数理解析研究所講究録
第111巻 1971年 65-81

整係数群環について

阪市大 理　　大林忠夫

§1. 序

有限群 G の有理整数環 $\mathbf{Z}$ 上の群環を $\mathbf{Z}G$ であらわす。群環に関するもっとも素朴な次の問題を考えよう。

問題：　二つの有限群 G, G' に対して，

$$\mathbf{Z}G \cong \mathbf{Z}G' \text{（環同型）} \Rightarrow G \cong G' \quad ?$$

いくつかの特殊な場合に，肯定的であることが知られているが，完全な解答にはほど遠い。しかし，否定的な解答は，一つも与えられていない。

群環の同型 $\mathbf{Z}G \cong \mathbf{Z}G'$ は，任意の体 K における群環の同型 $KG \cong KG'$，また，ホモロジー，コホモロジー群の同型 $H_n(G, \mathbf{Z}) \cong H_n(G', \mathbf{Z})$，$H^n(G, \mathbf{Z}) \cong H^n(G', \mathbf{Z})$ をひきおこす。したがって，問題の研究に，表現論，ホモロジー理論が利用できる。問題の完全な解答を得ることも興味あるこ

とであるが、また、この問題の研究を通して、有限群の表現論やホモロジー理論などの、構造論への応用を深めてゆくことも重要であろうと思われる。

以下では、表現論、ホモロジー理論の応用という観点から、問題に関する二、三の結果について述べよう。

§2. 群環の単数

有限群Gの群環 $\mathbb{Z}G$ において、Gの各元は、有限位数の単数という性質をもつ。したがって、$\mathbb{Z}G$ の単数の研究は、問題の解答への、一つの方法となる。

定理1 (*Higman* [3], *Cohn–Livingstone* [2]).
群環 $\mathbb{Z}G$ の有限位数の中心的な単数は、$\pm g$ (g : Gの中心的な元) の形のものに限る。

証明は[2]を参照。(Gの既約指標の直交関係を使って、容易になされる。)

この定理から、ただちに、次を得る。

系1. 群環の同型 $\phi ; \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}G'$ に対し、

i) $\mathfrak{z}(G)$ をGの中心とするとき、$\phi|_{\mathfrak{z}(G)} ; \mathfrak{z}(G) \simeq \mathfrak{z}(G')$,

ii) とくに、Gがアーベル群なら、$\phi|_G ; G \simeq G'$.

注：同型問題を考える場合は，環同型 $\phi; \mathbf{Z}G \simeq \mathbf{Z}G'$ は，群環 $\mathbf{Z}G$, $\mathbf{Z}G'$ の augmentation map $\varepsilon; \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ （$\varepsilon(\sum_g x_g g) = \sum_g x_g$），$\varepsilon'; \mathbf{Z}G' \to \mathbf{Z}$ と可換（$\varepsilon = \varepsilon' \circ \phi$）であると仮定できる．上の系における同型 ϕ も，そのように仮定されている．

非アーベル群においては，有限位数の単数でも，$\pm g$ の形でないものが，実際に存在し，同題の研究が複雑になる．次の補題は，そのような単数の形も，ある程度，制限されることを示していて重要である．

補題2．（[2]）　$\mathbf{Z}G \ni u = \sum x_g g$ を有限位数の単数で，$\mathfrak{z}(G) \ni g_0$ なるある g_0 に対して，$x_{g_0} \neq 0$ ならば，$u = \pm g_0$，すなわち，$x_{g_0} = \pm 1$，$\forall g \neq g_0$ に対して，$x_g = 0$ である．

証明．G の正則表現による，u のトレースを調べることによって得られる（[2]，参照）．

この補題を使って，次の定理が得られる．

定理3．（[2]）　$\varepsilon : \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ を augmentation map，H を，$\varepsilon(u) = 1$ なる $\mathbf{Z}G$ の単数 u からなるある有限群とすると，一般に，$(H:1) \leqq (G:1)$ で，とくに，$(H:1) = (G:1) \Leftrightarrow \mathbf{Z}H = \mathbf{Z}G$．

証明は [2] 参照．

$\phi;\ \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}G'$ を環同型, N を G の正規部分群とするとき, 群準同型 $G \to G/N$ から得られる群環の準同型 $\rho_N;\ \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}(G/N)$ に対して,

$$\Phi(N) = \{\, g' \in G' \mid \rho_N \circ \phi^{-1}(g') = 1 \,\}$$

によって, G' の正規部分群 $\Phi(N)$ が定義される. 次の定理は, 非アーベル群の場合の問題の研究においては, 基本的である.

