数理解析研究所講究録
第112巻 1971年 55-79

マルコフ過程のポテンシャル作用素

東京教育大 理　佐藤健一

マルコフ過程がtransientならば，ポテンシャル作用素は推移確率作用素の時間に関する積分として定義され，それについて多くの事実が知られているが，recurrentの場合には，ポテンシャル作用素をどのように定義したらよいか，それはどのような性質をもつかについて，まだ残された部分が多い．すなわち，3次元ニュートンポテンシャルの理論は~~非常~~相当に広いクラスのtransientなマルコフ過程へ一般化され，その本質が明かとなった部分が多いが，平面における対数ポテンシャルの理論（これは2次元ブラウン運動に対応し，ブラウン運動は2次元ではrecurrent）の一般化はこれに比して十分なされていない．いくつかの方向からこれに関係した研究がKemeny-Snell, Orey, Spitzer, 近藤, Port-Stone 等によってなされており，特にマルコフ連鎖と加法過程の場合は詳しい研究もあるが，ここでは，吉田の定義したポテンシャル作用素をとりあげて，まず，その一般的性質，それがか

なり広いクラスの recurrent マルコフ過程に対しても定義されること，特にすべての時間的一様加法過程に対し定義されることなどを示す．この部分は定理の証明を述べないが，吉田の結果の大部分は[7]またはそれに引用されている論文に見ることができ，その他は（定理3.6を除き）[6]として出る予定である．次に，1次元安定過程のポテンシャル作用素について具体的に計算した．この部分は[6]で簡単にしか書かなかったので，ここに完全な証明を書いておいた．

§1. バナッハ空間におけるポテンシャル作用素.

$\mathcal{B}$ をバナッハ空間，T_t，$t \geqq 0$，をその上の強連続な線型半群で $\|T_t\| \leqq 1$ とする．その生成作用素を A，resolvent を U^λ，$\lambda > 0$，で表わす．すなわち

$$Af = \operatorname*{s-lim}_{t \downarrow 0} \frac{1}{t}(T_t f - f), \qquad U^\lambda f = (\lambda - A)^{-1} f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f \, dt$$

（s-lim は強収束の極限を表わす）.

定義（吉田）　$\operatorname*{s-lim}_{\lambda \downarrow 0} U^\lambda f$ の存在するような f が $\mathcal{B}$ において稠密である時，$\{T_t\}$ はポテンシャル作用素をもつといい，上の極限を Vf として定義される V をポテンシャル作用素という．V の定義域 $\mathcal{D}(V)$ は，上の極限の存在

するような f の全体とする.

定理1.1.(吉田)『$\{T_t\}$ がポテンシャル作用素 V をもてば, $\mathfrak{D}(V)$ は A の値域 $\mathfrak{R}(A)$ と一致し, A は1対1で, しかも $V = -A^{-1}$ が成り立つ.』

$\{T_t\}$ がポテンシャル作用素をもつための条件を与える次の定理も, 条件 (e) (f) (i) を除き吉田による.

定理1.2.『次の9つの条件は互いに同値である:

(a) $\{T_t\}$ がポテンシャル作用素をもつ.

(b) $\mathfrak{R}(A)$ が稠密.

(c) すべての $f \in \mathcal{L}$ に対し $\lambda U^\lambda f \to 0$ (強), $\lambda \downarrow 0$.

(d) 〃 〃 (弱), 〃

(e) 〃 $\frac{1}{t}\int_0^t T_s f\,ds \to 0$ (強), $t \to \infty$.

(f) 〃 〃 (弱), 〃

(g) A^* が1対1.

(h) すべての $\varphi \in \mathcal{L}^*$ に対し $\lambda (U^\lambda)^* \varphi \to 0$ (汎弱), $\lambda \downarrow 0$.

(i) 〃 $\frac{1}{t}\int_0^t T_s^* \varphi\,ds \to 0$ (汎弱), $t \to \infty$.』

ただし, T_t^*, A^*, $(U^\lambda)^*$ はそれぞれ T_t, A, U^λ の共役作用素であり, $\frac{1}{t}\int_0^t T_s^* \varphi\,ds$ とは次のような $\psi \in \mathcal{L}^*$ のことである:

$$\psi(f) = \frac{1}{t}\int_0^t (T_s^* \varphi)(f)\,ds, \qquad f \in \mathcal{L}.$$

$U^\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t\,dt$ であるから, $\lambda \downarrow 0$ として形式的には

$V=\int_0^\infty T_t\,dt$ となるが，いえるのは次のことである．

定理1.3. 『$\{T_t\}$ がポテンシャル作用素 V をもつ時，次の2つの条件は同値である：

(a) $\int_0^t T_s f\,ds \to u$ （弱），$t\to\infty$.

(b) $f\in\mathcal{D}(V)$ かつ $Vf=u$ で，しかもある $g\in\mathcal{B}$ に対し $T_t u\to g$ （弱），$t\to\infty$.

