

ある二階非線形常微分方程式の定常解について

京大工 林 千博

上田 皖亮

赤松 則男

1. まえがき

自励振動系に周期的外力を加えると、外力周波数に同期化した周期振動が発生したり、あるいは同期の外れたうなり振動が発生することは良く知られている。筆者等はこのような系に発生する振動現象に関する研究を行ない、その成果の一部を前に報告した。⁽¹⁾ そこで振動系を記述する二階非線形常微分方程式

$$\begin{aligned} \ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) &= e(t), & \dot{} &\equiv \frac{d}{dt} \\ \text{ここに, } e(t+L) &= e(t) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) &= e(t), \\ \text{ここに, } e(t+L) &= e(t) \end{aligned}} \right\} (1)$$

の解を検討することにより、周波数引込（同期化）領域を求めた。さらに常微分方程式の変換理論を用いて、式(1)の解を

又位相面上の点列で表われし、これらの点列の大域的な性質を検討した。この手法によれば、周期振動は位相面上の有限個の点で表われ、うなり振動は無数個の点列で表われる。周期振動やうなり振動を表わす位相面図の例を求め、うなり振動には従来から概周期振動として知られているものの他に、数学的にその性質が未だ明らかにされていない振動が発生することを指摘した。

本論文はこの続報であって、はじめに力学系の解析に良く用いられている位相幾何学的方法について概説し、次にこの方法を適用して、式(1)の解の位相面上における振舞いについて考察したものである。それらのうち特に明らかにされていないうなり振動について詳細に報告する。

2. 解析方法

微分方程式(1)の解析には従来力学系の解析に用いられている常微分方程式の変換理論を応用することが有効である。力学系における位相幾何学的方法は H. Poincaré に始まり、G. D. Birkhoff 等により研究されて来た。

以下に変換理論に関して、微分方程式の解を表わす位相面上の点集合に関連した若干の術語を説明する。式(1)が一様有界性を有する場合には位相面上に最大有界不変集合(maximum

finite invariant set)が存在する。⁽²⁾ これは解の $t \rightarrow \infty$ に
 おける様子を表わす位相面上の点集合であるが、特に定常状
 態を表わす解は最大有界不変集合の中の中心点集合 (set of
 central points) で表わされる。⁽³⁾ 中心点集合は周期運動を表
 わす周期集合 (periodic set), 概周期運動を表わす調和集合
 (harmonic set), 回帰運動を表わす極小集合 (minimal set)
 とこれらの何れでもない準極小集合 (quasi-minimal set) か
 ら構成される。⁽⁴⁾ これらの詳細や、変換理論については H.
 Poincaré⁽⁵⁾, G. D. Birkhoff^(3, 6, 7), V. V. Nemytskii^(4, 8),
 V. V. Stepanov⁽⁸⁾, N. Levinson⁽²⁾ 等の文献を参照されたい。

3. 周波数引込現象とうなり振動

半導体などの負性抵抗素子を含む発振回路や帰還回路をも
 つ真空管発振回路に正弦波電圧を加えた場合に発生する振動
 現象を考察する。考察の対象は式(1)の形をした二階非線形常
 微分方程式

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x^3 = B \cos \nu t \quad (2)$$

で表わされる振動系とする。^{*} はじめに外力の振幅 B と周波

^{*} 式(2)で表わされる振動系の例については文献(1)を参照され
 たい。

数 ν に種々の値を与えた場合に、どのような種類の定常解が存在するかについて調べる。次に外力に特定の値を与えた場合に対する解の大域的な振舞を前節に述べた方法を適用して検討する。

3.1 周波数引込領域

自励振動系に周期的外力を加えると、外力の周波数が自励振動の周波数に接近している場合には、引込現象によって外力と同一周波数の振動が起り、またこれら二つの周波数が離れている場合にはようなり振動の起ることが知られている。引込現象はこれら二つの周波数が十分離れているも、これらの比が或る整数または整数分の一に近い値を取るときには起ることがあり、その結果発生する振動は外力周波数の整数倍または整数分の一に引込まれて、外力の高調波または分数調波振動となる。

