数理解析研究所講究録
第112巻 1971年 42-49

非負優調和函数がつくる線形空間上の核型な位相について

静大　理　　郡　敏昭

§1. 優調和函数に対応するある測度

微分作用素 $L = \sum \frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right]$ が有界可測な係数を持ち強楕円的であるとき A. Pietsch は

$$\mathcal{N}(G) = \{ \varphi \ ; \ L\varphi = 0 \}, \quad G \text{ open} \subset R^n,$$

がGのコンパクト一様収束の位相により核型になることを示した。 P. Loeb と B. Walsh は これを拡張し，公理論的ポテンシャル論において調和函数のつくる空間が核型になることを示した。一方 Brelot，R.M. Herve により非負優調和函数を positive cone とする Riesz 空間上の局所凸な位相が導びかれており，非負調和函数上にそれを制限するとコンパクト一様収束と一致し非負調和函数は この空間の閉じた cone になる事等がわかっている。我々はこの局所凸な位相が核型であることを示す。 例えば上記の微分作用素 L に関しては函数解析的な取り扱い（ Sobolev 空間，Lax-Milgram の定理 ）が当然なされるが それらは公理

論的ポテンシァル論に移されることは当然ながら不可能である。しかし我々の結果により何かの類似が公理論的ポテンシァル論の場合にも行なわれるのではないかと希望できる。例えば L を見つけることやLax-Milgram の定理の類似を見つけること等ができるなら最近の福島一国田 等の結果と公理論的ポテンシァル論の橋わたしが可能だろう(か?)。

XをBrelot の公理 1. 2. 3 をみたす harmonic fn. の sheaf $\mathcal{H}$ が与えられた harmonic space とする。我々は non-zero potential の存在を仮定する。Herve の分解定理は次のように述べられる。

任意の開集合 G と任意の非負優調和函数 u に対し

$$\mathcal{B}_G(u) = \left\{ s\,;\ \begin{array}{l} \text{superharmonic}, \geq 0, \text{ on } X, \\ s = u + t \quad \text{for some superharm. fn } t \text{ on } G \end{array} \right\}$$

とおき,

$$u_G = \inf \mathcal{B}_G(u)$$

とおく。このとき u_G は X 上で非負 superharm. であり $X - \overline{G}$ 上で harmonic となる。さらにあるG上で調和な非負優調和函数 w が存在して $u = u_G + w$ と書ける。

Kをコンパクト集合とするとき, $G = X - K$ とおいて次を

得る。 $\exists\, u_K \in \mathcal{S}_+(X) \cap \mathcal{H}(X-K)$, such that

$$u = u_K + u_{X-K} \text{。}$$

$u \in \mathcal{S}_+(X)$ を Riesz 分解して $u = p + h$, $h \in \mathcal{H}_+(X)$, p はポテンシャル，とすると $u_K = p_K$ であり，$u_{X-K} = p_{X-K} + h$ である。

今 X_0 を X の一点コンパクト化 $X_0 = X \cup \{\partial\}$ とし，$x \in X$ を固定する。このとき開集合 $G \subset \overline{G} \subset X_0 - \{x\}$ に対し $G \longrightarrow u_{G\cap X}(x)$ を対応させて $X_0 - \{x\}$ 上のラドン測度を得る。（$u_{G\cap X} \in \mathcal{H}(X-\overline{G})$ より $u_{G\cap X}(x) < \infty$）。この測度による $f \in C_c^+(X_0 - \{x\})$ の積分を $f\cdot u$ と書く。$u = p + h$ とするなら $f\cdot u = f\cdot p + f(\partial)h$ であることがわかる。$f\cdot u$ は $X - \mathrm{Supp}[f]$ で調和である。

$\mathcal{S}_+(X) \times \mathcal{S}_+(X) \ni (s, s'), (t, t')$ に対し同値関係 $\sim$ を

$$(s, s') \sim (t, t') \iff s + t' = s' + t$$

で定義し，$E = \mathcal{S}_+(X) \times \mathcal{S}_+(X) / \sim$ とおき，E の線型演算を，$E \ni [s, s']$, $[t, t']$ に対し

$$[s, s'] + [t, t'] = [s+t, s'+t'],$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha[s, s'] = [\alpha s, \alpha s'], \\ -\alpha[s, s'] = [\alpha s', \alpha s], \end{array}\right. \quad (\alpha \geq 0)$$

