数理解析研究所講究録
第112巻 1971年 6-13

拡散過程の細位相に関する比較定理

名大 教養 神田護

[1] 細位相と正則点

Ω を R^n 内の領域，$X=(x_t, \mathcal{B}, \mathcal{M}_t, P_x)$ を Ω 上の Hunt process とする。

定義1. $B\subset\Omega$ を nearly Borel set，x が B の（X に関する）正則点 $\Leftrightarrow x\in B_X^{reg} \Leftrightarrow P_x(\sigma_B=0)=1$ 但し，$\sigma_B=\inf(t>0, x_t\in B)$．

定義2 $A\subset\Omega$ が finely open $\Leftrightarrow {}^\forall x\in A$，${}^\exists D$ nearly Borel set $\rightarrow A^c(=\Omega-A)\subset D$ かつ $x\in D_X^{irreg}$．

Ω 上の finely open set 全体を $\mathcal{O}$ とすれば Ω 上の topology が定義される．これを X による Ω 上の fine topology という．

次の Prop. は Blumenthal-Getoor の本 [1] の P84 II 4. のいくつかの Prop. を用いることによって示せる。

PROPOSITION 1 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ をそれぞれ Ω 上の Hunt process X_1 及び X_2 による fine topology とする。次の2つは同値である。

i) $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より強い.

ii) $\forall$ open B , $B_{X_1}^{reg} \subset B_{X_2}^{reg}$

2 2階の強楕円型微分作用素に関する正則点

R^n $(n \geqq 2)$ 上の微分作用素 $\mathcal{D}$

イ) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ ロ) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$

共に強楕円型, 係数有界可測, を考える。 上の $\mathcal{D}$ を generator とするマルコフ過程が構成できた時, $\boxed{1}$ でのべた意味での正則点と Dirichlet 問題 (上の $\mathcal{D}$ に関する) における正則点とが一致する事を示すのは trivial な事ではない. (係数不連続の時, Dirichlet 問題の定式化自体にも問題がある) しかし, ここでは 2つの概念を混同して用いる。 次の結果が分っている。

i) ロ) に関する正則点とラプラシアンに関するそれとは一致する。

ii) 係数が Dini 連続ならイ) に関しても i) の結論は正しい. N. V. Krylov [2]

iii) 係数が連続性だけをもつなら イ)の場合 $n=2$ の時 1点がそれ自身の正則点となる例がある。(ラプラシアンに関してはそのような事はない). 3次元以上の時は不明である。

iv). イ)の場合 係数不連続とすると種々の奇妙な例があらわれる。 E.M. Landis [3] K. Miller [4]

iv)の例をみると イ)の場合 係数が不連続の時, 一般論的な取扱いは見込みがないように思われる。問題は連続係数の場合である。一般論的取扱いからどれくらいの結果が得られるか? このノートでは1つの解答を与える。

$\boxed{3}$ 一様連続係数の拡散過程の細位相に関する比較定理

イ)の形の $\mathfrak{D}$ に対応する R^n上の拡散過程を $X=(x_t, t\geq 0, \mathcal{M}_t, P_x)$ とする 但し係数は R^n で一様連続とする。その時

<u>定理 1.</u> $n \geqq 3$ ならば X による R^n上の fine topology は R^n上の symmetric stable process of order α, $0<\alpha<2$ による fine topology より弱い。

このノートでは上の定理の証明の概略を 係数が一様 Dini 連続の時 Brown 運動と細位相が一致するという事をも含めた形でのべる。この方法によると具体的に係数の滑らかさが与えられた時 上の結果よりくわしい結果が得られる。

$\boxed{4}$ 一般論よりの準備

$\boxed{3}$でのべた定理を示すために 多少一般的な場合に細位相の比較定理をのべる.

$X_i = (x_t^i, \zeta^i, M_t^i, P_x^i)$ $i=1,2$ を次の条件をみたす領域 $\Omega \subset R^n$ 上の Hunt process とする。

i) $\exists \alpha > 0$ $G_\alpha^i ; C_c(\Omega) \to C(\Omega)$, 但し G_α^i $i=1,2$, は α 次の resolvent operator, $C_c(\Omega)$ は Ω 上 compact support をもつ連続函数の空間

ii) $\forall x, x' \in \Omega$ $P_x^i(\sigma^i_{\{x'\}} < +\infty) = 0$, $i=1,2$.

iii) $\int_0^{+\infty} T_t^i f < +\infty$, $\forall f \in C_c(\Omega)$

更に X_1 は次の性質をもつ green 函数 $G^1(x,y)$ をもつ。

1) $G^1(x,y) \geqq 0$ $\Omega \times \Omega$ 上可測 y を固定 x について X_1-excessive, $\int_\Omega G^1(x,y) f(y)\, dy = \int_0^{+\infty} T_t^1 f(x)\, dt$ $\forall f \in C_c(\Omega)$.