図1は式(2)で表わされる強制自励振動系の周波数引込領域をアナログ計算機で求めた結果である。式(2)のパラメタは $\mu = 0.2$ とした。図1(a)は外力の振幅 B および周波数 ν を座標とする平面上に基本調波および分数調波の引込領域を示したものである。図の基本調波引込領域内に B, ν を与えると式(2)の系には基本調波振動が発生する。換言すれば、この領域

内の B , ν に対して位相平面上に基本調波振動を表わす完全安定な不動点が少なくとも一つ存在する。つぎに外力を分数調波引込領域, たとえば $1/3$ 調波引込領域内に与えると, $1/3$ 調波振動を表わす完全安定 3-周期群が少なくとも一つ存在する。またこれらの領域の重なった部分に外力を与えれば, 位相面上には重なる引込領域に対応した完全安定な周期群が存在する。系にこれらのうちから何れの振動が発生するかは初期条件によって定まる。これらの引込領域外に外力を与えれば, 一般に非周期的なうなり振動が発生する。図 1(4)は基本調波および高調波振動の引込領域を示す。高調波引込領域内に外力を与えると, 位相面上には完全安定不動点が少なくとも一つ存在する。しかしこれらの不動点は, 分数調波振動を表わす周期群の様に, 高調波振動の次数を明示していない。この次数は不動点を通る周期解の調波成分によって定まる。尚図に見られる様に基本調波引込領域の左側の部分では異なる型の基本調波振動が発生する。すなわち曲線 ABC で囲まれる領域では 1 種類の基本調波振動しか発生しないが, 曲線 CDE および EFG で囲まれた領域内ではそれぞれ 2 種類の振動が発生する。したがってこれらの領域の重なった部分(たとえば点 C)に外力を与えれば 4 種類の基本調波振動が存在する。さらに図には分数調波的高調波振動のうち $2/2$ -調波お

よび $5/3$ - 調波引込領域を示した。これらの領域内に、たとえば $5/3$ - 調波引込領域内に外力を与えれば $5/3$ - 調波振動が発生する。この振動は位相平面上では完全安定な 3-周期群で表わされるが、この周期群で表わされる周期解は、才 5 高調波成分を顕著に含んでいる。この種の p/q - 調波引込領域 (p, q : 自然数) は図に示す以外に無数に存在するが、領域自身が狭く、かつ複雑なので省略する。

3.2 位相面解析

式(2)を一階連立形に書き直した微分方程式

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \mu(1-x^2)y - x^3 + B \cos \nu t \quad (3)$$

に前節で述べた方法を適用し、解の位相的性質を検討する。

はじめに外力の振幅 B および周波数 ν を $B = 0.2$, $\nu = 1.6$ としたとき、つまり外力を基本調波引込領域内(図1, 点a)に考えた場合を考える。このときの位相面図を図2(a)に示す。図の点 D^1 は正不安定不動点、点 S^1 および U^1 はそれぞれ完全安定および完全不安定不動点である。この完全安定な不動点 S^1 が式(2)で表わされる振動系に発生する基本調波振動を表わす。図には点 D^1 を通る不変曲線も示した。これらの曲線上の矢印は変換 T による像の移動方向を表わす。 D^1 の二本の分枝(太