(a) の（弱）を（強）にかえたものは，(b) の（弱）を（強）にかえたものと同値である．なお g は必ず 0 である．』

$\{T_t\}$ がポテンシャル作用素 V をもつ時，$f\in\mathcal{D}(V)$ で $Vf=u$ でも $\int_0^t T_s f\,ds \to u$ （強），$t\to\infty$，とは限らない（反例：deterministic な運動）．しかし，$\int_0^t T_s f\,ds \to u$ （弱）とならない例を筆者は知らない．

一般に，$\mathcal{B}$ の部分集合 $\mathfrak{M}$ が閉作用素 T の core であるとは，$\mathfrak{M}\subset\mathcal{D}(T)$ で任意の $f\in\mathcal{D}(T)$ に対し列 $\{f_n\}\subset\mathfrak{M}$ を適当にとると $f_n\to f$ （強） かつ $Tf_n\to Tf$ （強）が成り立つこととする．従って，作用素 T は core の上だけで分れば完全にきまることになる．A あるいは V の形をその定義域全体で具体的に求めることはむづかしいことが多いが，core を見つけてその上でどんな形かを求めることはしばしば可能である．§4 がこの例になっている．

§2. マルコフ過程半群のポテンシャル作用素.

S を局所コンパクトで可算基をもつハウスドルフ空間, $C_0(S)$ を, S 上の実数値連続函数 f で無限遠で 0 になるものの全体のつくるバナッハ空間 ($\|f\| = \max_{x \in S} |f(x)|$), C_K をコンパクトな台 (support) をもつ実数値連続函数の全体とする. たゞし, S 自身がコンパクトの時は, $C_0(S)$, C_K は共に S 上の連続函数の全体を表わすとする. $C_0(S)$ 上の強連続線型半群 T_t で $\|T_t\| \leq 1$ かつ $T_t \geq 0$ なるものが与えられたとする. T_t から S 上の時間的一様マルコフ過程がきまり, T_t はその推移確率 $P(t, x, dy)$ による積分作用素となる. 任意の x と任意のコンパクト集合 B に対し $\int_0^\infty P(t, x, B)\,dt < \infty$ であるとき, このマルコフ過程は transient であるといい, 任意の x と x を含む任意の開集合 B に対し $\int_0^\infty P(t, x, B)\,dt = \infty$ であるとき recurrent であるという. Recurrent でかつ任意の x, 任意のコンパクト集合 B に対し $P(t, x, B) \to 0$, $t \to \infty$, の時 null recurrent といい, 任意の x, x を含む任意の開集合 B に対し $\liminf_{t \to \infty} P(t, x, B) > 0$ の時 positive recurrent といおう. この定義は, S が可算集合のときは, 慣用されている定義と一致している. 次の定理 2.1 は定理 1.2 から容易に分る.

<u>定理 2.1.</u> 『Transient または null recurrent の場合，$\{T_t\}$ はポテンシャル作用素をもつ．Positive recurrent の場合または有限不変測度をもつ場合は，ポテンシャル作用素をもたない．』

Hunt が扱っているような場合に対しては，次のことがいえる．

<u>定理 2.2.</u> 『$\{T_t\}$ がポテンシャル作用素 V をもち，$\mathcal{D}(V) \supset C_K$ とする．この時，マルコフ過程は transient，C_K は V の core で，

$$Vf = s\text{-}\lim_{t\to\infty} \int_0^t T_s f \, ds$$

である．』

Transient でも一般には $C_K \subset \mathcal{D}(V)$ とは限らない．この時 $C_K \cap \mathcal{D}(V)$ が V の core であるかは，加法過程の場合以外には分っていない．

§3. 加法過程のポテンシャル作用素.

S として d 次元ユークリッド空間 R^d をとり，S 上の conservative な確率連続加法過程で時間的一様なものを考える．するとその推移確率は $C_0(R^d)$ 上の半群 T_t を定め，$\|T_t\| = 1$，しかも T_t は translation に関し不変である．T_t の生成作用素 A の形が core において分っており，それを

使って次の5つの定理がいえる．

定理 3.1. 『(i) A が2階微分の部分をもてば（すなわち，考えている加法過程が Gaussian part をもてば），任意の $f \in C_K$ と任意の $t>0$ に対し

$$\| T_t f \| \leq c\, t^{-1/2} \| f \| \operatorname{diam} S(f)$$

がなりたつ．c は t, f によらない定数，$\operatorname{diam} S(f)$ は f の台の直径である．(ii) A が積分作用素の部分をもてば（すなわち，考えている加法過程が jump をもてば），任意の $f \in C_K$ と任意の $t>0$ に対し

$$\| T_t f \| \leq t^{-1/2} \| f \| \left(c_1 + c_2 \operatorname{diam} S(f) \right),$$

ただし c_1, c_2 は t, f によらない定数である．』

定理 3.2. 『A が零作用素（すなわち対応する加法過程は静止）の場合を除き，$\{T_t\}$ はポテンシャル作用素 V をもつ．』

これは，任意次元のブラウン運動に対しポテンシャル作用素が存在するという吉田の結果の拡張である．

定理 3.3. 『$\{Au;\ u \in C_K^\infty\}$ は V の core である．』（C_K^∞ はコンパクトな台をもつ C^∞ 級函数の全体とする．C_K^∞ は $\mathfrak{D}(A)$ に含まれる．）

定理 3.4. 『$f \in \mathfrak{D}(V)$ で f, Vf が共にルベーグ可積分であるような f の全体を $\mathfrak{M}$ とすると，$\mathfrak{M}$ は V の

core である．$f \in \mathfrak{M}$ ならば $\int_{R^d} f(x)dx = 0$ である．』

<u>定理 3.5.</u>『Lévy 測度の台が有界（すなわち jump の大きさが有界）の時，$C_K \cap \mathcal{D}(V)$ は V の core である．』

