(RG)/A^{(1)}(RG) \approx G_0(\bar{R}G) \approx A_{(1)}(\bar{R}G) \approx A_{(1)}(RG)$。これより $A_{(1)}(RG)A^{(1)}(RG)=0$。準同型 $F^*: A(RG) \xrightarrow{F} A(\bar{R}G) \xrightarrow{\varphi} G_0(\bar{R}G)$ が $A_{(1)}(RG)$ の上で同型であることに注意すれば、$\exists J_G \in A_{(1)}(RG)$ s.th. $F^*(J_G)=F^*(1_G)$、ここに 1_G は $A(RG)$ の単位元、について $1_G = J_G + (1_G - J_G)$ と直交冪等元への分解が得られる。　(Q.E.D)

$H \triangleleft G$ とする。準同型 $G \longrightarrow G/H$ は自然に環準同型 $\tau: A(RG/H) \longrightarrow A(RG)$ を引き起こすが $\tau(A_{(1)}(RG/H)) \subset A_H(RG)$ である。そこで $\tau(J_{G/H})$，($J_{G/H}$ は $A_{(1)}(RG/H)$ の idempotent generator)，を再び同じ記号 $J_{G/H}$ で表わすことにする。

補題 [3]

$J_{G/H}$ は $A_H(RG)$ の idempotent generator である。

証明　$\bar{R}$は代数的に閉じている、と仮定してよい。

証明には入る前に少し準備をしておく。$\bar{R}$が代数的に閉じているから，Gの representation group $\hat{G}$ が存在して，Gの上のすべての twisted group algebra は $\bar{R}\hat{G}$ の両側イデアルとして実現される。そこでいまその分解を

$$\bar{R}\hat{G} = B_0 \oplus \cdots \oplus B_n, \qquad B_0 = \bar{R}G$$

とすると，これにより，$\mathbb{C}$-space への分解

$$A(\bar{R}\hat{G}) = A(B_0) \oplus \cdots \oplus A(B_n)$$
$$A_{(1)}(\bar{R}\hat{G}) = A_{(1)}(B_0) \oplus \cdots \oplus A_{(1)}(B_n)$$
$$A^{(1)}(\bar{R}\hat{G}) = A^{(1)}(B_0) \oplus \cdots \oplus A^{(1)}(B_n)$$
$$G_0(\bar{R}\hat{G}) = G_0(B_0) \oplus \cdots \oplus G_0(B_n)$$

が引き起される。又，$\bar{R}\hat{G}$ の Cartan matrix が non-singular であることより $\varphi_i : A_{(1)}(B_i) \xrightarrow{\sim} G_0(B_i)$：$\mathbb{C}$-isomorphic となる。$B_0$，$B_i$ －加群 M，N は自然に $\bar{R}\hat{G}$－加群とみれるが，$\bar{R}\hat{G}$－加群として $M \otimes N$ を考えると $M \otimes N$ は B_i－加群である。これによって $A(B_0)$，$A_{(1)}(B_0)$，$G_0(B_0)$ は各々 $A(\bar{R}\hat{G})$，$A_{(1)}(\bar{R}\hat{G})$，$G_0(\bar{R}\hat{G})$ の $\mathbb{C}$-subalgebra になることが分る。いま $A_{(1)}(\bar{R}G)$，$A_{(1)}(\bar{R}\hat{G})$ の idempotent generator をそれぞれ J_G，$J_{\hat{G}}$ とすると $J_{\hat{G}} = J_G \in A_{(1)}(B_0)$，なることが分る，これより $xJ_G = x$，$\forall x \in A_{(1)}(B_i)$，である。

absolutely indecomposable RH－加群 L をとり

L の G における stabiliser を S，$\{[M]\in A(RG) \mid M \mid L^G\}$ で生成された $A_H(RG)$ の $\mathbb{C}$-subspace を $A(L^G)$ とすると，計算は省略するが，S/H の $\bar{R}$ 上の twisted group algebra B_L と $\mathbb{C}$-linear homomorphism $F_L : A_H(RG)=\oplus_L A(L^G) \longrightarrow A_{(1)}(B_L)$ が構成され，次の条件を満足する。

$$F_L : \quad A(L^G) \xrightarrow{\sim} A_{(1)}(B_L) \quad : \mathbb{C}\text{-isomorphic}.$$

$$F_L(xy) = F_L(x)\,F_{1_H}(y) \quad , {}^{\forall}x\in A_H(RG),\ {}^{\forall}y\in A_{(1)}(R^{G}/H)$$