定理4 ([2], Passman [8].) $\phi;\ \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}G'$ のとき,

i) Φ は, G, G' の, おのおの, 正規部分群のつくる lattice の間の同型対応をなす,

ii) とくに, $N \subseteq \mathfrak{Z}(G) \Rightarrow \Phi(N) = \phi(N) \subseteq \mathfrak{Z}(G')$, したがって,

$\phi|_N;\ N \simeq \Phi(N)$.

iii) ϕ は, 環同型 $\bar{\phi};\ \mathbb{Z}(G/N) \simeq \mathbb{Z}(G'/\Phi(N))$ をひきおこし, 次の図式を可換にする.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}G \arrow[r, "\rho_N"] \arrow[d, "\phi", "\cong"'] & \mathbb{Z}(G/N) \arrow[d, "\bar{\phi}", "\cong"'] \\
\mathbb{Z}G' \arrow[r, "\rho_{\Phi(N)}"] & \mathbb{Z}(G'/\Phi(N))
\end{tikzcd}$$

証明. i) は定義から直接得られる. ii) は定理1の系か

ら，iii) はΦの定義と定理3から示される．詳わしくは，[2] [8]参照．

この定理，とくに，ii) によって，中心の性質によって，特徴づけられる群の場合を扱うことができる．

定理5（[2], [8].）　$\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}G'$ のとき，G, G' の昇(降)中心列の長さは等しく，おのおのの商群は同型である．とくに，Gが級nの巾零群なら，G'もそうである．

注：$C_1, \cdots, C_t$ をGの共役類，$c_i = \sum_{g \in C_i} g \in \mathbb{Z}G$ を共役和とすると，$\{c_1, \cdots, c_t\}$ は $\mathbb{Z}G$ の中心の $\mathbb{Z}$-基底をなす．Passman [8] は，$\{c_i\}$ が $\mathbb{Z}G$ の環論的性質によって決まるという Glauberman の結果に基づいて，具体的に $\{c_i\}$ を計算することによって，Gが，級2の巾零群，または，位数p^5以下のp-群なら，問題は肯定的であることを示している．これらに関しては，[8]，または，大林[6]参照．

§3. 拡大群の群環

Πを有限群，AをΠ-加群とする．Πの群環 $\mathbb{Z}\Pi$ は，augmentation $\varepsilon : \mathbb{Z}\Pi \to \mathbb{Z}$ によって，係数添離環となるが，Π-加群Aは，Πの作用を線型的に$\mathbb{Z}\Pi$へ拡張した作用と，

εを通して得られる$Z\Pi$の作用により，$Z\Pi$-両側加群とも見なせる．そして，群 Π のAに関する２－コサイクル
$\alpha ; \Pi\times\Pi \longrightarrow A$ と，係数遊離環 $Z\Pi$ のAに関する２－コサイクル $\alpha^* ; Z\Pi\times Z\Pi \longrightarrow A$ は，対応 $\alpha \longrightarrow \alpha^*$ （$\alpha^*(\sum x_\sigma\sigma, \sum x'_\tau\tau) = \sum x_\sigma x'_\tau \alpha(\sigma,\tau)$ ），$\alpha^* \longrightarrow \alpha$ （$\alpha(\sigma,\tau) = \alpha^*(\sigma,\tau)$）によって，同一視される．この同一視によって，$H^2(\Pi, A) = H^2(Z\Pi, A)$ と考える。したがって，Aを核とするΠの群拡大

$$E_G : \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{f} \Pi \longrightarrow 1 \qquad (1)$$

の同値類の集合 $Ext(\Pi, A)$ と，Aを核とする係数遊離環 $Z\Pi$の 環拡大

$$E_\Lambda : \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i^*} \Lambda \xrightarrow{f^*} Z\Pi \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