により定義する。又Eにおける順序を

$$[s, s'] \succ [t, t'] \iff [s, s'] = [t, t'] + [u, 0] \quad \exists u \in \mathcal{S}_+(X)$$

で定義する。

定理. $(E, \succ)$ は conditionally complete vector lattice となる。

X 上のコンパクトな台をもつ測度 $\mu \geqq 0$ と $f \in C_c^+(X_0 - K_\mu)$ の組のことを couple (f, μ) という。ただし K_μ は μ の台のことである。 E上の線形写像

$$E \ni [s, s'] \longrightarrow \int (f \cdot s - f \cdot s')\, d\mu$$

を考える。任意の couple に対しこの線形写像を連続にするようなE上の位相で最も弱いものをT-位相と言う。

(E, T) は局所凸な線形位相空間となり，順序 $<$ による positive cone $[\mathcal{S}_+(X), 0] \simeq \mathcal{S}_+(X)$ はEで閉じている。次のことがわかる。

(i) $(\mathcal{S}_+(X), T)$ は metrisable, complete となる。

(ii) $(\mathcal{H}_+(X), T) = (\mathcal{H}_+(X)$, compact一様収束の位相$)$ となり，これは閉部分空間である。

(iii) $\mathcal{S}_+(X)$ は compact な base をもつ cone である。

§2 Eは核型。

Pietschによる次の定理を使う。

定理; Eを局所凸線形位相空間とする。いまEのclosed convex circledな0の近傍 W に対し必ずある E'_σ の equiconti. な閉集合 A を見つけることができ，また(この $\sigma(E', E)$-compact な) A上のラドン測度 ≥ 0, μ, を見つけることができて

$$p_W(x) \leqq \int_A |\langle x, x'\rangle|\, d\mu(x'), \quad \forall x \in E,$$

が成り立つようにできるなら Eは核型である。ただし p_W は $p_W(x) = \inf\{\lambda > 0 \;:\; x \in \lambda W\}$。

補題，任意のコンパクト集合Kと $f \in C_c^+(X_0 - K)$ に対しセミノルム $p_{(f,K)}([s, s']) = \sup_K |f\cdot s - f\cdot s'|$ を考える。このセミノルムの族によりE上に与えられる位相は T-位相と同値である。

証. これが T位相より強いことはあきらか。今 (f, K) を上の条件をみたす組とし $K \subset U \subset \overline{U} \subset X - \mathrm{Supp}[f]$ なる開集合Uをとろう。Harnackの不等式より $x_0 \in K$ に対しある定数 $M \geqq 1$ が存在して

$$\sup_{K \ni x} h(x) \leqq M \cdot h(x_0), \quad \forall h \in \mathcal{H}_+(U),$$

とできる。$\varphi \in C(\partial U)$ に対し，U 上で

$$H^U\varphi = \inf\{s \in \mathcal{S}(U)\ ;\ \liminf_{U \ni y \to x} s(y) \underset{> -\infty}{\geq} \varphi(x),\ \forall x \in \partial U\}$$

により定義される函数は，U 上で harmonic となる。また $f \cdot s$，$s \in \mathcal{S}_+(X)$，は $X - \mathrm{Supp}[f]$ で，したがって U で調和だから $H^U(f\cdot s - f\cdot s') = f\cdot s - f\cdot s'$ on U，$\forall [s, s']$。
これより

$$\sup_K |f\cdot s - f\cdot s'| \leq \sup_K H^U|f\cdot s - f\cdot s'|$$
$$\leq M\cdot H^U|f\cdot s - f\cdot s'|(x_0) = \langle \mu, |f\cdot s - f\cdot s'|\rangle$$

，ただし $\mu(\varphi) = M\cdot H^U\varphi$ は ∂U 上の測度。
これより題意の位相は T-位相より弱い。

定理　(E, T) は核型空間である。

証明．(f, ν) を couple とする．

$$\mathcal{U} = \{[s, s'] \in E\ ;\ \langle \nu, |f\cdot s - f\cdot s'|\rangle \leq 1\}$$

