数理解析研究所講究録
第112巻 1971年 14-41

細位相の連結性について

阪大理　渡辺 毅

§0. 序

B. Fuglede [C1] は、Brelot 調和空間の細位相の連結性について興味ある研究を行い、さらにいくつかの'Open Problems'を提出した。これらの'Open Problems'は Fuglede [C2] によって大部分解決され、細位相に関する Dirichlet 問題に応用された。この報告では、§1 において標準 Markov 過程の細位相の連結性を研究し、§2 において、§1 の結果を用いて確率論的に Fuglede の問題を解決する。これは Nguyen-Xuan-Loc と筆者の共同研究 [C3] によってえられたものである。

Ω を Brelot の調和空間 [A1, (a)]、ω を相対コンパクトな Ω の部分集合とする。ω における Dirichlet 問題は、ω の相対境界 $\partial\omega$ 上で与えられた連続関数 f と一致し、ω において調和な関数 u を求めることである。ω を細位相開集合におきかえた時 Dirichlet 問題がどうなるであろうかというのが、Fuglede [C2] の研究である。[C1] における連結性の研究は、細位相 Dirichlet 問題が動機であったことを筆者は

Fuglede 氏から聞いた。ここで Dirichlet 問題について深入りすることはできないが，両者の関係を暗示する1つの結果を以下に説明する。

Ω において相対コンパクトな開集合 ω にたいして Dirichlet 問題が解けるとき，ω は正則であるという。Brelot の調和空間では，

1) 正則かつ連結な開集合が Ω の位相の基をなす。

2) 正則かつ連結な開集合 ω における調和測度 ρ_x^{ω} の台は $\partial\omega$ である，

という性質が成り立つ。(*) 細位相における類似としてつぎの結果を示すことができる。

定理 A. Ω の各点 x にたいし，細位相に関する x の基本近傍系 $\mathcal{V}_x$ でつぎの条件をみたすものが存在する。

1) $V \in \mathcal{V}_x$ は細位相に関して連結な x の開近傍である。

2) 調和測度 ρ_x^{V} の細位相による台は V の細位相相対境界 $\partial_f V$ と一致する。

この定理および Fuglede の 'Open Problems' の大部分は次の定理から証明することができる。

(*) (1) は公理 A 2 である。(2) は他の公理と合わせて容易に示される。

定理 B. Aを細位相に関する連結な開集合, eをAに含まれる極集合とすれば, A\e も細位相に関する連結な開集合である.

最後に本稿で引用する文献をテーマ別にあげておく.

[A] 調和空間論＝公理的 Potential 論

古典的な Newton-Green のポテンシャル論の拡張として Brelot によって導入された

1. Brelot 調和空間

(a) M. Brelot: Lectures on Potential theory, Tata Inst. 1960.

(b) ———: Axiomatique des fonctions harmoniques, Press Univ. Montréal, 1966.

(c) R.M. Hervé: Recherches axiomatiques sur la theorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 14 (1964), 415–571.

Brelot の公理を拡張し, 熱方程式のポテンシャル論を含む

2. Bauer 調和空間

H. Bauer: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes in Math. (Springer), vol. 22 (1966).

1, 2 より一般な

3. Boboc-Constantinescu-Cornea: Axiomatic theory of

harmonic functions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 15 (1965), 283—312.

上の1,2,3には連続なMarkov過程が対応するが、不連続なMarkov過程も許すものとして、

4. W. Hansen: Potentialtheorie harmonischer Kerne, Seminar über Potentialtheorie, Lecture Notes in Math. (Springer), vol. 69 (1968), pp. 103—157.

[B] 調和空間論とMarkov過程の関係。

Bauerの綜合報告

1. H. Bauer: Harmonic spaces and associated Markov processes, Potential theory, C.I.M.E. (1970), 24—67.

の中に両者のポテンシャル論的概念の関係が要領よく説明されている。特にMarkov過程の構成を論じたものとしては、

2. W. Hansen: Konstruktion von Halbgruppen und Markoffschen Prozessen, Inventiones Math. 3 (1967), 179—214.

3. P. A. Meyer: Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 13 (1963), 357—372.

がある。3ではBrelot調和空間に対応するMarkov過程の構成

が論じられている。2では3と異なる方法でBauer調和空間の場合を扱っている。

[C] 細位相の連結性。

1. B. Fuglede: Propriétés de connexion en topologie fine, Preprint, 1969, Copenhagen.
2. ———: Fine connectivity and finely harmonic functions, to appear in Proc. Nice Congress.
3. Nguen-Xuan-Loc, T. Watanabe: A probabilistic approach to the problem of connectivity in the fine topology, to appear.

[D] 標準Markov過程の一般論

1. R. M. Blumenthal - R. K. Getoor: Markov processes and potential theory, Academic Press (1968).
2. P. A. Meyer: Processus de Markov, Lecture Notes in Math. (Springer), vol 26, 1967.