線)はいずれも S^1 に終り, この曲線に囲まれた内領域が最大有界不変集合である。この場合の中心点集合は D^1 , S^1 , U^1 の三点で, いずれも周期集合である。例 2 の例は $B = 2.0$, $\nu = 5.0$ とし, 外力を $1/3$ 調波引込領域内(図 1, 点 b) に与えた場合であり, 位相面図を図 2(b) に示した。図において記号 S_i^n は完全安定 n -周期点を意味し, 添字 i ($1 \leq i \leq n$) は変換 T による像の移動順序を表わす。また完全安定 n -周期群が複数個存在するときは, それらを区別するために ω 番目の n -周期群に属す点を ${}^{\omega}S_i^n$ と前上に添字 ω を付けることにする。同様の記号を完全不安定 U , 正不安定 D および逆不安定 I 不動点や周期点にも適用する。図 2(b) の完全安定 3-周期群 S_i^3 ($i = 1, 2, 3$) は系に発生する $1/3$ -調波振動を表わす。この例においても D_i^3 ($i = 1, 2, 3$) の ω 枝(太線)が最大有界不変集合の境界を与えており, 中心点集合は不動点 U^1 および周期点 D_i^3 , S_i^3 ($i = 1, 2, 3$) の周期集合から成る。例 3 の例は $B = 2.4$, $\nu = 0.912$ とし, 外力を基本調波引込領域内(図 1, 点 c) に与えた場合であり, 位相面図は図 2(c) である。図に見る様に正不安定不動点 ${}^{\omega}D^1$ ($\omega = 1, 2, 3$) の ω 枝が平面を四つの領域に分け, 各領域は領域内部にある完全安定不動点 ${}^kS^1$ ($k = 1, 2, 3, 4$) の初期値領域となっている。このときの最大有界不変集合は不動点 ${}^{\omega}D^1$ ($\omega = 1,$

2, 3)の α 枝と全ての不動点からなる。中心点集合は ${}^k D^1$ ($k = 1, 2, 3$)および ${}^k S^1$ ($k = 1, 2, 3, 4$)計7個の不動点からなる。最後に外力を引込領域外に与えた場合を考える。図2(d)は $B = 1.0$, $\nu = 4.0$ (図1, 点d)に対する位相面図を示す。完全不安定不動点 u^* を囲む完全安定な不変閉曲線 C が存在し, これが振動系に発生するうなり振動を表わしている。この不変閉曲線 C 上の変換 T の回転数は約0.4であり, これが有理数か無理数かは計算機の解析結果から判定出来ないが, 無理数であると考へればこの不変閉曲線に対応する解は概周期解となる。不変閉曲線 C で囲まれた閉領域が最大有界不変集合であり, 中心点集合は不動点 u^* の周期集合と不変閉曲線 C の調和集合から成る。

以上に挙げた数値例では, 中心点集合は周期集合や調和集合から成り, いずれも比較的簡単な形状をしているが, 外力によつてはこれらの集合が複数个合併して中心点集合を形成する場合がある。

3.3 うなり振動の解析

前節の終りに挙げた最後の例は, 外力を引込領域外に与えた場合のうなり振動に関するものであったが, 外力の振巾が比較的小さい場合で, そのうなり振動は概周期振動として知られるものであった。しかし外力の振巾をこの例における値

より幾分大きく与えれば概周期振動か否かも明らかでない非
 周期振動の発生あることがある。つぎにこの様な振動につい
 て考えよう。

図3(a)は $B = 17$, $\nu = 4$ (図1, 点e) とした場合に, 変
 換 T により位相面上を移動して行く像の様を計算機により
 求めたものである。点に付けた番号は像が現れる順序を示し
 たものであり, 過渡状態が終りほぼ定常状態に達したと考え
 られる時点から数えたものである。図に見る様に像の運動は
 複雑であり, これらが前節最後の例の様に単一な不変曲線を
 描くとは考えられない。図3(b)はこの場合の位相面図である。
 完全不安定不動点 u^* の周囲に正不安定2周期群と, 逆不安定
 2周期群がいずれも2つずつ存在する。図には正および逆不
 安定2周期点のみ枝(太線)と ω 枝(細線)の概形をそれぞれ
 実線および点線で描いた。これらの ω 枝と ω 枝は互に交わ
 り, 二重漸近点, すなわちホモクリニク点およびヘテロク
 リニク点を無数に作っている。ホモクリニク点の近傍に
 は無数に周期点の存在することが知られており, それらのう
 ちのいくらかは計算機で求めることも出来るが図には示して
 いない。この場合の最大有界不変集合の形状は複雑であり,
 その詳細はまだ明らかでない。中心点集合についても同様で
 ある。この集合を分解すれば上に述べたことから無数の周期

集合を含まないが、これらの次数や個数も明らかでない。さらに中心点集合が周期集合以外に、調和集合、極小集合、準極小集合を含まないのか否か、含むとすればこれらの個数や性質に関する問題が生じるがこれらの何れも未解決である。

