数理解析研究所講究録
第112巻 1971年 80-86

再帰的Markov過程のPotential核の固有値について

神戸商科大学　　高須　清澄

§1. 序

確率論とPotential論の関係をKakutani-Doob-Hunt等はhitting probabilityを用いて説明した。一方capacitary potentialを確率論によって説明することがKac-Ciesielski等によって行なわれた。そこでの興味ある結果の一つはcapacitary potentialをPotential核の積分作用素としての固有値と固有函数で表現することである。

上の場合のPotential核はTransientな場合に対応するのであるが，M-Kacは二次元Brown運動の場合にもこれと類似な結果が成立することを示し[1]，対数Potentialの負の固有値がその対数Potentialを考える集合のRobin定数に関係することを示した。このことは一方J-Tourtman[2]によって解析的に示されている。

ここでは上のKacの結果をある種の再帰的なMarkov過程にも拡張出来ることを示す。

§2、仮定と結果

Sを局所Compactで第二可算公理をみたすHausdorff空間とする。S上の位相的σ-集合体B上の正のRadon測度を$m(dx)=dx$と

する。S上のMarkov過程で次の仮定1.2.3.をみたすものを考える。

仮定1. Markov過程$\{x_t, P_x, x\in S\}$の推移確率$P_t(x, A)=P_x(x_t\in A)$のLaplace変換$R_\alpha(x, A)$ $(\alpha>0)$ は$m(dx)$に対して絶対連続で、そのdensity function $r_\alpha(x, y)$は$r_\alpha(x, y)=r_\alpha(y, x)$ $(x, y\in S)$となる。

仮定2. 次のような函数$\varphi(\alpha)$, $k(x, y)$が存在する。広義一様に$\alpha\to 0$の時 $|r_\alpha(x, y)-\varphi(\alpha)-k(x, y)|$ は0に収束する。ただし, $r_\alpha(x, y)=\infty$ならば$k(x, y)=\infty$とする。更に$\lim_{\alpha\to 0}\varphi(\alpha)=\infty$。

仮定3. ΩをS上の固定されたcompact集合とし, $k(x, y)$による$L^2(\Omega)$上の積分作用素$Kf(x)=\int_\Omega k(x, y)f(y)dy$. $(f\in L^2(\Omega))$は$L^2(\Omega)$のcompact作用素を与える。ただし$m(\Omega)>0$とする。

これらの仮定のもとで次の定理がM-Kac[1]と同様にして得られる。

定理1. 作用素Kは高々一つしか負の固有値を持たない。

定理2. 測度μをΩの平衡測度とすると, $C=\int_\Omega k(x, y)\mu(dy)$としたとき, Kの負の固有値が一つ存在するための必要条件は平衡定数Cが負であること。

§3. 予備定理

定理を証明するためにいくつかの予備定理を述べよう。

$V_A(x)$ を Aの特性函数，uを正数として

$$G_\alpha^u(x\, A) = E_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} \exp\left\{-u\int_0^t V_\Omega(x_\tau)d\tau\right\} V_A(x_t)\,dt\right]$$

と定義すればG_α^uは次のKacの公式をみたす。

予備定理 1.（Kacの公式）

(1) $R_\alpha(x\ A) - G_\alpha^u(x.A) = u\int_\Omega G_\alpha^u(x\,dy) R_\alpha(y.A)$

$$= u\int_\Omega R_\alpha(x,dy) G_\alpha^u(y.A) \qquad ({}^\forall A \in \mathcal{B})$$

とくに (2) $1 - \alpha G_\alpha^u(x.S) = \alpha u\int_\Omega R_\alpha(x,dy) G_\alpha^u(y\ S) = u\,G_\alpha^u(x.\Omega)$。

予備定理 2. $G_\alpha^u(x.A)$（$A \subset \Omega$）はAを$\mathcal{B}$内に固定したとき $\alpha \downarrow 0$とすれば単調増加で$G_0^u(x.A)$に近づく。また$G_0^u(x\,A) \leqq \frac{1}{u}$。

［証明］$G_\alpha^u(x\,A)$の定義より単調増加は明らか。また$G_\alpha^u(x\,A) \leqq G_\alpha^u(x,\Omega)$。

$$G_\alpha^u(x\ \Omega) \leqq G_0^u(x\ \Omega)$$

$$= E_x\left[\int_0^\infty \left\{-\frac{1}{u}\frac{d}{dt}\exp\left\{-u\int_0^t V_\Omega(x_\tau)d\tau\right\}\right\}dt\right]$$

$$= \frac{1}{u} - \frac{1}{u}\lim_{t\to\infty} E_x\left[\exp\left\{-u\int_0^t V_\Omega(x_\tau)d\tau\right\}\right]$$

$$\leqq \frac{1}{u}。$$

次に$g(x:u) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \varphi(\alpha)(1 - u\,G_\alpha^u(x\ \Omega))$を考える。これは定義可能で次の性質をみたす。

予備定理 3

(3) $g(x.u)$は固定されたuに対して，xについて有界で

$$\int_\Omega g(x.u)\,dx = \frac{1}{u}。$$

(4) $P(u)=\lim_{\alpha\downarrow 0}\varphi(\alpha)\left(1-u\int_\Omega \varphi(\alpha)\alpha G_\alpha^u(y,S)\,dy\right)$ とおけば,

$g(x,u)=P(u)-u\int_\Omega k(x,y)g(y,u)\,dy$.