§1. 標準過程における細位相の連結性と調和測度

記号や用語は主として[D 1,2]にしたがう。

1. Eを可算基をもつ局所コンパクトなHausdorff空間、$(P_t)_{t\ge 0}$をE上の標準半群、

$$X=(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0},\ (X(t))_{t\ge 0},\ P^{\mu},\ (\theta_t)_{t\ge 0})$$

を$(P_t)_{t\geq 0}$の標準的な実現（＝(P_t)を推移確率にもつ標準Markov過程）とする．Eの無限遠点をΔ，1点コンパクト化をE_Δで表わす．$\mathcal{F}$，$\mathcal{F}_t$は［D 1, p.27］における完備なσ-代数を意味する．

Eの部分集合Aにたいし，$\complement A$は（E_Δでなく）EにおけるAの補集合を表わす．

Xの細位相に関する対象にはf（＝fine, finely）をつけて記す．例えば，f-閉集合は細位相閉集合，$\partial_f A$は細位相によるAの相対境界を表わす．同様に細位相によるAの閉包をf-cl A，内部をf-int Aで表わす．Aの正則点の全体をA^rで表わす．f-cl $A = A \cup A^r$である．

Eにおけるuniversally可測集合の族を$\mathcal{B}_u(E)$，$\mathcal{B}_u(E)$-可測な非負関数の全体を$p\mathcal{B}_u(E)$で表わす．

調和測度はE上の測度と考える．すなわちEのnearly Borel集合Aにたいし，

$$T_A = \inf\{t>0;\ X(t)\in A\},\ \text{ただし}\ \inf\phi = +\infty,$$

$$H_A(x,B) = P^x(X(T_A)\in B),\qquad B\in\mathcal{B}_u(E)$$

である．

$(P_t)_{t\geq 0}$のポテンシャル核をUとする：

(1.1) $$Uf(x) := E^x\left(\int_0^\infty f\circ X(t)\,dt\right) = \int_0^\infty P_t f(x)\,dt.$$

nearly Borel 集合 A にたいし,

(1.2) $\quad \tilde{\zeta}(\omega) = T_{E_\Delta \setminus A}(\omega)$,

(1.3) $$\tilde{X}(t,\omega) = \begin{cases} X(t,\omega), & t < \tilde{\zeta}(\omega) \\ \Delta & t \geq \tilde{\zeta}(\omega) \end{cases}$$

とおき, $(\tilde{X}(t))_{t\geq 0}$ を A上の局所過程と呼ぶ.

(1.4) $\quad M_t := I_{[0,\tilde{\zeta})}(t)$,

(1.5) $\quad Q_t f(x) := E^x\{f\circ X(t)\cdot M_t\} = E^x(f\circ \tilde{X}(t))$

とおき, 半群 $(Q_t)_{t\geq 0}$ のポテンシャル核を V で表わす. 強 Markov 性によって

(1.6) $\quad Uf = Vf + H_{E_\Delta\setminus A}Uf \quad , \quad f\in p\mathcal{B}_u(E)$

であるから, $(M_t)_{t\geq 0}$ は [D1, p.117] の意味で exact な乗法汎関数である.

2. Lemma. u が (X, M)-超過関数ならば, u は nearly Borel 可測である.

証明. (i) U が有界核の場合. f が $p\mathcal{B}_u(E)$ の有界関数であるとき, (1.6) によって Vf は 2つの X-超過的 (したがって nearly Borel) 関数 Uf と $H_{E_\Delta\setminus A}Uf$ の差として表わされるから nearly Borel である. したがって, Vf, $\forall f\in p\mathcal{B}_u(E)$ も nearly Borel. u は V-ポテンシャル $\{Vf_n\}$, $f_n\in p\mathcal{B}_u(E)$ の増加極限として表わされる(*) から, nearly Borel である.

(*) P. A. Meyer: Probability and Potentials, p. 242.

(ii) 一般の場合．$\alpha > 0$ にたいし，u は α-(X, M)-超過的である．α-過程にたいしてはつねに(i)の仮定がみたされるから，(i)によって u は nearly Borel である．

3. Lemma. B を A に含まれる nearly Borel 集合，$\tilde{T}_B$ を $(\tilde{X}(t))_{t\geq 0}$ に関する B への最小到達時間としたとき，

(3. 1) $$u(x) := \underset{\sim}{P}^x\{\tilde{T}_B < \infty\} = \underset{\sim}{P}^x\{T_B < \tilde{\zeta}\}$$

は (X, M)-超過的である．

証明．

$$\begin{aligned} Q_t u(x) &= \underset{\sim}{E}^x\{u \circ X(t) \cdot M_t\} \\ &= \underset{\sim}{E}^x[\underset{\sim}{P}^{X(t)}\{T_B < \tilde{\zeta}\}; t < \tilde{\zeta}] \\ &= \underset{\sim}{P}^x\{T_B \circ \theta_t < \tilde{\zeta} \circ \theta_t, \ t < \tilde{\zeta}\} = (*). \end{aligned}$$

$t > \tilde{\zeta}$ ならば $\tilde{\zeta} = t + \tilde{\zeta} \circ \theta_t$ であり，一般に $t + T_B \circ \theta_t \geq T_B$ であることに注意して，

$$\begin{aligned} (*) &= \underset{\sim}{P}^x\{t + T_B \circ \theta_t < \tilde{\zeta}, \ t < \tilde{\zeta}\} \\ &\leq \underset{\sim}{P}^x\{T_B < \tilde{\zeta}\} = u(x). \end{aligned}$$

$t_n \downarrow 0$ ならば，$t_n + T_B \circ \theta_{t_n} \downarrow T_B$ であるから

$$\{t_n + T_B \circ \theta_{t_n} < \tilde{\zeta}, \ t_n < \tilde{\zeta}\} \uparrow \{T_B < \tilde{\zeta}, \ 0 < \tilde{\zeta}\} = \{T_B < \tilde{\zeta}\}.$$

したがって，$u(x) = \lim_{n\to\infty} \uparrow Q_{t_n} u(x)$ である．

4. 定理. A は nearly Borel な E の f-領域 (= f-開かつ f-連結な集合) で，B は A の nearly Borel 部分集合で

(4.1) $\qquad A \cap B^r \neq \phi$

をみたすとする。そのとき

(4.2) $\qquad \underset{\sim}{P}^x\{\ \widetilde{T}_B < \infty\} > 0\ , \quad \forall x \in A.$

証明. (M_t) の permanent point の集合を E_M とする. A は f-閉集合だから

(4.3) $\qquad E_M = \{\ x;\ \underset{\sim}{P}^x(\ \tilde{\zeta} > 0) = 1\} \supset A.$

いま

$$C := \{\ x \in A\ ;\ \underset{\sim}{P}^x(\ \widetilde{T}_B < \infty) > 0\}$$

とおく.