従って ${}^{\forall}x\in A(L^G)$ について

$$\begin{aligned} F_L(x J_{G/H}) &= F_L(x)\,F_{1_H}(J_{G/H}) \\ &= F_L(x)\,J_{S/H} \\ &= F_L(x) \end{aligned}$$

故に　$xJ_{G/H} = x$ 　　　　　　　　　　(Q.E.D)

以上の結果にもとずいて次の定理が導かれる。

<u>定理 [4]</u> (Conlon [3])

G の部分群 D について

$$A_D(RG) \Leftarrow\!\!\oplus\ A(RG)$$

$$A_D(RG) = A'_D(RG) \oplus A''_D(RG)\ , \qquad A''_D(RG) \cong W_D(RG)$$

$$\text{ここに}\quad A'_D(RG) = \sum_{D'<D} A_{D'}(RG)$$

証明　$|D|=1$ のときは証明されている。$|D|$ に関する帰納法で証明する。帰納法の仮定により $A'_D(RG) \Leftarrow\!\!\oplus\ A(RG)$ 従って補題[3]により $D \ntrianglelefteq G$ の場合について証明すればよい

$N(D) \subsetneqq G$ より $A_D(R\cdot N(D))$については定理は成立。従って

$$A_D(RG)/A'_D(RG) = W_D(RG)$$
$$= W_D(R\cdot N(D))$$
$$\cong A''_D(R\cdot N(D)) \oplus A(R\cdot N(D))$$

より $A_D(RG)/A'_D(RG)$ は identity element を持つ。

(Q.E.D)

§2

R は§1と同じく complete discrete valuation ring とする。ここでは $a(RG)$ の nilpotent element について調べる。
$D \triangleleft G$ とし、H を D を含む G の部分群とする。
inclusion map i_H $H \hookrightarrow G$ は

ring hom. $i_H^* : G_0(R\,G/D) \longrightarrow G_0(R\,H/D)$
$I_H^* : a_D(RG) \longrightarrow a_D(RH)$

add. hom. $i_{*H} : G_0(R\cdot H/D) \longrightarrow G_0(R\cdot G/D)$
$I_{*H} : a_D(RH) \longrightarrow a_D(RG)$

を誘導する。$a_D(RH)$ は $[M]\cdot[S] = [M_H \otimes S]$,
M : $R\,H/D$-加群、S ; D-projective RH-加群, M_H ; M を
$H \longrightarrow H/D$ を通して RH-加群としたもの, とすること
によって $a(R\,H/D)$-加群となるが、更に $G^0(R\cdot H/D)$-加群
でもあることが分る。

補題 [5]

$\Delta = \{$ subgroup H of $G \mid H \supset D,\ H/D$. cyclic $\}$ とするとき。もし $\Delta \ni {}^{\forall}H$ に対して $a_D(RH)$ が 0 以外の nilpotent element をもたないならば、$a_D(RG)$ も持たない。