の同値類の集合 $Ext(Z\Pi, A)$ とが一対一に対応する．E_G から E_Λ，また，その逆の具体的な構成の仕方は，たとえば，Cartan-Eilenberg [1] で与えられている．必要上，ここで復習しておく．

$E_G \Rightarrow E_\Lambda$ の構成： 群拡大(1)が与えられたとき，Aと $i(A)$ を同一視して，AをGの部分群とみなすと，環の完全系列 $0 \rightarrow I(A)ZG \xrightarrow{i} ZG \xrightarrow{f} Z\Pi \longrightarrow 0$ （ここで，$I(A) = \mathrm{kernel}\{\varepsilon : ZA \rightarrow Z$ augmentation map$\}$，augmentation イデアル

である）が得られる．$\mathbb{Z}G$ の両側イデアル $I(A)I(G)=I(A)\mathbb{Z}G\cdot I(G)$ は $I(A)\mathbb{Z}G$ に含まれるから，次の完全系列が得られる．

$$0 \longrightarrow I(A)\mathbb{Z}G/I(A)I(G) \xrightarrow{i^*} \mathbb{Z}G/I(A)I(G) \xrightarrow{f^*} \mathbb{Z}\pi \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

ここで，写像 $a \bmod [A,A] \longrightarrow (a-1) \bmod I(A)I(G)$ は，乗法群から加法群への同型 $A/[A,A] \cong I(A)\mathbb{Z}G/I(A)I(G)$ を与える．したがって，$I(A)\mathbb{Z}G/I(A)I(G)$ は，加法群 A（A: アーベル群より $[A,A]=1$）と同一視され，そのとき，i^* は，$i^*(a)=(i(a)-1) \bmod I(A)I(G)$ となる．そこで，$\Lambda=\mathbb{Z}G/I(A)I(G)$ とおけば，上の完全系列 (3) が，係数遊離環の拡大になることが，容易に分る．

$E_\Lambda \Rightarrow E_G$ の構成：係数遊離環の拡大 (2) が与えられたとき，$G=\{\lambda\in\Lambda : f^*(\lambda)\in\pi\}$ とおくと，G は Λ の乗法に関し，群となり，$f=f^*|G$；$G\longrightarrow\pi$，$i: A\longrightarrow G$（$i(a)=i^*(a)+1$）が，群拡大 E_G：$0\rightarrow A\xrightarrow{i} G\xrightarrow{f}\pi\longrightarrow 1$ を定義する．

補題6（[1].）上の方法によって，E_G から E_Λ，または，E_Λ から E_G を構成したとき，E_G と E_Λ の特性類は（$H^2(\pi,A)$ と $H^2(\mathbb{Z}\pi,A)$ の同一視のもとで）一致する．よって，上の構成による対応 $E_G \leftrightarrow E_\Lambda$ によって，$\mathrm{Ext}(\pi,A)$ と

$Ext(Z\Pi, A)$ は一対一に対応する.

拡大の理論を，われわれの問題に応用するため，さらに，次の補題を必要とする．　いま，二つの群拡大と同型写像

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\cong" left, "\phi^*"] & G \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\Phi"] & \Pi \arrow[r] \arrow[d, "\cong" left, "\psi"] & 1 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & G' \arrow[r] & \Pi' \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \qquad (☆)$$

が与えられたとする．このとき，Π'-加群 A' を ψ を通して Π-加群とみることによって，ψ は，コホモロジー群の同型 $H(\psi) ; H^2(\Pi', A') \xrightarrow{\sim} H^2(\Pi, A')$ をひきおこす。さらに，ϕ^* が Π-加群としての同型写像なら，コホモロジー群の同型 $H(\phi^*) ; H^2(\Pi, A) \xrightarrow{\sim} H^2(\Pi, A')$ が得られる.

補題 7 (e.g. [5].)　次は同値である.

(i) 図式 (☆) を可換にする同型 $\Phi : G \simeq G'$ が存在する.