(i) $C \neq \phi$.

$x \in A \cap B^r$ を取れ. そのとき,

$$\underset{\sim}{P}^x\{\ \widetilde{T}_B = 0\} = \underset{\sim}{P}^x\{\ T_B = 0,\ 0 < \tilde{\zeta}\} = 1.$$

(ii) C は f-閉かつ nearly Borel である.

Lemma 3 によって, $\underset{\sim}{P}^x\{\ \widetilde{T}_B < \infty\}$ は (X, M)-超過的である. したがって nearly Borel であり,

$$C = A \cap \{\ x \in E\ ;\ \underset{\sim}{P}^x(\ \widetilde{T}_B < \infty) > 0\}$$

も nearly Borel である. また [D1; p.130, (5.8)] によって, $\underset{\sim}{P}^x\{\ \widetilde{T}_B < \infty\}$ は E_M 上で f-連続, したがって A 上でも f-連続である. ゆえに C は A の相対 f-位相で閉, したがって f-閉集合である.

(iii) $C=A$.

A が f-連結であるから，C が A の相対細位相に関して f-閉集合であることを示せば十分である．C が A において f-閉でないとすれば，$x \notin C$，x は C にたいして正則であるような A の点 x が存在する．($f\text{-}cl\, C(\text{in } A)=(f\text{-}cl\, C)\cap A=(C\cup C^r)\cap A$ による．) ゆえに $\underset{\sim}{P}^x\{T_C=0\}=1$．したがって，$C$ に含まれるコンパクト集合の増大列で

$$\underset{\sim}{P}^x\{\ T_{K_n}\downarrow 0\}=1$$

となるものを選ぶことができる．$\underset{\sim}{P}^x\{\ \zeta>0\}=1$ であるから，十分大きな n にたいして

$$\underset{\sim}{P}^x\{\ T_{K_n}<\zeta\}>0$$

である．このとき

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{P}^x\{\ \tilde{T}_B<\infty\} &= \underset{\sim}{P}^x\{\ T_B<\zeta\}\\ &\geqq \underset{\sim}{P}^x\{\ T_{K_n}+T_B\circ\theta_{T_{K_n}}<\zeta,\ T_{K_n}<\zeta\}\\ &= \underset{\sim}{E}^x\{\ P^{X(T_{K_n})}(T_B<\zeta);\ T_{K_n}<\zeta\}>0,\end{aligned}$$

これは $x\notin C$ に矛盾する．

5. 定理．つぎの2つの条件を仮定する．

(5.1) すべての f-閉集合は nearly Borel である．

(5.2) すべての nearly Borel 集合 B とすべての $x\in f\text{-int}\,\complement B \subset(\complement B)^r$ にたいして，$H_B(x,\cdot)$ は $\partial_f B$ に支えられている．

A は f-閉集合とする．この時，A が f-連結であるための必

要十分条件は，すべての $x\in A$ とすべての A に含まれる f-閉集合 B にたいして，

(5.3) $$\underset{\sim}{P}^{x}(\tilde{\tau}_B<\infty)>0$$

が成り立つことである。ただし $\tilde{\tau}_B$ は A 上の局所過程 $(\tilde{X}(t))$ に関する B への最小到達時間である。

証明．(i) 必要．(5.1)，(5.2) の条件は不要である。B が nearly Borel な A の部分 f-閉集合であるとき，$B\subset B^r$ だから，$A\cap B^r\supset B\neq\phi$。したがって定理4により (5.3) が成り立つ。

(ii) 十分．A が f-連結でないとせよ。このとき2つの f-閉集合 B_1，B_2 が存在して，$B_1\cap B_2=\phi$，$B_1\cup B_2=A$ である。したがって下の位相的 Lemma により $\partial_f B_1\subset\partial_f A$。

Lemma．E は位相空間，A は E の部分集合，B_i $(i=1,2)$ は A の部分集合で相対位相に関して閉，$B_1\cap B_2=\phi$，$B_1\cup B_2$ とする。この時 $\partial B_1\cup\partial B_2\subset\partial A$ である。

Lemma の証明．B_i' を $B_i=B_i'\cap A$ であるような閉集合とし，$B_i''=B_i\cap \mathrm{int}\,A$ を考える。

$$B_i''=B_i'\cap A\cap \mathrm{int}\,A=B_i'\cap \mathrm{int}\,A=\mathrm{int}\,B_i$$

は閉集合で，$B_1''\cap B_2''=\phi$，$B_1''\cup B_2''=\mathrm{int}\,A$．

$x\in\partial B_1$ なら $x\in \mathrm{cl}\,A$ は明らか。$x\in \mathrm{int}\,A$ ならば $x\in B_1''=\mathrm{int}\,B_1$ か $x\in B_2''\subset \mathrm{ext}\,B_1$ でなければならないが，いずれも不可能である。ゆえに $x\in\partial A$。┘

$x \in B_1$ にたいして

(5.4) $$\underset{\sim}{P}^x(\tilde{T}_{B_2} < \infty) = 0$$

を示せば十分である。

$C = \complement B_1$ とおく。$x \in B_1 = f\text{-}\mathrm{int}\,\complement C$，$\partial_f B_1 = \partial_f C$.