つぎに外力を $B = 1.20$, $\nu = 0.95$ (図2, 点f) とした場合を考える。このときの変換 T による点列の一例を図4(a)に、位相面図を図4(b)に描いた。完全不安定不動点 P^1 と完全不安定3周期点 U_i^3 ($i = 1, 2, 3$) が存在し、正不安定3周期点の α 枝 (太線) と ω 枝 (細線) がこれらの完全不安定点の周りに二重漸近点を作っている。この例ではホモクリニック点のみでヘテロクリニック点は存在しない。この場合も最大有界不変集合や中心点集合は明らかでない。

最後の例として外力を $B = 1.8$, $\nu = 0.6$ とした場合 (図2, 点g) を考える。このとき点列の一例を図5(a)に、位相面図を図5(b), (c), (d) に描いた。図5(b) は正不安定不動点 D^1 および逆不安定不動点 ${}^1I^1$, ${}^2I^1$ とこれらの α 枝 (太線) および ω 枝 (細線), つまり変換 T に関する不動点および不変曲線を描いたものである。不変曲線の実線と点線の区別は前と同じである。図5(c) および (d) はそれぞれ変換 T^2 および T^3 に関する不動点および不変曲線を描いた。この例が前の二例と異なる点は完全不安定な不動点や周期点が存在しないこと

である。

おまげ

本論文は二階非線形常微分方程式を変換理論を用いて解析したものである。考察の対象とした方程式(2)は半導体などの負性抵抗素子を含む発振回路に正弦波電圧を加えた場合に発生する振動現象を記述したものである。変換理論によれば微分方程式の解は位相面上の点列で表わされ、特に微分方程式の定常解は中心点集合で表わされる。方程式(3)を計算機を用いて解析し、位相面上の中心点集合の形状を調べた。その結果、方程式(2)で記述される振動系の周期振動は中心点集合内の周期集合で表わされるが、うしろ振動には調和集合で表わされる概周期振動と、中心点集合の構造や性質もまだ明らかにされていない複雑な振動の二種類が存在することを数値例を挙げて示した。後者の型の振動現象の解明は今後の検討に待たねばならない。

ここに改めて問題点を整理しよう。まず第一に第3.3節に挙げた諸例の様な完全安定な不動点、周期点や不変閉曲線を持たない系の中心点集合と、その構造および性質の解明が要求される。つぎに、たとえこの様な場合の中心点集合が明らかにされたとしても、この集合が物理系に観察される定常振