以上のうち，定理 3.2 は，定理 1.2 によって定理 3.1 から得られる．定理 3.3 は C_K^∞ が A の core であること（[5] にある）から分り，定理 3.4，3.5 は定理 3.3 からみちびかれる．V の core に関しては上の結果は満足すべきものに達していない．

対応する加法過程を X_t とし，$X_0 = 0$ としよう．x が possible な点であるとは，x の任意の開近傍 B に対しある $t > 0$ が存在して $P(X_t \in B) > 0$ となることとする．以下，この節では，possible な点の全体から生成される閉部分群 $\mathfrak{G}$ が R^d と一致すると仮定する（そうでない場合は，R^d の代りに $\mathfrak{G}$ を S と考え，ルベーグ測度の代りに $\mathfrak{G}$ のハール測度をとれば同様であるが．）Port-Stone の最近の結果 [4] の中に次のことがある．Transient で $d=1$ かつ $E|X_t| < \infty$（従って $EX_t \neq 0$）の場合を type II transient とよび，type II transient でない transient を全部 type I transient とよぶ．Transient の場合，$f \in C_K$ に対し

$$Uf(x) = \int_{R^d} U(x, dy) f(y), \quad U(x, B) = \int_0^\infty P(t, x, B)\, dt$$

によって Uf を定義すると，Uf は明かに有限，連続となり，これに対し次の renewal 型の定理が成り立つ.

(1)　Type I transient ならば $\lim_{|x|\to\infty} Uf(x)=0$.

(2)　Type II transient で $EX_1 \gtrless 0$ ならば $\lim_{x\to\pm\infty} Uf(x)=0$,

$$\lim_{x\to\mp\infty} Uf(x)=\pm\int_{R^d} f(y)dy \Big/ EX_1 \quad \text{（複号同順）.}$$

従って，Type I transient では $C_K \subset \mathcal{D}(V)$ で，$f\in C_K$ に対し $Vf=Uf$ であり，type II transient では，$C_K\cap\mathcal{D}(V)$ は $\int_{R^1} f(x)dx=0$ なる $f\in C_K$ の全体と一致し，このような f に対し $Vf=Uf$ である. 上の Port-Stone の結果を使って，更に次のことを証明することができる.

<u>定理 3.6.</u>『$d=1$ で transient の場合，$\int_{R^1} f(x)dx=0$ なる $f\in C_K$ の全体は，V の core である.』

Recurrent の場合を含めて Port-Stone [4] は多くの著しい結果を得ているので，それを検討すると V についてかなりいろいろのことがわかるようである.

§4. 安定過程のポテンシャル作用素.

加法過程の例として，1次元安定過程のポテンシャル作用素 V を求めよう. X_t を指数 α $(0<\alpha\leqq 2)$ の1次元安定過程，$X_0=0$ とする. Deterministic な運動は除くこととし，

時間のはかり方を適当に定数倍すると，X_t の特性函数 $\varphi_t(\theta)=Ee^{i\theta X_t}$ は次のいずれかになる：

(1) $\varphi_t(\theta)=\exp[-t\theta^2]$ （$\alpha=2$ の場合），

(2) $\varphi_t(\theta)=\exp[-t|\theta|^\alpha(1+i\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\mathrm{sgn}\,\theta)]$ （$0<\alpha<1$ または $1<\alpha<2$ の場合，β は定数で $-1\leq\beta\leq1$），

(3) $\varphi_t(\theta)=\exp[-t|\theta|\,(1-i\gamma\,\mathrm{sgn}\,\theta)]$ （$\alpha=1$ の場合．γ は実の定数）．

X_t は $1\leq\alpha\leq2$ では recurrent，$0<\alpha<1$ では transient であり，そのポテンシャル作用素 V は以下のようになる．ただし $\alpha=2$ すなわちブラウン運動の場合は，簡単であるがここでは述べない．$\mathfrak{M}_0$ をコンパクトな台をもつ連続函数で積分が0となるものの全体としよう．

定理4.1.『指数 $1<\alpha<2$，特性函数 (2) の場合，$C_K\cap\mathcal{D}(V)=\mathfrak{M}_0$ となり，$\mathfrak{M}_0$ は V の core で，

(4) $$Vf(x)=\int_R k(y-x)f(y)dy,\qquad f\in C_K\cap\mathcal{D}(V)$$

ただし

(5) $$k(x)=\frac{|x|^{\alpha-1}(1-\beta\,\mathrm{sgn}\,x)}{2(1+h^2)\Gamma(\alpha)\cos(\pi\alpha/2)},\qquad h=\beta\tan\frac{\pi\alpha}{2}$$

とする．』

$\mathfrak{M}_0$ が V の core であるという主張を除けば，上の定理は Port [3] に証明してあるが，定理1.3を使った方が [3] よ

り見通しがよいので，証明を書こう．なお Port [3] p.153 は $\mathfrak{M}_0$ が V の core であるということよりも弱いこと（$\mathfrak{M}_0$ の V による像が C_0 で稠密）をポテンシャル論的事実を用いて証明している．証明は4つの部分に分けて行う．

1° $\varphi_t(\theta)$ は θ について可積分であるから，X_t の分布は有界連続な密度 $p(t,x)$ をもち

(6) $$p(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-i\theta x}\varphi_t(\theta)\,d\theta$$