$T_C(\omega) < \infty$ ならば，(5.2) によって P_x-測度 0 を除い

$$X(T_C, \omega) \in \partial_f C \subset \partial_f A \subset E_\Delta \setminus A.$$

したがって $T_C(\omega) \geq T_{E_\Delta \setminus A}(\omega) = \tilde{\zeta}(\omega)$. ゆえに

$$\underset{\sim}{P}^x(T_C \geq \tilde{\zeta}) = 1.$$

$$0 = \underset{\sim}{P}^x(T_C < \tilde{\zeta}) \geq \underset{\sim}{P}^x(T_{B_2} < \tilde{\zeta}) = \underset{\sim}{P}^x(\tilde{T}_{B_2} < \infty).$$

6. 定理. (5.1), (5.2) を仮定する。A が f-領域で e が極集合ならば，$A \setminus e$ も f-領域である。

証明. $e^r = \phi$ だから e は f-閉集合。したがって $A \setminus e$ も f-閉集合である。$A \setminus e$ 上の局所過程を $(\tilde{\tilde{X}}(t))_{t\geq 0}$ とする。B が $A \setminus e$ に含まれる f-閉集合 B で，$\tilde{\tilde{T}}_B$ を $(\tilde{\tilde{X}}(t))$ に関する B への最小到達時間とする。e が極集合だから $\tilde{T}_B = \tilde{\tilde{T}}_B$ ($\underset{\sim}{P}^x$-a.s) である。したがって (5.3) により

$$\underset{\sim}{P}^x(\tilde{\tilde{T}}_B < \infty) > 0, \quad \forall x \in A \setminus e.$$

定理 5 により，$A \setminus e$ は f-領域である。

7. 注意. (a) 定理 5 の証明から明らかなように，(5.2) は f-閉集合 B についてだけ仮定すれば十分である。

(b) つぎのことはよく知られている。$(X(t))_{t\geq 0}$ が $t \in [0, \zeta)$ で連続な道

をもつための必要十分条件は，すべての$\complement B$が相対コンパクトな閉集合Bとすべての$x \in \complement B$にたいし，$H_B(x,\cdot)$が∂Bによって支えられていることである[(*)].

条件(5.2)はあきらかにこの条件より強いから，(5.2)が成り立つためには，$(X(t))$の道は連続でなければならない．

(c) (5.2)をみたさない連続な標準過程の例．

$(X(t))_{t\geq 0}$を$R=(-\infty,\infty)$上のuniform motionとする．このMarkov過程の細位相は，Rにおける右位相，すなわち$[a,b)$を開近傍の基とする位相である．$B=[a,b)$とするとBはf-閉かつf-開であることが容易に分るから，$\partial_f B=\phi$．しかし$x<a$にたいして，$H_B(x,\cdot)$の台は$\{a\}$である．

(d) (i) reference測度が存在する，

(ii) すべての半極集合は極集合である，

の2条件を仮定すれば，条件(5.1)がみたされる．

条件(i)の下では，すべてのf-Borel集合はBorel集合と半極集合の和集合として表わされる[D1, Chap. V, (I.18)]．したがって，(ii)を仮定すればf-Borel集合はnearly Borelである．

(*) P. Courrège - P. Priouret: Axiomatique de problème de Dirichlet et processus de Markov, Seminair Brelot-Choquet-Deny, Théorie du Potentiel, 8 (1963/64), n° 8, p.7.

(e) (d)の条件(ii)を仮定する. Aは nearly Borel な f-領域とする. この時Aに含まれるすべての nearly Borel な非極(= non polar)集合Bにたいして(4.2)が成り立つ.

$B\setminus B^r$ は半極集合, したがって極集合であるから $B\cap B^r$ は極集合ではありえない. ゆえに $A\cap B^r \supset B\cap B^r \neq \phi$ であって(4.1)がみたされる.

§2. Brelot調和空間における細位相の連結性に関する結果.

8. Brelot調和空間 [A1, (a), (b)]

E — 可算基をもつ局所コンパクト, 非コンパクト, 連結かつ局所連結な Hausdorff 空間.(*)

E_Δ — Eの1点コンパクト化.

$\mathcal{U}$ — Eの開集合の全体.

$C_b(E)$ [$C_0(E)$; $C_c(E)$] — E上の有界[Δで0; コンパクトな台]な実連続関数の全体.

$B_b(E)$ — E上の有界Borel可測関数の全体.

$C(U)$ [$C(\partial U)$] — U [∂U]上の実連続関数の全体.

各 $U\in\mathcal{H}_U$ にたいして $C(U)$の線形部分空間 $\mathcal{H}_U$ が対応

(*) 調和空間は通常 Ω か X で表わすが §1と記号を合わせるため E を用いる.