(ii) ϕ^* は Π-加群 (A' を ψ を通して，Π-加群と考えて) の同型写像であり，拡大 G, G' の特性類 $\alpha \in H^2(\Pi, A)$, $\alpha' \in H^2(\Pi', A')$ に対し，$H(\phi^*)(\alpha) = H(\psi)(\alpha')$ が成り立つ。

注意：係数造離環の拡大に対しても，同様の命題が成り立つ.

問題を考えよう。 ϕ; $ZG \xrightarrow{\sim} ZG'$ を augmentation と可換な環同型とする。もしも、G がアーベル正規部分群 A をもてば、定理4によって、G' も A と同型なアーベル正規部分群 $A' = \Phi(A)$ をもつ。$\Pi = G/A$, $\Pi' = G'/A'$ とおくと、同じく定理4によって、次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I(A)ZG & \longrightarrow & ZG & \longrightarrow & Z\Pi & \longrightarrow & 0 \\
 & & \cong\Big\downarrow\phi & & \cong\Big\downarrow\phi & & \cong\Big\downarrow\bar{\phi} & & \\
0 & \longrightarrow & I(A')ZG' & \longrightarrow & ZG' & \longrightarrow & Z\Pi' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ところで、ϕ は augmentation と可換であるから、$\phi(I(A)I(G))$ $= I(A')I(G')$ となり、$I(A)ZG/I(A)I(G)$ と A を同一視して、次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{cccccccccc}
E_\Lambda : & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & ZG/I(A)I(G) & \longrightarrow & Z\Pi & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \cong\Big\downarrow\phi^* & & \cong\Big\downarrow\phi^* & & \cong\Big\downarrow\bar{\phi} & & \\
E_{\Lambda'} : & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & ZG'/I(A')I(G') & \longrightarrow & Z\Pi' & \longrightarrow & 0
\end{array} \qquad (5)$$

E_Λ, $E_{\Lambda'}$ は、補題6によって、群拡大 $E_G : 0 \to A \to G \to \Pi \to 1$, $E_{G'} : 0 \to A' \to G' \to \Pi' \to 1$ に対応する係数遊離環の拡大であり、E_G, $E_{G'}$ の特性類 α, α' は E_Λ, $E_{\Lambda'}$ の特性類とも考えられる。よって、補題7の後の注意によって、次が成り立つ.

補題8. $Z\Pi'$-加群 A' を 環同型 $\bar{\Phi}$ を通して, $Z\Pi$-加群とみるとき, $\phi^*; A\to A'$ は, $Z\Pi$-加群の同型写像であり, $\bar{\Phi}$, ϕ^* からひきおこされるコホモロジー群の同型, $H(\bar{\Phi})$; $H^2(Z\Pi', A')\to H^2(Z\Pi, A')$, $H(\phi^*)$; $H^2(Z\Pi, A)\to H^2(Z\Pi, A')$ と, E_G, $E_{G'}$ の特性類 α, α' に対し, $H(\phi^*)(\alpha)=H(\bar{\Phi})(\alpha')$ が成り立つ.

この補題から, アーベル正規部分群 A をもつ有限群 G に対し, 環同型 $\phi: ZG\simeq ZG'$ が与えられたとき, $G\cong G'$ なるための, 一つの十分条件を得る.

補題9. $\phi: ZG\simeq ZG'$ に対し, 次の条件をみたす, 群同型 $\psi: \Pi\simeq\Pi'$ が存在すれば, $G\cong G'$ である.

(1) 環同型 $\bar{\Phi}: Z\Pi\simeq Z\Pi'$ を通して得られる Π の A' への作用と, ψ を通して得られる Π の A' への作用は一致する.