である．時空変換の公式

(7) $$p(t,x)=c^{1/\alpha}p(ct,\ c^{1/\alpha}x),\qquad c>0$$

が (6) から直ちに分る．

(8) $$g(t,x)=\int_0^t p(s,x)\,ds$$

とおく．$\alpha>1$ により

(9) $$\int_0^t ds\int_R e^{-s|\theta|^\alpha}d\theta=\int_R\frac{1-e^{-t|\theta|^\alpha}}{|\theta|^\alpha}d\theta<\infty$$

であるから，$g(t,x)$ は x に関し有界である．まず

(10) $$\lim_{t\to\infty}(g(t,x)-g(t,0))=k(x)$$

を示そう．$k(x)$ は (5) で定義した函数である．まず (9) により

$$g(t,x)-g(t,0)=\frac{1}{2\pi}\int_R(e^{-i\theta x}-1)\,d\theta\int_0^t\varphi_s(\theta)\,ds$$

である. $\theta \neq 0$ では $\int_0^t \varphi_s(\theta)ds$ は絶対値が $\leq |\theta|^{-\alpha}$ でしかも $t \to \infty$ の時 $|\theta|^{-\alpha}(1+ih\,\mathrm{sgn}\,\theta)^{-1}$ に近づくから,

$$\lim_{t\to\infty}(g(t,x)-g(t,0)) = \frac{1}{2\pi}\int_R \frac{e^{-i\theta x}-1}{|\theta|^\alpha(1+ih\,\mathrm{sgn}\,\theta)}d\theta$$

である. 右辺は

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-i\theta x}-1}{\theta^\alpha(1+ih)}d\theta + \int_0^\infty \frac{e^{i\theta x}-1}{\theta^\alpha(1-ih)}d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(1+h^2)}\left[\int_0^\infty \frac{\cos\theta x-1}{\theta^\alpha}d\theta - h\int_0^\infty \frac{\sin\theta x}{\theta^\alpha}d\theta\right]$$

これは知られている定積分で, たとえば [1] の p.78 (3), p.68 (1) と $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\pi/\sin\pi\alpha$ を用いると

$$= \frac{|x|^{\alpha-1}}{2(1+h^2)\Gamma(\alpha)}\left[\frac{1}{\cos(\pi\alpha/2)} - \frac{h\,\mathrm{sgn}\,x}{\sin(\pi\alpha/2)}\right] = k(x),$$

すなわち (10) がいえた. 以下, c_j $(j=1,2,\cdots)$ は t,x,y によらない定数とする. Port [3] に従って次の評価を示しておこう:

(11) $$|g(t,y-x)-g(t,-x)| \leq c_1 + c_2|y|.$$

まず $t\leq 1$ では評価 (9) により $g(t,x)$ が (t,x) に関し有界であるから, $t>1$ として $\int_1^t |p(s,y-x)-p(s,-x)|ds$ を評価すれば十分である. (6) から $p(1,x)$ は x について微分可能で, 導関数も有界である. 従って (7) と $\alpha<2$

を用いると,

$$\int_1^t |p(s, y-x)-p(s,-x)|\,ds = \int_1^t s^{-1/\alpha}\,|p(1, (y-x)s^{-1/\alpha})$$
$$-p(1, -xs^{-1/\alpha})|\,ds \leqslant \int_1^t s^{-2/\alpha}|y| \sup_{y\in R}|p'(1,y)|\,ds \leqslant c_3|y|,$$

従って (11) がいえた. Port [3] p. 146 の次の評価を後で使う:

(12) $$|k(y-x)-k(-x)| \leqslant c_4|y|^{\alpha-1}.$$

2° $f\in\mathfrak{M}_0$ と仮定し, $f\in\mathcal{D}(V)$ となり Vf が (4) で表わされることをいおう. それには, (4) の右辺を $u(x)$ とおくとき $u\in C_0(R)$ で, $\int_0^t T_s f(x)\,ds$ が $t\to\infty$ の時 $u(x)$ に有界収束 (絶対値が一様に定数でおさえられながら各点収束) することをいえばよい (定理 1.3). まず u が連続であることは明か. さらに,

(13) $$u(x) = \int_R (k(y-x)-k(-x))f(y)\,dy$$

であり, $x\to\infty$ の時コンパクト集合内の y に関し一様に

(14) $$k(y-x)-k(-x) = c_5\left(|y-x|^{\alpha-1}-|-x|^{\alpha-1}\right) = c_5|-x|^{\alpha-1}\left(\left|1-\frac{y}{x}\right|^{\alpha-1}-1\right)$$
$$= c_5|-x|^{\alpha-1}\left(-(\alpha-1)\frac{y}{x}+O\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\right) = o(1),$$

$x\to-\infty$ の時も同様であるから, $u\in C_0$ である.

$$\int_0^t T_s f(x)\,ds = \int_0^t ds\int_R p(s, y-x)\,f(y)\,dy$$

$$= \int_R g(t, y-x) f(y)\,dy = \int_R (g(t, y-x) - g(t, -x)) f(y)\,dy$$

であるから，これは (10), (11) により (13) の右辺すなわち $u(x)$ に有界収束する．

3° 次に $C_K \cap \mathcal{D}(V) \subset \mathfrak{M}_0$ を示そう．$f \in C_K \cap \mathcal{D}(V)$ とする．定理 3.1 で一般にのべたように $\|T_t f\| \to 0 \quad (t \to \infty)$ だから，定理 1.3 により

$$Vf(x) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t T_s f(x)\,ds$$

である．ところが前と同様に

$$\int_0^t T_s f(0)\,ds = \int_R (g(t, y) - g(t, 0)) f(y)\,dy + g(t, 0) \int_R f(y)\,dy$$