している．$\mathcal{H}_U$ の各関数を U 上の調和関数という．

以下に述べる Axiom 1－3 がみたされるとき，E は Brelot の調和空間であるという．

Axiom 1．(i)　$U_0 \subset U$，$u \in \mathcal{H}_U$ ならば $u|_{U_0} \in \mathcal{H}_{U_0}$．

(ii)　$u \in C(U)$，U の各点 x にたいし $V(x) \in \mathcal{U}$ が存在して $u \in \mathcal{H}_{V(x)}$ ならば，$u \in \mathcal{H}_U$．

$U \in \mathcal{U}$ が正則であるとは，(i) U は相対コンパクト，(ii) $\partial U \neq \phi$，(iii) 任意の $f \in C(\partial U)$ にたいし，∂U で f と一致し U で調和な関数 $H_f^U \in C(\overline{U})$ が唯1つ存在する．かつ $f \geq 0$ ならば $H_f^U \geq 0$ である．さらに写像 $f \to H_f^U$ は線形．

この時，$x \in U$ にたいし

$$(8.1) \qquad H_f^U(x) = \int_{\partial U} f(y)\, \rho_x^U(dy)\ , \qquad f \in C(\partial U)$$

をみたす Radon 測度 ρ_x^U が定まる．

Axiom 2．正則な開集合の族は E の開基をなす．

Axiom 3．U が領域で $(u_i)_{i \in I}$ が $\mathcal{H}_U$ における増加 net ならば　$\sup u_i$ は $\mathcal{H}_U$ の関数か恒等的に $+\infty$．

$U_0 \in \mathcal{U}$ にたいし U_0 上の関数 u が hyperharmonic ($u \in \mathcal{H}^*_{U_0}$) とは，(i) 下半連続，(ii) $u > -\infty$，(iii) $\overline{U} \subset U_0$ なるすべての正則開集合 U にたいし，

(8.2) $$u(x) \geq \int_{\partial U} u(y)\, \rho_x^U(dy), \quad \forall x \in U.$$

U_0 の各連結成分の上で恒等的に $+\infty$ とはならない $u \in \mathcal{H}^*_{U_0}$ を U_0 上の優調和関数という.

$u \in \mathcal{H}^*_E$ の(ポテンシャル論的)台 $[u]$ は

(8.4) $$E \setminus [u] = \sup\{ U \in \mathcal{U};\ u|_U \in \mathcal{H}_U \}$$

なる閉集合として定義される.

u がポテンシャル ($u \in \mathcal{P}$) とは, (i) 非負優調和で, (ii) $u \geq h \in \mathcal{H}_E$ ならば $h \leq 0$.

Axiom D. v が局所有界なポテンシャル, u が非負優調和なら,

(8.5) $$[u \geq v]_{[v]} \implies u \geq v.$$

注意. Axiom D の主張を Domination Principle という. 連続なポテンシャルに対して (D.P) が成り立つことは, Axiom 1–3 から従う [B1, p.31].

Axiom P. 各 $x \in E$ にたいし, $p(x) > 0$ なる $p \in \mathcal{P}$ が存在する.

最後に掃散に関する定義を与える.

$f \geq 0$ にたいし,

(8.6) $$R_f := \inf\{ u \in \mathcal{H}^*_E;\ u \geq f \}$$

を f の($\mathcal{H}^*_E$ に関する)縮小関数 (= réduite, reduced function) という. R_f の下半連続な正則化 $\hat{R}_f$ を f の被掃散 (= balayée) という. すなわち,

(8.7) $$\hat{R}_f(x) := \liminf_{\substack{y\to x,\\ y\neq x}} R_f(x).$$

Eの任意の部分集合Aにたいし,

(8.8) $$R_f^A := R_{J_A f}, \quad \hat{R}_f^A = \hat{R}_{J_A f},$$

ただし, $J_A f = f$ on A, $= 0$ on $\complement A$ である.

有限な Radon 測度 μ にたいして

(8.9) $$\int \hat{R}_u^A \, d\mu = \int u \, d\mu^A, \quad \forall u \in {}_+\mathcal{H}_E^*$$

をみたす Radon 測度 μ^A が唯1つ存在する. これは No 9 (c) からしたがう. μ^A は ∂A に支えられる.

9. Axiom 1–3 および P の下での結果の例 [A1(a), A2].

(a) (最小値原理) U は相対コンパクトな開集合, $u \in \mathcal{H}_U^*$ で (i) $\liminf_{y\to x,\, y\in U} u(y) \geq 0$, $x \in \partial U$ あるいは, (ii) 適当な $p \in \mathcal{P}$ が存在して $[u \geq -p]_U$ をみたすとする. この時, $u \geq 0$ である.

(b) いたる所真に正な $p \in \mathcal{P} \cap C_b(E)$ が存在する.

(c) $$\mathcal{C}_0(E) = \overline{(\mathcal{P} \cap C(E) - \mathcal{P} \cap C(E)) \cap C_c(E)}.$$

これは任意の $f \in C_0(E)$ にたいし, 2つの連続なポテンシャル p_1, p_2 が存在し, $p_1 - p_2 \in C_c(E)$, $\| f - (p_1 - p_2) \| < \varepsilon$ とできることを意味する.

(d) $u \longrightarrow \hat{R}_A^u$ は ${}_+\mathcal{H}_E^*$ から ${}_+\mathcal{H}_E^*$ への positively linear な

写像である。

(e) U が正則開集合なら、$\rho_x^U = \varepsilon_x^{\complement U}$, $x \in U$ である。ただし ε_x は x における δ-測度。さらに

$$\hat{R}_u^{\complement U} = \begin{cases} u & \text{on } \complement U \\ \int u \, d\rho_x^U & \text{on } U. \end{cases}$$

10. $\mathcal{H}$ に対応する Markov 過程

主に [B 1] による。Axiom 1–3, P および $1 \in \mathcal{H}_E^*$ を仮定する。Axiom 1–3 は Bauer の axiom によっておきかえても以下の結果は正しい。

(a) 任意の $p \in \mathcal{P}^f$ (= finite potentials) にたいして、つぎの条件をみたす核 V が唯1つ存在する。(i)

(10.1) $$V1 = p,$$

(ii) 各 $f \in B_b(E)$ にたいし、$Vf \in \mathcal{P}^f$ かつ、$[Vf] \subset \{f > 0\}$ である。

(b) ある $0 < p \in \mathcal{P} \cap C_b(E)$ が存在して、対応する (a) の V が以下の条件をみたすようにできる。

(10.2) $$V(B_b(E)) \subset C_b(E),$$

(10.3) $$Vf = \int_0^\infty P_t f \, dt,$$

ただし $(P_t)_{t \geq 0}$ は劣 Markov 核の半群で

(10.4) $$P_t(C_0(E)) \subset C_b(E), \quad \forall t \geq 0,$$

(10.5) $\| P_t f - f \| \to 0$, $t \to 0$, $f \in C_0(E)$.