(2) 拡大 $E_{G'}$ の特性類 $\alpha'\in H^2(\Pi', A')$ に対し,

$H(\bar{\Phi})$: $H^2(\Pi', A')=H^2(Z\Pi', A')\longrightarrow H^2(Z\Pi, A')=H^2(\Pi, A')$ と考えて,

$$H(\psi)(\alpha')=H(\bar{\Phi})(\alpha') \quad \text{が成り立つ.}$$

証明) ϕ から得られる同型 $\phi^*: A\simeq A'$ と, 与えられた同型 $\psi: \Pi\simeq\Pi'$ に対して, 図形(4)を考える. 補題8より, ϕ^* は, A' を $\bar{\Phi}$ を通して Π-加群と考えて, Π-同型であるか

ら，条件(1)によって，A'をψを通して，π-加群と考えても，$\phi^*: A \simeq A'$はπ-同型である。さらに，補題8と条件(2)より，拡大E_G，$E_{G'}$の特性類α, α'に対して，$H(\phi^*)(\alpha) = H(\psi)(\alpha')$が成り立つ．よって，補題7より，$G \cong G'$．

定理10（Jackson[4].）$\phi; ZG \simeq ZG'$で，Gがメタアーベル群ならば，$G \cong G'$である．さらに，AをGのアーベル正規部分群で，G/Aがアーベル群なるものとすると，Aに対応するG'の正規アーベル部分群$A' = \Phi(A)$と，ϕからひきおこされる同型$\phi^*: A \simeq A'$が得られるが，ϕに対して，同型$\Phi: G \simeq G'$として，次を満すものが取れる．

$\phi(g) \equiv \Phi(g) \mod I(A')I(G')$，$^{\forall}g \in G$，かつ，$\Phi_{|A} = \phi^*$．

証明）$\pi = G/A$，$\pi' = G'/A'$とおくと，ϕは同型$\bar{\phi}; Z\pi \simeq Z\pi'$をひきおこすが，$\pi$はアーベル群であるから，定理1の系ii)によって，$\bar{\phi}_{|\pi}; \pi \simeq \pi'$（群同型）となる。よって，補題9において，$\psi$として$\bar{\phi}_{|\pi}$を考えれば，条件1)，2)は明らかに満たされる．さらに，合同式を満たすような同型$\Phi: G \simeq G'$が取れることは，図形(5)と，補題7の証明（[5]参照）から容易に分る．

定理11．$ZG \cong ZG'$で，Gがアーベル正規部分群Aをもち，

$G/A = \Pi$ が，位数 8 の四元数群と初等的アーベル 2-群の直積に同型なら，$G \cong G'$.

証明）Higman [3] によって，上のような Π に対しては，$Z\Pi$ の任意の単数は，$\pm\sigma$ $(\sigma\in\Pi)$ の形のものに限ぎることが知られている．よって，任意の環同型 $\bar{\Phi}: Z\Pi \cong Z\Pi'$ は，群同型 $\psi = \bar{\Phi}|\Pi: Z\Pi \cong Z\Pi'$ をひきおこす。いま，$A' = \Phi(A)$，$\Pi' = G'/A'$ とおき，$\phi: ZG \cong ZG'$ から得られる，同型 $\bar{\Phi}: Z\Pi \cong Z\Pi'$ に対し，$\psi = \bar{\Phi}|\Pi$ とおけば，群同型 ψ は，補題 9 の条件を満たす．

定理 12. ϕ; $ZG \cong ZG'$ 環同型．A を G のアーベル正規部分群，A' を A に対応する G' のアーベル正規部分群とする．
H/A，H'/A' を，おのおの，G/A，G'/A' の中心とすると，$H \cong H'$.

証明）．$\Pi = G/A$，$\Pi' = G'/A'$，$\Pi_0 = H/A$，$\Pi_0' = H'/A'$ とおく。ϕ は環同型 $\bar{\Phi}$; $Z\Pi \cong Z\Pi'$ をひきおこすが，Π_0 は Π の中心だから，$\psi = \bar{\Phi}|\Pi_0$; $\Pi_0 \cong \Pi_0'$ は群同型となる．そこで，群拡大の次の図形を考える．

$$
\begin{array}{llllllllll}
E_H: & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \Pi_0 & \longrightarrow & 1 \\
 & & & \cong\big\downarrow \phi^* & & & & \cong\big\downarrow \psi & & \\
E_{H'}: & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & \Pi_0' & \longrightarrow & 1.
\end{array}
$$