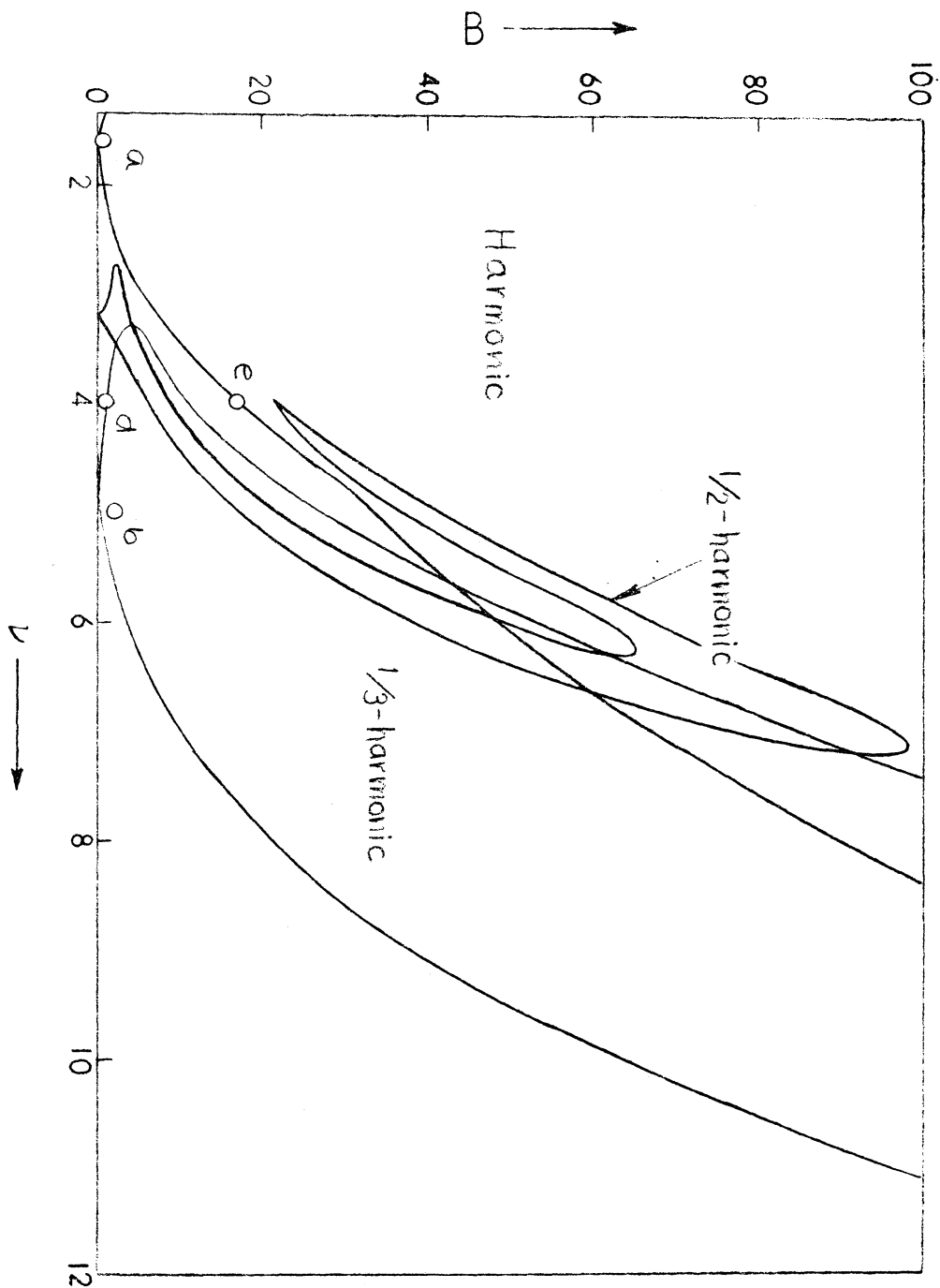
動を表わすためには安定でなければならぬ。つまり定常振動を表わす極小集合の安定性が問題となる。しかし現象を計算機によって観察したところでは、中心点集合を構成している各々の極小集合は全て不安定で、定常状態は振動系の微小変動や外乱の影響により、これらの極小集合の近傍を不規則に動き回っている様に思われる。

文 献

- (1) 林, 上田, 赤松, 板倉: “周期的外力を加えた自励振動系の動作”, 電子通信学会論文誌(A), 53-A, 150 - 158 (昭45-3).
- (2) N. Levinson: “Transformation theory of non-linear differential equations of the second order”, *Ann. Math.*, 45, p. 723 (1944).
- (3) G. D. Birkhoff and P. A. Smith: “Structure analysis of surface transformations”, *J. Math.*, 9-7, 345-379 (1928).
- (4) В. В. Немыцкий: “Топологические вопросы теории динамических систем”, *Успехи Математических Наук (Н.С)* 4, 6(34), 91-153 (1949); English translation, *Topological problems of the theory of dynamical systems*, 414-497

in "Stability and Dynamic Systems", American Mathematical Society, Translation series one, Vol. 5, Providence, Rhode Island, 1962.

- (5) H. Poincaré: "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste", vol. 3, Gauthier - Villars, Paris, 1899.
- (6) G. D. Birkhoff: "On the periodic motions of dynamical systems", Acta Math., 50, 359-379 (1927).
- (7) G. D. Birkhoff: "Surface transformations and their dynamical applications", Acta Math., 43, 1-119 (1920).
- (8) V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov: "Qualitative theory of differential equations", Princeton University Press, Princeton, 1960.