さらに$(P_t)_{t\geq 0}$に関する超過的関数の族を$\mathcal{E}$で表わしたとき,

(10.6) $\begin{cases} 0 < {}^{\exists}g_1 \in \mathcal{E} \cap C_b(E) \text{ と } g_2 \in \mathcal{E} \cap C(E) \text{ が存在して,} \\ \text{集合 } \{ g_1 \geq \alpha \} \cap \{ g_2 \leq \beta \} \text{ はすべての } \alpha > 0,\ \beta > 0 \\ \text{にたいしてコンパクト,} \end{cases}$

(10.7) $${}_{+}\mathcal{H}_E^* = \mathcal{E}.$$

定義 (10.4), (10.5), (10.6)をみたす$(P_t)_{t\geq 0}$をquasi-Feller半群という.

(c) [B 2] quasi-Feller半群は標準(実はHunt)半群である.

定義. (b)におけるquasi-Feller半群$(P_t)_{t\geq 0}$の標準的実現

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (X(t))_{t\geq 0}, \mathbb{P}^{\mu}, (\theta_t)_{t\geq 0})$$

を, 調和構造$\mathcal{H}$に対応するMarkov過程という. 以下このXを考える.

(d) reference測度が存在する.

(10.2)または(10.7)から容易に見られる. $\{x_n\}$をEにおける稠密な点列としたとき, $\mu = \sum 2^{-n} \varepsilon_{x_n}$が1つのreference測度を定める.

(e) Xの細位相と調和空間の意味の細位相は一致する.

Vが有界だから, [D1, p.86]によってXの細位相は$\mathcal{E}$の関数を連続にする最粗位相である. 同様に$\mathcal{H}$に関する細位相が, ${}_{+}\mathcal{H}_E^*$を連続する最粗位相なこともよく知られている. ゆえに(10.7)

により両者は一致する.

(f) Aを nearly Borel 集合, $u \in \mathcal{E}$, μ Radon 測度とするとき,

(10.8) $$H_A u = \hat{R}_u^A,$$

(10.9) $$\mu^A = \mu H_A.$$

証明は [B1, p.58].

(g) 以下の各概念は, Xに関する定義と, 調和空間論的定義が一致する.

(i) [B1, p.59]. Aが極集合である.

(ii) [B1, p.62] Aは点xにおいて thin である.

(iii) Aは半極集合である.

以上により, 調和空間論におけるポテンシャル論的概念は, すべてXに関するポテンシャル論的概念に翻訳されることが分った.

以下においてつぎのことを仮定する.

(a) Axiom 1−3,

(b) Axiom P,

(c) $1 \in \mathcal{H}_E^*$,

(d) Axiom D.

Axiom D からの著しい結果は,

Lemma. [A1 (a), p.141, T31] すべての半極集合は極集合である.

11. 定理. X は条件(5.1), (5.2)をみたす.

証明. (5.1)の方は, X が No. 7(d) の(i),(ii)をみたすからあきらかである.

(5.2)を確かめるために Lemma を2つ用意する.

Lemma 1. μ をコンパクトな台をもつ Radon 測度, $A \subset E$ とする.

(a) μ^A は A^r に支えられている.

(b) $(\mu=\mu^A) \Leftrightarrow$ (μ が A^r に支えられている).

(c) B が極集合か, $B \subset$ f-int A であるとする. そのとき

(11.1) $$\mu(B)=0 \Rightarrow \mu^A(B)=0.$$

(d) $A, B \subset E$, $A \subset B$ (もっと一般に $A^r \subset B^r$) ならば,

$(\mu^A=\mu^B) \Leftrightarrow$ (μ^B が A^r に支えられている).

証明は [A1(c), §28]. 以下で必要なのは (a), (c) である.

Lemma 2. μ が $(\complement A)^r$ に支えられていれば, μ^A も同様である.

証明. $B=(\complement A)\setminus(\complement A)^r$ は半極集合だから極集合. 仮定により $\mu(B)=0$. ゆえに(11.1)により $\mu^A(\complement A\setminus(\complement A)^r)=0$.

$(\complement A)^r \subset$ f-cl $\complement A$ だから, $(\complement A)^r \cap$ f-int $A=\emptyset$.

仮定により, $B \subset$ f-int $A \subset \complement(\complement A)^r$ ならば $\mu(B)=0$. 再び(11.1)により $\mu^A(B)=0$. すなわち μ^A は $\complement$(f-int A) に支えられている.

$$\complement(\text{f-int}\, A)=\text{f-cl}(\complement A)=(\complement A)\cup(\complement A)^r=(\complement A)^r\cup[(\complement A)\setminus(\complement A)^r].$$

$\mu^A(\complement A\setminus(\complement A)^r)=0$ だから, μ^A は $(\complement A)^r$ に支えられている.