で右辺第1項は $\int k(y) f(y)\,dy$ に収束するから，$g(t, 0) \to \infty$ が分れば，$\int f(y)\,dy = 0$ すなわち $f \in \mathfrak{M}_0$ でなくてはならない．ところで $g(t, 0) \to \infty$ は，(7) から

$$g(t, 0) = p(1, 0) \int_0^t s^{-1/\alpha}\,ds$$

であることと，(6) から

$$p(1, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\theta^\alpha} \cos(h\theta^\alpha)\,d\theta = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{1}{\alpha}-1} \cos hz\,dz > 0$$

であることとから分る．

4° 残ったのは $\mathfrak{M}_0$ が V の core であることの証明だけである．それには安定過程の Lévy 測度 ν が $|x| \to \infty$ で $O(|x|^{-\alpha-1})$ となる密度をもっていることを用いる．すなわち

(15) $$\nu(dx) = \begin{cases} c_6 x^{-\alpha-1}\,dx, & x > 0 \\ c_7 |x|^{-\alpha-1}\,dx, & x < 0, \end{cases}$$

c_6, c_7 は 0 のこともある．証明はたとえば [2]，ただしこの本では stable という語をわれわれより広い意味に用いている．従って，$u \in C_K^\infty$ ならば $x \notin S(u)$ に対し

$$Au(x) = c_6 \int_0^\infty u(x+y) \frac{dy}{y^{\alpha+1}} + c_7 \int_{-\infty}^0 u(x+y) \frac{dy}{|y|^{\alpha+1}}$$

である．$S(u) \subset [-a, a]$，$|x| \geqq 2a$ とすると，$|y| \leqq a$ では $|y-x| \geqq |x|/2$ であることに注意すると

$$|Au(x)| \leqq c_8 \int_{-a}^{a} |u(y)| \frac{dy}{|y-x|^{\alpha+1}} \leqq \frac{\text{const.}}{|x|^{\alpha+1}}$$

が成り立つ．定理 3.4 により Au の積分は 0 である．従って，定理 3.3 に注意すれば，$\mathfrak{M}_0$ が $\mathbb{V}$ の core であることをいうには，次のことをいえば十分であることが分る：

$\int f(x)\,dx = 0$ でかつ $|x| \to \infty$ のとき $f(x) = O(|x|^{-\alpha-1})$ となる任意の $f \in C_0$ に対し，$\mathfrak{M}_0$ 内の適当な列 $\{f_n\}$ をとれば $f_n \to f$（強）かつ $\mathbb{V} f_n$ もある $u \in C_0$ に強収束する．f はこの条件をみたすものとしよう．

(16) $$u(x) = \int_R k(y-x) f(y)\, dy$$

で u を定義する．すると (13) が成り立つから (12) と (14) を用いれば u が C_0 に属することが分る．連続函数 ρ で $0 \leqq \rho \leqq 1$，$[-1, 1]$ の上で 1，$[-2, 2]$ の外で 0 なるものを選び，$f_n(x) = (a_n + f(x))\rho(x/n)$ とお

く．ただし a_n は f_n の積分が 0 となるように，すなわち $f_n\in\mathfrak{M}_0$ となるように選ぶ．

$$0=\int_R f_n(x)\,dx = c_q n a_n + \int_{-n}^{n} f(x)\,dx + \int_{|x|>n} f(x)p\left(\frac{x}{n}\right)dx,\quad c_q=\int_R p(x)dx,$$

$$\int_{-n}^{n} f(x)\,dx = \int_{|x|>n} f(x)\,dx = O\left(\int_{|x|>n}|x|^{-\alpha-1}dx\right) = O(n^{-\alpha})$$

であり $\int_{|x|>n} f(x)p(\frac{x}{n})dx$ も (a) で評価されるから，$a_n=O(n^{-\alpha-1})$ である．故に，

$$\|f_n-f\|\le |a_n| + \left\|f(x)p\left(\frac{x}{n}\right)-f(x)\right\| \le |a_n| + \sup_{|x|>n}|f(x)|\to 0.$$

∇f_n は (4) の形で表わされるから，(13) により

$$\nabla f_n(x)-u(x)=\int (k(y-x)-k(-x))(f_n(y)-f(y))\,dy,$$

故に (12) により

$$\|\nabla f_n - u\| \le c_4\int_R |y|^{\alpha-1}|f_n(y)-f(y)|\,dy$$

である．$|y|\ge 2n$ では $f_n(y)=0$ となり $|y|<2n$ では

$$|f_n(y)|\le |a_n|+|f(y)|\le \mathrm{const}\; n^{-\alpha-1}+|f(y)|\le \mathrm{const}\;|y|^{-\alpha-1}+|f(y)|$$

であるから

(17) $\qquad f_n(y)=O(|y|^{-\alpha-1}),\qquad n$ に関し一様

である．従ってルベーグの收束定理が使えて $\|\nabla f_n-u\|\to 0$ を得る．これで定理4.1の証明を終った．

定理4.2.『指数 $\alpha=1$，特性函数 (3) の場合，定理4.1と同じ結論が成り立つ．ただし $k(x)$ は (5) でなく

$$(18)\qquad k(x)=\frac{-\log|x|+2^{-1}\pi\gamma\,\mathrm{sgn}\,x}{\pi(1+\gamma^2)},\qquad x\neq 0$$