まず，補題 8 より，A' を ψ を通して Π_0－加群と考えたとき，

ϕ^* は Π_0-同型である（$\psi=\Phi|\Pi_0$ に注意）．次に，

Res；$H^2(\Pi,A)\longrightarrow H^2(\Pi_0,A)$ を制限写像とすると，明らかに，$\mathrm{Res}\circ H(\phi^*)=H(\phi^*)\circ\mathrm{Res}$ が成り立つ．また，$\psi=\Phi|\Pi_0$ に注意すれば，$\mathrm{Res}\circ H(\Phi)=H(\psi)\circ\mathrm{Res}$ が成り立つ．α,α' を，おのおの，拡大 E_G；$0\to A\to G\to\Pi\to 1$，$E_{G'}$：$0\to A'\to G'\to\Pi'\to 1$ の特性類とすると，補題8より，$H(\phi^*)(\alpha)=H(\Phi)(\alpha')$ である．これと，上の関係式より，$H(\phi^*)(\mathrm{Res}(\alpha))=H(\psi)(\mathrm{Res}(\alpha'))$ を得る．ところで，$\mathrm{Res}(\alpha)$，$\mathrm{Res}(\alpha')$ は，おのおの，拡大 E_H，$E_{H'}$ の特性類であるから，補題7によって，$H\cong H'$ となる．

系（[8]）$ZG\cong ZG'$ なら，G と G' の二番目の中心は，互に同型である。とくに，G が級2の巾零群なら，$G\cong G'$．

§4．位数8の二面体群 D_4 の群環 ZD_4．

定理10，あるいは，定理12の系から，一般の可解群，巾零群への拡張が次の問題となるが，いまのところ，一つの難点がある．たとえば，$\phi:ZG\simeq ZG'$ で，G を級3の巾零群，A を G の中心とすると $\Pi=G/A$ は級2の巾零群となる。$\Phi(A)=A'$，$\Pi'=G'/A'$ とおくと，ϕ は同型 Φ；$Z\Pi\simeq Z\Pi'$ をひき起こす。いま，$G\cong G'$ なる一つの規準として，補題9を考えれば，Π は級2の巾零群だから，確しかに，群同型 $\psi:\Pi\simeq\Pi'$ が存在

するが，この ψ が補題9の条件をみたすかどうかは分らない。前章で扱われた場合は，ある意味で，補題9の条件が，trivially に成り立っていた。しかし，一般にその事は期待できない。実際，補題9において，$\pi=D_4$ の場合には，コホモロジー群を考えて，はじめて条件がみたされることが分る．このことを以下で示そう。そのために，$\mathbb{Z}D_4$ の環自己同型についての，ある知識が必要となる．

D_4 を，$a^4=b^2=1$，$ab=ba^3$ なる a, b で生成された，位数8の二面体群とする．$A=\langle a^2\rangle$ は D_4 の中心となる．

補題13．合同式

$$\varphi(x)\equiv x \mod I(A)I(D_4)\ ,\ {}^{\forall}x\in D_4 \tag{6}$$

をみたす $\mathbb{Z}D_4$ の環自己同型 $\varphi;\mathbb{Z}D_4\cong\mathbb{Z}D_4$（augmentation ε と可換）は，次の形で与えられる．

$$\begin{cases}\varphi(a)=a+r_a(1-a^2)a+r_b(1-a^2)b+r_{ab}(1-a^2)ab\\ \varphi(b)=b+s_a(1-a^2)a+s_b(1-a^2)b+s_{ab}(1-a^2)ab,\end{cases} \tag{7}$$

ここで，$r=\{r_a, r_b, r_{ab}\}$，$s=\{s_a, s_b, s_{ab}\}$ は，

$$\begin{cases}r_a(r_a+1)=r_b^2+r_{ab}^2\\ s_b(s_b+1)=s_a^2-s_{ab}^2\\ 2(r_as_a-r_bs_b-r_{ab}s_{ab})=r_b-s_a\end{cases} \tag{8}$$

をみたす偶数である．逆に，(7) で定義される φ は，合同式 (6) をみたす ZD_4 の自己同型である．

証明)．[7] を参照．

この補題の (7) 式で定義される自己同型を，簡単のため，$\varphi_{r,s}$ と記すことにする．

定理14．ZD_4 の（augmentation ε と可換な）任意の自己同型 φ は，D_4 の自己同型 Φ と，(8) 式をみたすある偶数 $r=\{r_a, r_b, r_{ab}\}$，$s=\{s_a, s_b, s_{ab}\}$ に対し，$\varphi_{r,s}$ との合成 $\varphi_{s,r}\circ\Phi$ として得られる。