(5.2) の証明. A を nearly Borel 集合, $x \in f\text{-}\mathrm{int}\,\complement A \subset (\complement A)^r$, $\mu = \varepsilon_x$ とする. (10.9) によって $H_A(x,\cdot) = \varepsilon_x^A$. Lemma 1, 2 によって ε_x^A は $A^r \cap (\complement A)^r$ によって支えられている. $\partial_f A = (f\text{-}cl\,A) \cap (f\text{-}cl\,\complement A) = (A \cup A^r) \cap (\complement A \cup (\complement A)^r) \supset A^r \cap (\complement A)^r$ だから, (5.2) が証明された.

つぎの2つの定理は Fuglede [C1] によるが, 証明は省略する.

12. 定理 [C1, T.1, 2]. E は f-連結かつ局所 f-連結である.

13. 定理 [C1, T.2]. 集合 B が base(*) で, $x \in \complement B$ とする. この時, $\varepsilon_x^B = \varepsilon_x^{B'}$ を満足する最大の base B_x が存在する. $\complement B_x$ は x を含む f-領域である.

以下の定理 14, 16, 17 が本節の主結果である.

14. 定理. ε_x^B の細位相による台は $\partial_f B_x$ である.

証明. これは [C1] の 'Open problems' の1つで [C2] で独立に~~省略~~証明されたが, ここでは §1 の結果を用いて確率論的な証明を与える.

(*) Fuglede は $B = B^r$ なる集合を base と呼んでいる. base は f-閉である. 任意の集合 A にたいし, $B = A^r$ は base である.

S を $\varepsilon_x^B = \varepsilon_x^{B_x}$ の細位相による台とする。$\complement B$, $\complement B_x$ は f-開で $x \in \complement B \cap \complement B_x$ だから (5.2) により、S は $\partial_f B \cap \partial_f B_x$ に含まれる。まず

(14.1) $$U = \partial_f B_x \setminus S$$

が極集合であることを示す。$S \subset B_x$ だから $T_S \geq T_{B_x}$.
S は $\varepsilon_x^{B_x} = H_{B_x}(x, \cdot)$ の台であるから、

(14.2) $$\underset{\sim}{P}^x(X(T_{B_x}) \in S) = \underset{\sim}{P}^x(T_{B_x} < \infty).$$

ゆえに、

(14.3) $$\underset{\sim}{P}^x(T_S = T_{B_x}) = 1, \qquad \varepsilon_x^S = \varepsilon_x^{B_x}$$

である。これから

(14.4) $$\underset{\sim}{P}^x(T_S \geq T_U,\ T_U < \infty) = 0.$$

U が極集合でないとすると、$U \cap U^r$ は極集合でない。$y \in U \cap U^r$ を取る。定理 12 によって f-連結な y の開近傍 V で $V \cap (S \cup \{x\}) = \phi$ をみたすものが存在する。

V と $\complement B_x$ が f-領域で $V \cap \complement B_x \neq \phi$ だから

(14.5) $$A = V \cup \complement B_x$$

も f-領域である。

(14.6) $$V \cap U \subset A$$

が極集合でないことを示そう。実際

$$\underset{\sim}{P}^y\{ X(t) \in V,\ {}^\forall t \leq {}^\exists t_0(\omega)\} = 1,$$

$$\underset{\sim}{P}^y\{ X(t_n) \in U,\ {}^\exists t_n \downarrow 0\} = 1$$

であるから,

$$P^y\{T_{V\cap U}=0\}=1.^{(*)}$$

したがって,$y\in(V\cap U)^r$ である.

(14.5)の A と(14.6)の $V\cap U$ に定理4を適用[n° 7(e)を見よ]すれば,

$$0<P^x\{\tilde{T}_{V\cap U}<\infty\}.$$

ところがあきらかに

$$\{\tilde{T}_{V\cap U}<\infty\}\subset\{T_U\leq T_S,\ T_U<\infty\}$$

であるから,(14.4)により,

$$P^x\{\tilde{T}_{V\cap U}<\infty\}\leq P^x\{T_U\leq T_S,\ T_U<\infty\}=0,$$

これは矛盾である.

一方,以下の定理16によって $\partial_f B_x$ も base であるから,

$$\partial_f B_x=(\partial_f B_x)^r=(S\cup U)^r=S^r\cup U^r$$
$$=S^r\subset S\subset\partial_f B_x,$$

(ここで $U^r=\phi$ と S が f-閉であることを用いた).ゆえに $S=\partial_f B_x$ である.

<u>15. Lemma.</u> (a) U <u>が</u> x <u>の</u> f-<u>近傍であるとき</u>,x <u>の</u> f-閉<u>近傍</u> V <u>が存在して次の条件を満足するようにできる</u>.

(*) この議論によって,一般に $(V\cap U)^r\supset(f\text{-int}\,V)\cap U^r$ である.

(i) $V \subset U$, (ii) V は f-領域, (iii) $\complement V$ は base, (iv) もとの位相に関して V はコンパクトな閉包をもつ。

(b) $\{x\}$ が極集合であれば、細位相に関する x の基本近傍系 $\mathcal{V}_x$ で、すべての $V \in \mathcal{V}_x$ が V, $V \setminus \{x\}$ が f-領域, $\complement V$ が base であるようなものが存在する。

証明. (a) [D1, p. 85, Prop. (4.3)] によって、$x \in f\text{-int}\, K \subset K \subset U$ なるコンパクト集合 K が存在する。(*) $A = \complement K$ とおけば、$A^r = f\text{-cl}\, A = \complement f\text{-int}\, K \not\ni x$. $B = A^r$ は base だから、定理 13 の B_x を考え、$V = \complement B_x$ とおけば、所用の条件を満す。