とする．』

証明を，前の定理と同じ考えで行おう．

1° 今度の場合 X_t の分布は Cauchy 分布であり (6) の積分が計算できて

$$(19)\qquad p(t,x)=\frac{t}{\pi(t^2+(x-\gamma t)^2)}$$

となる．$g(t,x)$ をやはり (8) で定義する．(19) から分るように今度は $1<\alpha<2$ の時と異って $g(t,0)=\infty$ となるので (10) はいえないが，そのかわりに

$$(20)\qquad \lim_{t\to\infty}\left(g(t,x)-g(t,1)\right)=k(x)-\frac{\gamma}{2(1+\gamma^2)}$$

がいえる．実際 $g(t,x)$ は具体的に求まり

$$(21)\qquad g(t,x)=\frac{1}{2\pi(1+\gamma^2)}\Big[\log(t^2+(x-\gamma t)^2)+2\gamma(\mathrm{sgn}\,x)\arctan\frac{(1+\gamma^2)t-\gamma x}{|x|}$$
$$-\log(x^2)\Big]$$

であるから

$$\lim_{t\to\infty}\left(g(t,x)-g(t,1)\right)=\frac{1}{2\pi(1+\gamma^2)}\left[-2\log|x|+\pi\gamma\,\mathrm{sgn}\,x-\pi\gamma\right]$$

すなわち (20) である．以下 c_j ($j=1,2,\cdots$) は t, x,

y によらない正の定数とする．必要な評価として

(22) $$|g(t,x)-g(t,1)| \leqq c_1 |\log|x|| + c_2$$

およびそれを拡張した

(23) $$|g(t,x+y)-g(t,x)| \leqq c_3 \left|\log\left|1+\frac{y}{x}\right|\right| + c_4 , \qquad x \neq 0$$

を示そう．

$$F(t,x) = \frac{t^2+(x-\gamma t)^2}{t^2+(1-\gamma t)^2}$$

とおくとき (21) から

$$|g(t,x)-g(t,1)| \leqq c_5 |\log F(t,x)| + c_6 |\log|x|| + c_7$$

であるから，(22) をいうには

(24) $$|\log F(t,x)| \leqq c_8 |\log|x|| + c_9$$

をいえばよい．

(25) $$c_{10} t^2 + c_{11} \leqq t^2 + (1-\gamma t)^2 \leqq c_{12} t^2 + c_{13}$$

は明かであるから，

$$F(t,x) = |x|^2 \frac{\left(\frac{t}{|x|}\right)^2 + \left(1-\gamma\frac{t}{|x|}\right)^2}{t^2+(1-\gamma t)^2} \leqq |x|^2 \frac{c_{12}\left(\frac{t}{|x|}\right)^2 + c_{13}}{c_{10}t^2+c_{11}} \leqq c_{14}|x|^2 + c_{15},$$

$$F(t,x) \geqq |x|^2 \frac{c_{10}\left(\frac{t}{|x|}\right)^2 + c_{11}}{c_{12}t^2+c_{13}} .$$

故に $t \geqq 1$ では $F(t,x) \geqq c_{16}$ で $|\log F(t,x)| \leqq c_{17} + |\log(c_{14}|x|^2+c_{15})|$ $\leqq c_{18} + c_{19}|\log|x||$ である．$0<t<1$ では $F(t,x) \geqq c_{20}|x|^2$ で $|\log F(t,x)| \leqq |\log(c_{20}|x|^2)| + |\log(c_{14}|x|^2+c_{15})| \leqq c_{21} + c_{22}|\log|x||$

である．これで (24) 従って (22) がいえた．(21) から

$$g(t,x+y)-g(t,x)=\frac{1}{2\pi(1+\gamma^2)}\left[\log\frac{t^2+(x+y-\gamma t)^2}{t^2+(x-\gamma t)^2}+2\log\left|\frac{x+y}{x}\right|\right]+\text{有界な項}$$

であり，$\dfrac{t^2+(x+y-\gamma t)^2}{t^2+(x-\gamma t)^2}=\dfrac{\left(\frac{t}{x}\right)^2+\left(\frac{x+y}{x}-\gamma\frac{t}{x}\right)^2}{\left(\frac{t}{x}\right)^2+\left(1-\gamma\frac{t}{x}\right)^2}$ であるから (24) (あるいは γ の符号を変えた時の (24) と同じ形の評価) から (23) が得られる．

2° $f\in\mathfrak{M}_0$ を仮定し，$f\in\mathcal{D}(V)$ となって Vf が (4) で表わされることをいおう．(4) の右辺を $u(x)$ とおく．

(26) $$u(x)=\int_R k(y)f(x+y)\,dy$$

だから u は連続である．また，u を (13) の形にかくと

$$u(x)=c_{23}\int\log\left|1-\frac{y}{x}\right|\cdot f(y)\,dy+c_{24}\int(\operatorname{sgn}(y-x)-\operatorname{sgn}(-x))f(y)\,dy$$

