数理解析研究所講究録
第 112 巻 1971 年 211-214

無限分解可能分布のモーメント

東京教育大 理　佐藤健一

μ を1次元の無限分解可能分布，ν をその Lévy 測度とする．すなわち，

$$\int_R e^{i\theta x}\mu(dx) = \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\theta^2 + ia\theta + \int_{R\setminus\{0\}} \left(e^{i\theta y} - 1 - \frac{i\theta y}{1+y^2}\right)\nu(dy)\right],$$

$$\int_{R\setminus\{0\}} \frac{y^2}{1+y^2}\nu(dy) < \infty$$

である．このとき次のことがいえる．

定理『 $f(r)$ を $[0,\infty)$ で定義された非負の函数で，任意の有限区間で有界，r が十分大きい所で凹かつ非減少とする．すると

$$\int_{|y|>1} e^{f(|y|)}\nu(dy) < \infty$$

の時，かつその時に限って

$$\int_R e^{f(|x|)}\mu(dx) < \infty$$

である．』

証明は，Gauss 部分と原点の近くにおける Lévy 測度が上の積分の収束発散には影響しないことをいってから，$\sigma=0$，$a=0$，かつ ν が有限のときは複合 Poisson 分布であることを用いるとできる．$f(r)$ の例としては r^α $(0\leq\alpha\leq 1)$，r の十分大きい所で $(\log r)^\beta$，$(\log\log r)^\beta$ に等しい函数 $(\beta>0)$，などがある．特別の場合として，

系『 f を上と同じ条件をみたす函数，n を非負整数とする．

$$\int_{|y|>1}|y|^n f(|y|)\,\nu(dy)<\infty$$

の時，かつその時に限って

$$\int_R |x|^n f(|x|)\,\mu(dx)<\infty$$

である．』

注 1．定理において $f(|x|)$，$f(|y|)$ の代りに $|x|f(|x|)$，$|y|f(|y|)$ とした命題は，正しくない．実際，$\nu\equiv 0$ の場合を除けば必ず

$$(*)\qquad \int_R e^{|x|^{1+\alpha}}\mu(dx)=\infty,\qquad \forall\alpha>0$$

であることがたしかめられる．なお，μ が Gauss 分布 $(\nu\equiv 0,\ \sigma^2>0)$ のときは $(*)$ が成立せずに

$$\int_R e^{|x|^{1+\alpha}} \mu(dx) < \infty, \qquad 0 < \forall\alpha < 1$$

であり，更に

$$\int_R e^{a|x|^2} \mu(dx) \begin{array}{l} < \infty \\ = \infty \end{array} \qquad \begin{array}{l} (a < \frac{1}{2\sigma^2}) \\ (a \geqq \frac{1}{2\sigma^2}) \end{array}$$

であることは明かである．

注2．指数 α $(0 < \alpha < 2)$ の安定分布あるいは準安定(quasi-stable) 分布が $0 < \forall\beta < \alpha$ に対し β 次絶対モーメントをもち $\forall\beta \geqq \alpha$ に対し β 次絶対モーメントをもたないことは，よく知られているが，~~定理~~系と Lévy 測度の形

$$\nu(dy) = \begin{cases} c_1 y^{-1-\alpha} dy, & y > 0 \\ c_2 (-y)^{-1-\alpha} dy, & y < 0 \end{cases}$$

(c_1, c_2 は非負定数で $c_1 + c_2 > 0$) から明かである．

注3．1次元 transient 加法過程は1次絶対モーメントをもつか (type II transient)，もたないか (type I transient) によって性質が違い，1次元 recurrent 加法過程は2次モーメントをもつか (type II recurrent)，もたないか (type I recurrent) によって著しく性質が異るが，その分類は~~定理~~系により Lévy 測度で述べられる．

注4．清水良一氏は，~~定理1で~~上の系において $rf(r) = r^\alpha$ (α は正の実数) の場合が既に次の論文で証明されているということ

を教示された:

B. Ramachandran, On characteristic functions and moments, Sankhyā, Ser. A, Vol. 31 (1969), 1–12.