(b) (a) の (ii), (iii) の条件をみたす x の近傍 V の全体を $\mathcal{V}_x$ とする。$\mathcal{V}_x$ が基本近傍系をなすことは (a) から、$V \setminus \{x\}$ が f-領域であることは定理 6 から明らかである。

16. 定理. (a) 任意の集合 A にたいし、

$$(16.1) \qquad (\partial_f A)^r = A^r \cap (\complement A)^r$$

である。

(b) 特に B が base なら、$\partial_f B$ も base である。

証明. (a) 一般に A^r は $f\text{-cl}\, A \setminus \{x \in E \,;\, \{x\}$ が極集合でかつ、細位相に関する孤立点$\}$ なる集合に等しいことを注意する。いいかえると、$x \in E$ にたいし

(*) これは細位相が正則であることを含んでいる。

(i) $\{x\}$ が極集合ならば

(16.2) $(x \in A^r) \Longleftrightarrow$ (x が A の f-集積点),

(ii) $\{x\}$ が極集合でなければ,

(16.3) $(x \in A^r) \Longleftrightarrow (x \in f\text{-}cl\, A)$

を示そう.

(i) $(\Longrightarrow)$ V を x の f-近傍とする. 仮定により

$$\underset{\sim}{P}^x\{X(t) \in V \setminus \{x\},\ \forall t \leq {}^{\exists}t_0(\omega)\} = 1,$$

$x \in A^r$ だから,

$$\underset{\sim}{P}^x\{X(t_n) \in A,\ {}^{\exists}t_n \downarrow 0\} = 1.$$

ゆえに ${}^{\exists}\omega \in \Omega$, ${}^{\exists}t > 0$ にたいし $X(t,\omega) \in A \cap (V \setminus \{x\})$.

$(\Longleftarrow)$ $x \notin A^r$, $x \notin A$ ならば, $\complement A \supset \complement(A \cup A^r)$ が x の f-近傍だから, x は A の集積点ではあり得ない. $x \notin A^r$, $x \in A$ ならば, $x \notin A \setminus \{x\}$, $x \notin (A \setminus \{x\})^r$ により $V = \complement(A \setminus \{x\})$ が x の f-近傍である. したがって

$$(V \setminus \{x\}) \cap A = V \cap (A \setminus \{x\}) = \phi.$$

(ii) $(\Longleftarrow)$ のみを証明すれば十分である. $f\text{-}cl\, A = A \cup A^r$ だから, $x \in A$ の場合を示せばよい. 仮定により, $\{x\} = \{x\}^r \subset A^r$. ゆえに $x \in A^r$ である.

(16.1) を示そう. まず $V \setminus \{x\}$ が f-領域であるとき

(16.4) $(V \setminus \{x\}) \cap \partial_f A \neq \phi \Longleftrightarrow$ $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \phi$, かつ $(V \setminus \{x\}) \cap \complement A \neq \phi$.

であることに注意する．($\Longrightarrow$) は自明である．($\Longleftarrow$) は $V\setminus\{x\}$ が f-連結なことから容易にしたがう．実際 $B=A\cup\partial_f A$，$C=\complement A\cup\partial_f A$ とおけ．もし $(V\setminus\{x\})\cap\partial_f A=\phi$ ならば，$(V\setminus\{x\})\cap B\cap C=\phi$．$V\setminus\{x\}=[(V\setminus\{x\})\cap B]\cup[(V\setminus\{x\})\cap C]$．$(V\setminus\{x\})\cap B$ と $(V\setminus\{x\})\cap C$ は $V\setminus\{x\}$ において f-閉集合だから，$V\setminus\{x\}$ が f-連結であることに反する．

$\{x\}$ が極集合であるとき，Lemma 15 (f) の $\mathcal{V}_x$ をとると，(16.2)，(16.4) により

$$x\in(\partial_f A)^a$$

$$\Longleftrightarrow \text{すべての } V\in\mathcal{V}_x \text{ にたいし，} (V\setminus\{x\})\cap\partial_f A\neq\phi$$

$$\Longleftrightarrow \text{すべての } V\in\mathcal{V}_x \text{ にたいし，} (V\setminus\{x\})\cap A\neq\phi \text{ かつ } (V\setminus\{x\})\cap\complement A\neq\phi.$$

$$\Longleftrightarrow \quad x\in A^a\cap(\complement A)^a.$$

$\{x\}$ が極集合でない時は，上の議論で $V\setminus\{x\}$ の代りに V でおきかえて，

$$x\in(\partial_f A)^a \Longleftrightarrow x\in A^a\cap(\complement A)^a$$

が示される．

(f) $\complement B$ が f-閉集合だから，$f\text{-cl}\,\complement B=\complement B\cup(\complement B)^a=(\complement B)^a$．ゆえに

$$(\partial_f B)^a=B^a\cap(\complement B)^a=f\text{-cl}\,B\cap f\text{-cl}\,\complement B=\partial_f B.$$

17. 定理. 任意の $x \in E$ にたいし、細位相に関する x の基本近傍系 $\mathcal{V}_x$ でつぎの条件をみたすものが存在する。

(i) 各 $V \in \mathcal{V}_x$ は f-領域である。

(ii) $\varepsilon_x^{\complement V} = H_{\complement V}(x, \cdot)$ の細位相に関する台は $\partial_f V$ である。

証明. Lemma 15 (a) で構成した V の全体を $\mathcal{V}_x$ とする。V はある base B にたいして $V = \complement B_x$ の形に表わされているから、定理14によって $\varepsilon_x^{\complement V} = \varepsilon_x^{B_x}$ の細位相に関する台は $\partial_f B_x = \partial_f V$ にひとしい。