証明)．D_4 の中心 A による商群 D_4/A はアーベル群より，環同型 $\varphi; ZD_4 \simeq ZD_4$ に，定理10を適用すると，$\varphi(x) \equiv \Phi(x) \mod I(A)I(D_4)$，${}^\forall x \in D_4$ なる D_4 の自己同型 Φ が存在する．かつ，$\Phi(A)=A$ より，ZD_4 の自己同型 $\varphi\circ\Phi^{-1}$ は，$\varphi\circ\Phi^{-1}(x) \equiv x \mod I(A)I(D_4)$，${}^\forall x \in D_4$ をみたす。よって，補題13より，定理を得る．

定理15．$\phi; ZG \simeq ZG'$ で，G が初等的アーベル群 A を正規部分群にもち，G/A が位数8の二面体群 D_4 に同型となるような 2-群ならば，$G \cong G'$ である．

証明). $A'=\Phi(A)$ を A に対応する G' のアーベル正規部分群とする. $\phi^*; A \simeq A'$ を ϕ から得られる同型, $\Pi=G/A$, $\Pi'=G'/A'$ とおいて, ϕ から得られる環同型 $\bar{\Phi}; Z\Pi \simeq Z\Pi'$ を考える. Π は D_4 に同型であるから, Π_0, Π_0' を Π, Π' の中心とすると, $\bar{\Phi}(x) \equiv \Psi(x) \mod I(\Pi_0')I(\Pi')$, $^\forall x\in\Pi$, かつ, $\Psi(\Pi_0)=\Pi_0'$ となる群同型 $\Psi; \Pi \simeq \Pi'$ が存在する. よって, $\Psi^{-1}\circ\bar{\Phi}$ は, $Z\Pi$ の自己同型で, $\Psi^{-1}\circ\bar{\Phi}(x) \equiv x \mod I(\Pi_0)I(\Pi)$, $^\forall x\in\Pi$ をみたす。よって, 補題13より, $\Psi^{-1}\circ\bar{\Phi}(x)=x+2X$, $X\in I(\Pi_0)Z\Pi$ なる X が, $x\in D_4$ に対して決まる. すなわち, $\bar{\Phi}(x)=\Psi(x)+2\Psi(X)$. ところで, A は巾指数 2 であるから, $\bar{\Phi}$ を通しての, Π の A' への作用は, Ψ を通してのそれに一致する. また, $H^2(\Pi, A')$ も巾指数 2 であるから, 明らかに, $H(\bar{\Phi})=H(\Psi)$ となる. よって, 補題9より, $G\cong G'$ を得る.

例. 補題13において, 合同式(6) をみたす ZD_4 の自己同型 φ としては, たとえば, 次のものがある.

$$\begin{cases} \varphi(a)=a+4(1-a^2)a+2(1-a^2)b+4(1-a^2)ab \\ \varphi(b)=b+2(1-a^2)a+2(1-a^2)ab \end{cases}$$

引用文献

[1] H. Cartan - S. Eilenberg ; Homological Algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[2] J.A. Cohn - D. Livingstone ; On the structure of group algebras, Canad. J. Math., 17 (1965), 583-593.

[3] G. Higman ; The units of group rings, Proc. Lond. Math. Soc., 46 (1940), 231-248.

[4] D. A. Jackson ; The groups of units of the integral group rings of finite metabelian and finite nilpotent groups, Quart. J. Math. Oxford, 20 (1969), 319-331.

[5] S. Lang ; Rapport sur la Cohomologie des Groupes, Benjamin, Inc., 1966.

[6] 大林 ; 整係数群環について, 数学, 19 (1967), 18-30.

[7] T. Obayashi ; Integral group rings of finite groups, Osaka J. Math., 7 (1970), 近刊.

[8] D.S. Passman ; Isomorphic groups and group rings, Pacific J. Math., 15 (1965), 561-583.