で，f はコンパクトな台をもつから，$\lim\limits_{|x|\to\infty}u(x)=0$ である．故に $u\in C_0$ である．

$$\int_0^t T_s f(x)\,ds=\int_R g(t,y-x)f(y)\,dy=\int_R(g(t,y-x)-g(t,1))f(y)\,dy$$

であるから (20), (22) をつかうと

(27) $$\lim_{t\to\infty}\int_0^t T_s f(x)\,ds=\int_R\left(k(y-x)-\frac{\gamma}{2(1+\gamma^2)}\right)f(y)\,dy=u(x)$$

を得る．(22) から

$$\left|\int_0^t T_s f(x)\,ds\right|\le\int_R(c_1|\log|y-x||+c_2)|f(y)|\,dy$$

であり，同様に(23)から

$$\left|\int_0^t T_s f(x)\,ds\right| \le \int_R \left(c_3\left|\log\left|1-\frac{y}{x}\right|\right| + c_4\right)|f(y)|\,dy$$

であるから $\int_0^t T_s f(x)\,ds$ は t, x について有界である（$|x|$ が小さい時は前者，$|x|$ が大きい時は後者を用いる.）すなわち (27) は有界収束である.

3° $f \in \mathcal{D}(V) \cap C_K$ とし，$\int f(x)\,dx = 0$ を示そう．定理1.3 から $\int_0^t T_s f(0)\,ds$ は t について有界であるが，

$$\int_0^t T_s f(0)\,ds = \int_R (g(t,y)-g(t,1))f(y)\,dy + g(t,1)\int_R f(y)\,dy$$

で右辺第1項は (22) により有界であり，(21) から $\lim_{t\to\infty} g(t,1) = \infty$ であるから，$\int f(y)\,dy = 0$ でなければならない.

4° $\mathfrak{M}_0$ が V の core であることの証明も定理4.1と同じ考えでできる．$\alpha=1$ として前の 4° を見なおせばよい．ただし，$\int f(x)\,dx = 0$ でかつ $f(x) = O(|x|^{-2})$, $|x|\to\infty$, なる $f \in C_0$ をとるとき (16) で u を定義すると $u \in C_0$ となる証明はもっとむずかしくなる．(26) のようにかけば u の連続性は分る．$x\to\infty$ の時を考えよう．まず u を (13) の形にかく．$a>0$ を固定すると 2° でいった通り

$$\int_{-a}^{a} (k(y-x)-k(-x))f(y)\,dy \longrightarrow 0$$

である．

$$\left|\int_{|y|>a}(k(y-x)-k(-x))f(y)\,dy\right| \leqslant c_{25}\int_{|y|>a}\left|\log\left|1-\frac{y}{x}\right|\right|\cdot|f(y)|\,dy + c_{26}\int_{|y|>a}|f(y)|\,dy$$

であるが，右辺 第1項のうち $(-\infty,-a)$ での積分部分は明かに，a を固定し $x\to\infty$ の時 0 に近づく．第1項のうち (a,∞) での積分の部分は

$$\int_a^\infty\left|\log\left|1-\frac{y}{x}\right|\right|\cdot|f(y)|\,dy \leqslant \text{const.}\int_a^\infty\left|\log\left|1-\frac{y}{x}\right|\right|\frac{dy}{y^2}$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{x}\int_{\frac{a}{x}}^\infty|\log|1-y||\frac{dy}{y^2} \leqslant \frac{\text{const}}{x}+\frac{\text{const}}{x}\int_{\frac{a}{x}\wedge\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\log(1-y)|\frac{dy}{y^2}$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{x}+\frac{\text{const}}{a}$$

と評価される．故に，a を十分大きくとってから $x\to\infty$ とすることにより $\lim_{x\to\infty}u(x)=0$ が確かめられる．$x\to-\infty$ の時も同様であるから $u\in C_0$ である．また，f から f_n を前の $4°$ のように定義するとき $\|Vf_n-u\|\to 0\quad(n\to\infty)$ となることの証明も次のようにする必要がある．(17) に注意して上の証明を見ると n に関して一様に $\lim_{|x|\to\infty}Vf_n(x)=0$ であることが分る．従って，a を任意に固定する時

$$\text{(28)}\qquad \lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\leq a}\int_{\mathbf{R}}|k(y-x)||f_n(y)-f(y)|\,dy=0$$

をいえばよい．$\|f_n-f\|\to 0$ と (17) により

(29) $$\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\le a}\int_R (|\log|y-x||+1)\,|f_n(y)-f(y)|\,dy = 0$$

がいえるから (28) もいえる．ここで

$$\lim_{b\to\infty}\sup_{|x|\le a}\int_{|y|>b} |\log|y-x||\,\frac{dy}{|y|^2} = 0$$

$$\sup_{|x|\le a}\int_{|y|\le b} |\log|y-x||\,dy < \infty$$

を用いた．定理 4.2 の証明おわり．

<u>定理 4.3.</u> 『指数 $0<\alpha<1$，特性函数 (2) の場合，$C_K \subset \mathcal{D}(V)$ で，$\mathfrak{M}_0$ が V の core であり，(4) が $f\in C_K$ に対して成り立つ．$k(x)$ は (5) と同じ式で定義される．』

証明．(6) で定義される密度函数 $p(t,x)$ に対して今度は

(30) $$\int_0^\infty p(t,x)\,dt = k(x), \qquad x\neq 0$$

をいおう．

$$\int_t^\infty ds\int_R e^{-s|\theta|^\alpha}\,d\theta = \int_R |\theta|^{-\alpha} e^{-t|\theta|^\alpha}\,d\theta < \infty$$