証明　$x^n = 0$, $x \in a_D(RG)$ とすると、${}^{\forall}H \in \Delta$ に対して　$0 = I_H^*(x^n) = I_H^*(x)^n \in a_D(RH)$ 。従って $x \in \bigcap_{H \in \Delta} \operatorname{Ker} I_H^*$ 。さてここで

$$[G:D]^2 G_0(R\,G/D) \subset \sum_{H \in \Delta} \text{image } i_{*H}$$

であることに注意すれば

$$[G:D]^2 x = [G:D]^2 \cdot 1_{G/D} \cdot x \quad , \quad 1_{G/D} : G_0(R\,G/D) \text{の単位元}$$

$$= \sum_{H_j \in \Delta} a_j\, i_{*H_j}(y_j) x$$

$$ {}^{\exists}H_j \in \Delta,\ {}^{\exists}y_j \in G_0(R \cdot H_j/D)$$
$$ {}^{\exists}a_j : \text{integer}$$

$$= \sum a_j I_{*H_j}(y_j I_{H_j}^*(x))$$

$$= 0$$

従って $x = 0$　　　　　　　　(Q.E.D)

定理 [6]　(Lam [5])

次の条件を満足する G の部分群 H のすべてから成る集合を $\mathfrak{H}$ とする。　$H^{(p)} \triangleleft H$, $H/H^{(p)}$: cyclic

ここに $H^{(p)}$: p-Sylow subgroup of H

もし 亜$\ni {}^{\forall}H$ に対して $a(RH)$ が 0 以外の nilpotent element をもたないならば，$a(RG)$ も non-zero nil. el. を持たない。

証明　　$|G|=1$ のときは明らか。$|G|$ に関する帰納法で証明する。D を G の任意の p-部分群とする。もし $D \ntriangleleft G$ なら帰納法の仮定により $a(R\cdot N(D))$ は non-zero nil. ele. を持たない，従って $\omega_D(RG)$ ($\simeq \omega_D(R\cdot N(D))$) も non-zero nil. ele. をもたない。$D \triangleleft G$ の場合は ${}^{\forall}H \in \Delta$ とすると $D \subset H^{(p)} \subset H$，$H/D$ cyclic，従って $H \in$ 亜 となり $a(RH)$ は non-zero nil. el. をもたない。従って補題により，$a_D(RG)$ 故に $\omega_D(RG)$ も non-zero nil. el. を持たない。従って定理[4]により示された。　　(Q.E.D)

§3

本節では Burnside algebra の分解から誘導された，表現環のイデアル分解を紹介する。

定義．　RG-加群の category を $\mathbb{M}(RG)$ とし $\mathbb{L} = \bigcup_{D \leq G} \mathbb{M}(RD)$ とする。M が RD-加群であることを $T_M = D$ と書くことにする。$\mathbb{L} \ni M, M'$ について $M \cong {}^{x}M'$ ${}^{\exists}x \in G$ のとき $M \sim M'$ と書き，関係 $\sim$ による M の class を $\langle M \rangle$ で表わす。$\langle M \rangle$; $M \in \mathbb{L}$ で生成された free abelian group は生成元の間の積を

$$\langle M\rangle\langle N\rangle = \sum_x \langle M_{T_M\cap {}^xT_N} \otimes {}^xN_{T_M\cap T_N}\rangle$$

x は G の (T_M, T_N)－両側剰余類の代表系を動く

と定義することにより環になる．これを Burnside ring といい $b(RG)$ で表わす。 $B(RG) = \mathbb{C}\otimes b(RG)$ とする。

G の部分群 H について $\{\langle M\rangle \mid T_M \leq H\}$, $\{\langle M\rangle \mid T_M \lneq H\}$ で生成される $b(RG)$ の additive subgroup をそれぞれ $b_H(RG)$, $b'_H(RG)$ とすると，これらは $b(RG)$ のイデアルであることが分る。 $B_H(RG) = \mathbb{C}\otimes b_H(RG)$, $B'_H(RG) = \mathbb{C}\otimes b'_H(RG)$ とする。

定理[7] (Conlon[4])

$$b_D(RG)/b'_D(RG) \xrightarrow{\sim} b_D(R\cdot N(D))/b'_D(R\cdot N(D))$$

: ring isomorphic

証明 $b_D(RG) \longrightarrow b_D(R\cdot N(D))$ から誘導された additive hom. γ^* : $b_D(RG)/b'_D(RG) \longrightarrow b_D(R\cdot N(D))/b'_D(R\cdot N(D))$ について，γ^* は base を base に対応させているから additive isom.