2) $\forall B$ compact $\subset \Omega$ $\int_B G(x,y)\,dy$ 有界

3) $G^1(x,y)$ は任意の対角線の近傍を除いて有界

4) $\lim_{n\to\infty} \inf_{(x,y)\in \Omega_n \times \Omega_n} G^1(x,y) = +\infty$, $\Omega_n \downarrow$ 1点, $n \uparrow \infty$

5) $\forall B$ compact or open with compact closure $\subset \Omega$

$$P_x^1(\sigma_B < +\infty) = \int_\Omega G^1(x,y)\, \overset{\exists}{\mu_B}(dy)$$

$\mu_B(dy)$ の support は $\overline{B}$ 内にある。

定義 3　X : Ω 上の Hunt process, Q open $\subset \Omega$, $x_0 \in Q$, f は Ω 上の可測函数 ; f が C-subharmonic (C-superharmonic) at (x_0, Q) w.r.t X (但し $C>0$) $\Longleftrightarrow$

$$E_{x_0} f(x_{\tau_S}) \geq C f(x_0) \quad ('' \leq '')$$

for $^\forall S$ open $\to$ $Q \supset \bar{S} \supset S \ni x_0$, $\tau_S = \inf\{t \geq 0, x_t \in \Omega - S\}$

定理 2　$^\forall x_0 \in \Omega$, $^\exists$ neighborhood V, $^\exists C > 0$

$G^2_y(\cdot)$ $(\equiv G^2(\cdot, y))$ が C-subharmonic (C-superharmonic) at $(x_0, V - \{y\})$ w.r.t X_2 for each $y \in V$, $y \neq x_0$

$$\Downarrow$$

X_1 による fine topology は X_2 による それより強い (resp. 弱い).

証明はどこかに発表する予定なので省略する。

5　定理 1 の証明のアウトライン

記号　$n \geq 2$.

$$\mathfrak{D} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \longrightarrow X : \mathfrak{D} \text{ を generator とする}$$

マルコフ過程

$$\lambda_2 |\xi|^2 \geq \sum a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda_1 |\xi|^2, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

$a(r)$; conti, nonnegative, monotone increasing on $[0, +\infty)$

$\to$ $\lim_{r \to 0} a(r) = 0$, $\max_{i,j} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq a(\sqrt{\lambda_1}|x-y|)$.

$(A_{ij}(y))$ は $(a_{ij}(y))$ の cofactor matrix

$$\rho_y(x) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}$$

$$B_{ij}^{y}(x) = \sum_{l=1}^{n} A_{il}(x_l - y_l) \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(x_k - y_k)$$

注意 $\sqrt{\lambda_1}\,|y-x| \leq \rho_y(x) \leq \sqrt{\lambda_2}\,|y-x|$

$$\sum_{i,j=1}^{n} |B_{ij}^{y}(x)| \leqq {}^{\exists}M\, \rho_y(x)^2$$

LEMMA 1 $n \geqq 3$ あるいは $n \geqq 2$ かつ 一様 Dini 連続 (即ち $\int_0 \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho < +\infty$) なる X は 性質 ii) をもつ.

証明略

LEMMA 2 k_i, $i=1,2$ を ある区内 $(0, s_0]$ 上の 正の 可測函数 で

$$k_1(\rho) \geqq \frac{(n-1) + Ma(\rho)}{\rho(1 - Ma(\rho))}$$

$$k_2(\rho) \leqq \frac{(n-1) - Ma(\rho)}{\rho(1 + Ma(\rho))} \qquad \rho \in (0, s_0]$$

をみたすものとする.

$$\varphi_i(r) = \int_r^{s_0} \exp\left(-\int_{s_0}^{t} k_i(\rho)\, d\rho\right) dt \qquad i=1,2$$

とおく. もし $0 < {}^{\forall}r < s_0$, $0 < {}^{\forall}c < 1$, ${}^{\exists}K_c^i > 0$

$$\frac{\varphi_i(cr)}{\varphi_i(r)} \le K_c^i < +\infty \qquad i=1,2$$

がみたされるならば Ω内の任意の点に対して近傍 V と正定数 C_i, $i=1,2$ を適当にとらべば、$\varphi_1(|\cdot-y|)$ は C_1-sub-harmonic at $(x, Q-\{y\})$ w.r.t X for each $x, y\in Q$ $x\neq y$ （ $\varphi_2(|\cdot-y|)$ は C_2-superharmonic 〃 ）

証明略

定理2と Lemma 2 (及び Lemma 1) より.

定理1′ もし. Ω上に上でのべた φ_i, $i=1,2$ を singularity とする Green 函数 $G^i(x,y)$, $i=1,2$（即ち $G^i(x,y) \sim \varphi^i(|x-y|)$, $|x-y|$ 十分小）で性質1)～5)をみたすものを持つ Hunt process X_i, $i=1,2$ が存在し、それらが性質 i)～iii) を満足するならば、X による fine topology は X_1 による fine topology より弱い（X_2 による fine topology より強い）
（但し $n\ge 3$ あるいは $n\ge 2$ で係数一様 Dini 連続とする）。

定理1′ ⟹ 定理1 の証. $0<\alpha<2$, $\beta=\alpha-1$, ρ_0 十分小い, ($n\ge 3$)

$$\frac{(n-1)+Ma(\rho)}{\rho(1-Ma(\rho))} \le \frac{(n-1)+Ma(\rho)}{\rho}(1+2Ma(\rho)) \le \frac{n-\beta}{\rho}$$

そこで
$$k_1(\rho) = \frac{n-\beta}{\rho}$$
とおけば
$$\varphi_1(r) \sim r^{\alpha-n}$$

文献

[1] R.M. Blumenthal - R.K. Getoor, Markov processes and potential theory, Academic Press, 1968.

[2]. N.V. Krylov, The first boundary value problem for elliptic equations of second order, Differencial'nye Uravnenija 3 (1967), 315–325

[3]. E.M. Landis, S-capacity and its application to the study of solutions of second order elliptic differential equations with discontinuous coefficients, Math. USSR Sbornik, Vol. 5 (1968), No. 2, 177–204.

[4] K. Miller, Exceptional boundary points for the nondivergence equation which are regular for the Laplace equation - and vice-versa. Ann. Mat. Pura Appl..