であるから積分の順序交換をして

$$\int_t^\infty p(s,x)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_R e^{-i\theta x}\,\frac{e^{-t|\theta|^\alpha(1+ik\,\mathrm{sgn}\,\theta)}}{|\theta|^\alpha(1+ik\,\mathrm{sgn}\,\theta)}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-i\theta x - t\theta^\alpha(1+ih)}}{\theta^\alpha(1+ih)}\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{i\theta x - t\theta^\alpha(1-ih)}}{\theta^\alpha(1-ih)}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\Re\left(\int_0^\infty \frac{e^{-i\theta x - t\theta^\alpha(1+ih)}}{\theta^\alpha(1+ih)}\,d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{\pi(1+h^2)}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-t\theta^\alpha}}{\theta^\alpha}\cos(\theta x + t\theta^\alpha h)\,d\theta - h\int_0^\infty \frac{e^{-t\theta^\alpha}}{\theta^\alpha}\sin(\theta x + t\theta^\alpha h)\,d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(1+h^2)}(I_1 - I_2 - hI_3 - hI_4),$$ ただし

$$\left.\begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{matrix}\right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-t\theta^\alpha}}{\theta^\alpha}\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \\ \sin \\ \cos \end{Bmatrix}\theta x \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \\ \cos \\ \sin \end{Bmatrix} t\theta^\alpha h \cdot d\theta$$

である. $\lim_{t\to 0} I_1$ を計算しよう. 変数変換 $\theta^\alpha = \psi$ により

$$I_1 = \int_0^\infty F(\psi)\,dG(\psi) = -\int_0^\infty F'(\psi)G(\psi)\,d\psi$$

ただし $F(\psi) = e^{-t\psi}\cos th\psi$, $G(\psi) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\psi \psi^{\frac{1}{\alpha}-2}\cos x\psi^{\frac{1}{\alpha}}\,d\psi$

$= \int_0^{\psi^{1/\alpha}} \frac{\cos x\theta}{\theta^\alpha}\,d\theta$, 従って $\psi\to\infty$ の時 $G(\psi)$ は有限な極限 $G(+\infty)$ をもっている. $|F'(\psi)| \leq te^{-t\psi}(1+|h|)$ であるから, 任意の $\psi_0 > 0$ に対して

$$|I_1 - G(+\infty)| = \left|\int_0^\infty F'(\psi)(G(+\infty) - G(\psi))\,d\psi\right|$$

$$\leq (1+|h|)\left[t\int_0^{\psi_0} e^{-t\psi}|G(+\infty)-G(\psi)|\,d\psi + \sup_{\psi\geq\psi_0}|G(+\infty)-G(\psi)|\,t\int_{\psi_0}^\infty e^{-t\psi}\,d\psi\right]$$

したがって $I_1 \to G(+\infty)$ $(t \downarrow 0)$ である．I_2, I_3, I_4 にも同様な計算ができて，$t \downarrow 0$ のとき

$$I_1 \longrightarrow \pi\left[2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot|x|^{1-\alpha}\right]^{-1}$$

$$I_2 \longrightarrow 0$$

$$I_3 \longrightarrow 0$$

$$I_4 \longrightarrow \pi\left[2\Gamma(\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot|x|^{1-\alpha}\operatorname{sgn} x\right]^{-1}$$

を得る．ここで $\displaystyle\lim_{\theta_0\to\infty}\int_0^{\theta_0}\frac{\cos x\theta}{\theta^\alpha}d\theta$，$\displaystyle\lim_{\theta_0\to\infty}\int_0^{\theta_0}\frac{\sin x\theta}{\theta^\alpha}d\theta$ の知られている値（たとえば [1] p.10 (1), p.68 (1) と $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/\sin\pi\alpha$ による）を用いた．これで (30) が証明された．

$f \in C_K$ とし $u(x)$ を (4) の右辺で定義すると $u \in C_0$ がすぐわかる．しかも (30) から $\int_0^t T_s f(x)ds$ が $t\to\infty$ の時 u に有界収束する．従って定理 1.3 により $f \in \mathfrak{D}(V)$，$Vf = u$ である．定理 2.2 を使えば C_K が V の core であり，定理 3.6 を使えばもっと詳しく $\mathfrak{M}_0$ が V の core であるから，定理 4.3 の証明を終った．

引 用 文 献

[1] A. Erdélyi 他, Tables of integral transforms, Vol. I, McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1954.

[2] B.V. Gnedenko - A.N. Kolmogorov, Limit distributions for sums of independent random variables, English trans-

lation, Revised edition, Addison-Wesley, 1968.

[3] S. C. Port, Potentials associated with recurrent stable processes, Markov processes and potential theory edited by J. Chover, John Wiley, 1967, pp. 135-163.

[4] S. C. Port - C. J. Stone, Infinitely divisible processes and their potential theory, to appear in Ann. Inst. Fourier.

[5] K. Sato, Semigroups and Markov processes, Lecture Notes, University of Minnesota, 1968.

[6] K. Sato, Potential operators for Markov processes, to appear in Proc. Sixth Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability.

[7] 吉田耕作, Abel型エルゴード定理とHuntのポテンシャル論, 数学 22巻 2号 (1970), pp. 81-91.