[証明] Kac[1] による。

予備定理4. compact operator K が固有値 λ_j とそれに属する固有函数 ϕ_j ($\|\varphi_j\|=1$) を持てば ($\lambda_j \neq 0$, 各重複度も入れて, complete にとる。)

$$(5)\quad (P(u))^{-1}=\sum_{j=1}^{\infty}(u^{-1}+\lambda_j)^{-1}\left(\int_\Omega \phi_j(y)\,dy\right)^2 \qquad (u \neq -\lambda_j^{-1})$$

が成立する。

[証明] g が有界函数だから $L^2(\Omega)$ に属し, $\{\phi_j\}$ で展開出来るから予備定理3を用いて整理すれば上の結果となる。

予備定理5. Ω は capacity 正だから potential 核 k について平衡測度 μ_0 が存在する。$C=\int k(x,y)\mu_0(dy)$ (Ω 上 capacity 0 の集合を除いて) としたとき

$$(6)\quad C \leqq \lim_{u\to\infty} P(u)\ (\equiv C_0)$$

$$(7)\quad 1= C_0 \sum \lambda_j^{-1}\left(\int_\Omega \phi_j(y)\,dy\right)^2.$$

[証明] (6)は予備定理3と平衡測度の定義からただちに出る。また(7)は予備定理4で $u\to\infty$ として得られる。

§3. 定理の証明

[定理1の証明] [1]と同様.

[定理2の証明] $C>0$とする。定理1より負の固有値は高々1つだから$\lambda_1<0$と仮定する。Kは$N=\{f\in L^2 \mid \int_\Omega f(x)dx=0\}$上ではnon-negativeだから$\int \phi_1(y)dy \neq 0$。

$$(P(u))^{-1}=(u^{-1}+\lambda_1)^{-1}\left(\int \phi_1(y)dy\right)^2+\sum_{j=2}^{\infty}(u^{-1}+\lambda_j)^{-1}\left(\int \phi_j(y)dy\right)^2$$

$$\lim_{u\to\infty}P(u)\geq C>0$$

$$\lim_{u\downarrow -\lambda_1^{-1}>0}(P(u))^{-1}=-\infty$$

だから$u>-\lambda_1^{-1}$で$(P(u))^{-1}=0$となる。一方$P(u)$は$u\geq\lambda_0>0$で有界だから,これは矛盾である。次に$C=0$のとき$P(u)\geq 0$。これは$(P(u))^{-1}=\sum_{j=1}^{\infty}(u^{-1}+\lambda_j)^{-1}\left(\int_\Omega \phi_j(y)dy\right)^2 \quad (u\neq -\lambda_j^{-1})$より$\lambda_j$が負になることを許さない。

注意. $k(x,y)$が連続な場合には$C=C_0$で$C<0$は十分条件である。

§4. 例

仮定1.2.3.をみたす例を示す。

1. 一次元λ $(1\leq\lambda\leq 2)$次安定過程[3]

$$k_\alpha(x,y)=\pi^{-1}\int_0^\infty(\alpha+|\xi|^\lambda)^{-1}\cos(x-y)\xi\, d\xi$$

$1<\lambda\leq 2$のときには

$$\varphi(\alpha)=\pi^{-1}\int_0^\infty(\alpha+|\xi|^\lambda)^{-1}d\xi$$

$$k(x,y)=\left(2\Gamma(\lambda)\cos\frac{\pi\lambda}{2}\right)^{-1}|x-y|^{\lambda-1}$$

$\lambda=1$のときには

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{\alpha}+c_1 \quad (c_1\text{(定数)})$$

$$k(x,y)=\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{|x-y|}$$

2 二次元Brown運動 [1][3]

$$r_\alpha(x,y)=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi t}\exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{2t}-\alpha t\right\}dt$$

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{2}{\alpha}+c_2 \quad (c_2\text{(定数)})$$

$$k(x,y)=\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{|x-y|}$$

3. 一次元の対称な出生死滅過程. ジャンプする時間が平均$\frac{1}{c}$の指数分布に従う。[4]

$$r_\alpha(n,m)=\left(\alpha(c+2\alpha)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{c+\alpha-\sqrt{\alpha(c+2\alpha)}}{c}\right)^{|n-m|} \quad n,m\in\mathbb{Z}$$

$$\varphi(\alpha)=\left(\alpha(c+2\alpha)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$k(n,m)=-|n-m|$$

これらの例1.2.3.のすべては，kをcompact集合Ω $(m(\Omega)<\infty)$上の$L^2(\Omega,m)$上で考えれば，kは$L^2(\Omega\times\Omega)$に属するのでkを積分核とする$L^2(\Omega)$の作用素はcompact作用素を与える。

上の例1の$\lambda=1$の場合と例2の場合はkが定符号の値を取らないから考える集合Ωによって平衡定数Cの符号も変る。

[参考文献]

[1] M. Kac : On some probabilistic aspects of classical analysis. Amer. Math. Month. No.6. vol 77. (1970).

[2] J. Troutman : The logarithmic potential operator.

Ill. J. of Math., 11 (1967)

[3] S. Watanabe : Seminar on probability vol 13 安定過程.

[4] W. Feller : Probability theory and its applications. vol 2, Wiley, New York, (1966).