とおく。$\mathcal{U}$ の gauge は $p_{\mathcal{U}}([s, s']) = \langle \nu, |f\cdot s - f\cdot s'|\rangle$ である。点 x_0 と開集合 U を

$$x_0 \in K_\nu \subset U \subset \overline{U} \subset X - \mathrm{Supp.}[f]$$

ととる。

$$\mathcal{V} = \{[s, s'] \in E\ ;\ \sup_{\overline{U}} |f\cdot s - f\cdot s'| \leq 1\}$$

とおくと補題より $\mathcal{V}$ は E の中で 0 の近傍である。

したがって $A=(\mathcal{V})^\circ = \mathcal{V}$ の absolute polar in E' は equicontinuous, $\sigma(E',E)$-closed subset である。
さて $\xi\in\partial\mathcal{U}$ に対し $\varphi_\xi\in E'$ を $\varphi_\xi([s,s'])= f\cdot s(\xi) - f\cdot s'(\xi)$, $[s,s']\in E$, により対応させよう。あきらかに $\varphi_\xi\in A$。いま $\varphi_\xi=\varphi_{\xi'}$, $\xi,\xi'\in\partial\mathcal{U}$, であったとしよう。すなわち $\forall[s,s']\in E$ に対し $f\cdot s(\xi)-f\cdot s'(\xi) = f\cdot s(\xi')-f\cdot s'(\xi')$。
とくに $f\cdot s(\xi)=f\cdot s(\xi')$, $\forall s\in\mathcal{S}_+(X)$。
$s\in\mathcal{H}_+(X)$ として $f(\partial)s(\xi)=f(\partial)s(\xi')$ すなわち $\forall h\in\mathcal{H}_+(X)$ に対し $h(\xi)=h(\xi')$ だから $\xi=\xi'$ となる。
$\xi\to\varphi_\xi$ が $\partial\mathcal{U}\to E'_\sigma$ なる写像として conti もわかる（$f\cdot s - f\cdot s'\in\mathcal{H}(X-\mathrm{Supp}[f])$ より）。したがって $\xi\to\varphi_\xi$ は conti. な injection となる。これより $\partial\mathcal{U}$ 上の測度 $\lambda(d\xi)$ は

$$\Theta(F)=\int F\circ\varphi_\xi\;\lambda(d\xi),\quad F\in C(A)$$

により A 上の測度 Θ を定めることがわかる。
上の補題と同様にある定数に対し

$$\sup_{K_\nu}|f\cdot s-f\cdot s'|\leqq M\cdot H^{U}|f\cdot s - f\cdot s'|(x_0)$$

が $\forall[s,s']\in E$ に対し成り立つようにできるから $\lambda(d\xi) = \nu(X)\cdot M\cdot H^{U}(x_0,d\xi)$ に対応する A 上の Radon 測度を $\Theta(d\varphi)$ とすると

$$p_{\mathcal{U}}([s, s']) = \langle \nu, |f\cdot s - f\cdot s'| \rangle \leq$$
$$\leq \nu(X)\cdot M \cdot H^{U}|f\cdot s - f\cdot s'|(x_0)$$
$$= \int_{\mathcal{A}} |\langle g, [s, s'] \rangle| \, H(dg) \quad , \forall [s, s'] \in E .$$

Pietsch の定理より E は核型となる。

注.(イ) 我々は Brelot の公理系について話をしてきたが Bauer の公理系についても同様のことが言える．ただし Harnack の不等式はもっと複雑な形のものを使わねばならない。

(ロ) $\langle \mu, f\cdot s \rangle$ なる量は green kernel を $g(x, y)$ として $\int g(x, y)\mu(dy)$ なるポテンシャルと $\int g(x, y) f(y) \mu_s(dy)$ なるポテンシャルのエネルギーと同じ形をしている。ただし μ_s は $s \in \mathcal{S}_+(X)$ に対応する(表現する)測度。このことが本論の序に書いた問題を推測させる。

R.M. Herve; Ann. Inst. Fourier. 12 (1962)

H.H. Schaefer: Topological Vector Spaces, Macmillan