しかも $M, M' \in \mathbb{M}(R\cdot D)$ について

$$\langle M\rangle\langle M'\rangle = \sum_{DxD\subset G} \langle M'\otimes {}^xM\rangle$$

$$\equiv \sum_{DxD\subset N(D)} \langle M'\otimes {}^xM\rangle \mod b'_D(RG)$$

従って γ^*: ring isomorphism

(Q.E.D)

11

$M \in \mathbb{L}$ とするとき，$T_M = S$，$k_S = [N(S):S]$ とおくと，

$$\langle 1_S \rangle \langle M \rangle = \sum_{SxS \subset G} \langle 1_S \otimes {}^x M \rangle$$

$$\equiv \sum_{SxS \subset N(S)} \langle 1_S \otimes M \rangle \quad mod\ b'_D(RG)$$

$$\equiv k_S \langle M \rangle \quad mod\ b'_D(RG)$$

これに注意して $|D|$ に関する帰納法により次の定理が証明される。

定理[8]（Conlon[4]）

$B_D(RG)$ は $B(RG)$ のイデアル因子である。

$$B_D(RG) = B'_D(RG) \oplus B''_D(RG), \quad {}^{\exists}B''_D(RG) \cong B_D(RG)/B'_D(RG)$$

特に Burnside alg は

$$B(RG) = \oplus_{D \leq G} B''_D(RG), \quad B''_D(RG) \cong B_D(RG)/B'_D(RG)$$

とイデアル分解される。

（証明略）

いま自然に algebra epimorphism $\psi : B(RG) \longrightarrow A(RG)$, $\langle M \rangle \longmapsto [M^G]$ が構成されるが，そこで，

$A^*_D(RG) = \psi(B_D(RG))$，$A^{*\prime}_D(RG) = \psi(B'_D(RG))$ とおく。

このとき次が成立する。

定理[9]（Conlon[4]）

$$A^*_D(RG) = A^{*\prime}_D(RG) \oplus A^{*\prime\prime}_D(RG)$$

$$A^*_D(RG) \oplus A^{*\prime\prime}_D(RG) \cong A^*_D(RG)/A^{*\prime}_D(RG) \cong A^*_D(R \cdot N(D))/A^{*\prime}_D(R \cdot N(D))$$

特に $A(RG) = \oplus_{D \leq G} A^{*\prime\prime}_D(RG)$

証明

$\langle M\rangle-\langle M'\rangle-\langle M''\rangle$; $T_M=T_{M'}=T_{M''}$, $M\cong M'\oplus M''$, $\langle N\rangle-\langle N^G\rangle$
で生成された $a(RG)$ の additive subgroup は ideal に
なる，これを $j(RG)$ で表わすと．$\mathrm{Ker}\,\psi=\mathbb{C}\otimes j(RG)$ で
あることが分る．$\mathbb{C}\otimes j(RG)\cap B_D(RG)$ の生成元を $\mathrm{mod}\ B'_D(RG)$
で考えると $\langle M\rangle-\langle M'\rangle-\langle M''\rangle$, $\langle N^P\rangle$．ここに，
$T_M=T_{M'}=T_{M''}=D$，$M\cong M'\oplus M''$．$T_N<D$，である．全
く同じ元が $\mathrm{mod}\ B'_D(R\cdot N(D))$ での $\mathbb{C}\otimes j(R\cdot N(D))\cap B_D(R\cdot N(D))$
の生成元である。従って定理[7][8]により示された。

(Q.E.D)

文 献

[1] C. W. Curtis and I Reiner ; Representation theory of finite groups and associative algebras (Interscience 1962)

[2] J. A. Green ; A transfer theorem for modular representations (J. of Alg 1 (1964))

[3] S. B. Conlon ; Relative components of Representations (J. Alg. 8 (1968))

[4] S. B. Conlon ; Decompositions induced from the Burnside algebra (J. Alg 10 (1968))

[5] T. Y. Lam ; A theorem on Green's modular representation (J Alg (1970))