カ1図 式(2)で表わされる強制自励振動系の周波数引込領域
 (a) 基本調波および1/3分調波引込領域

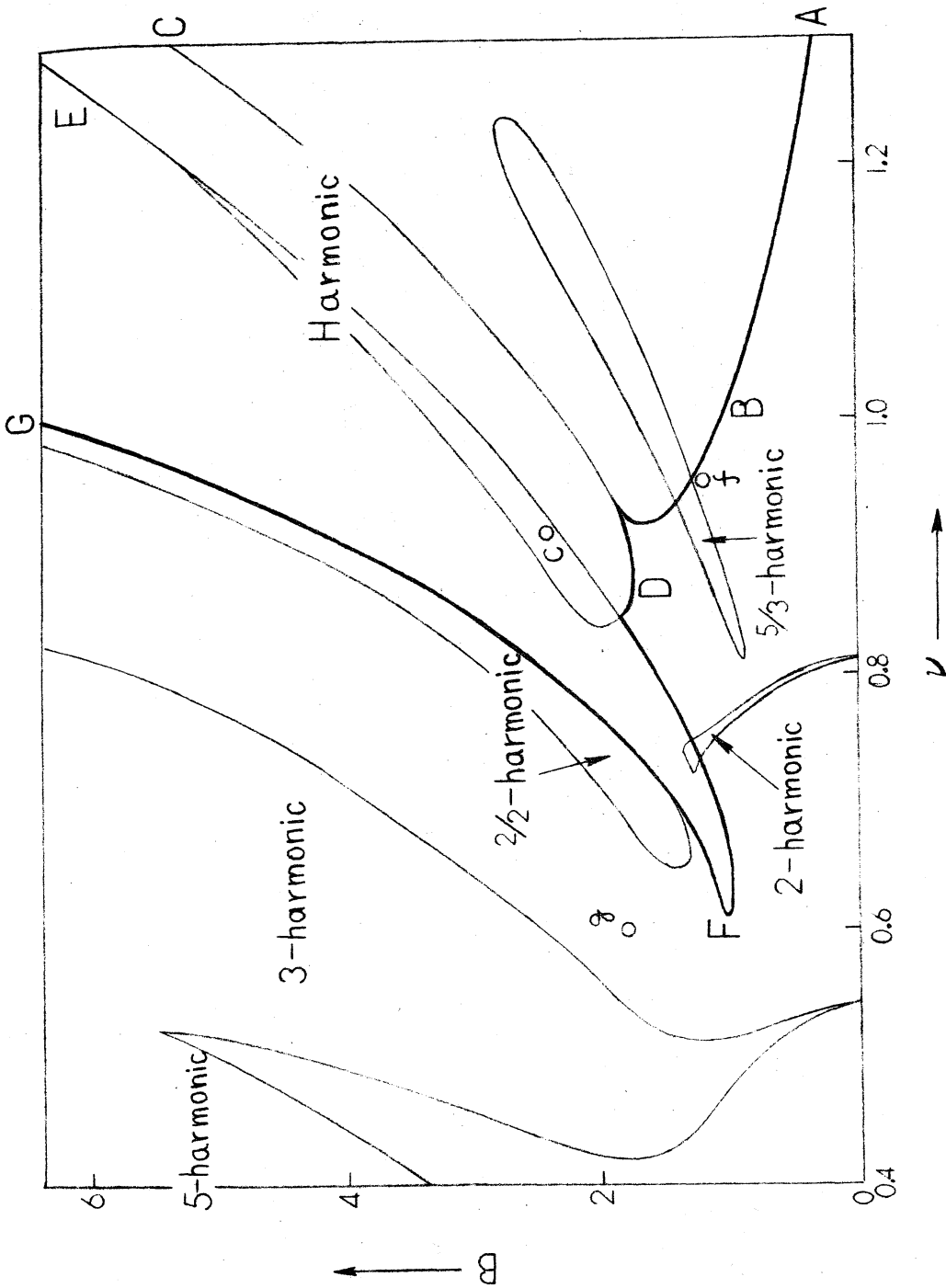
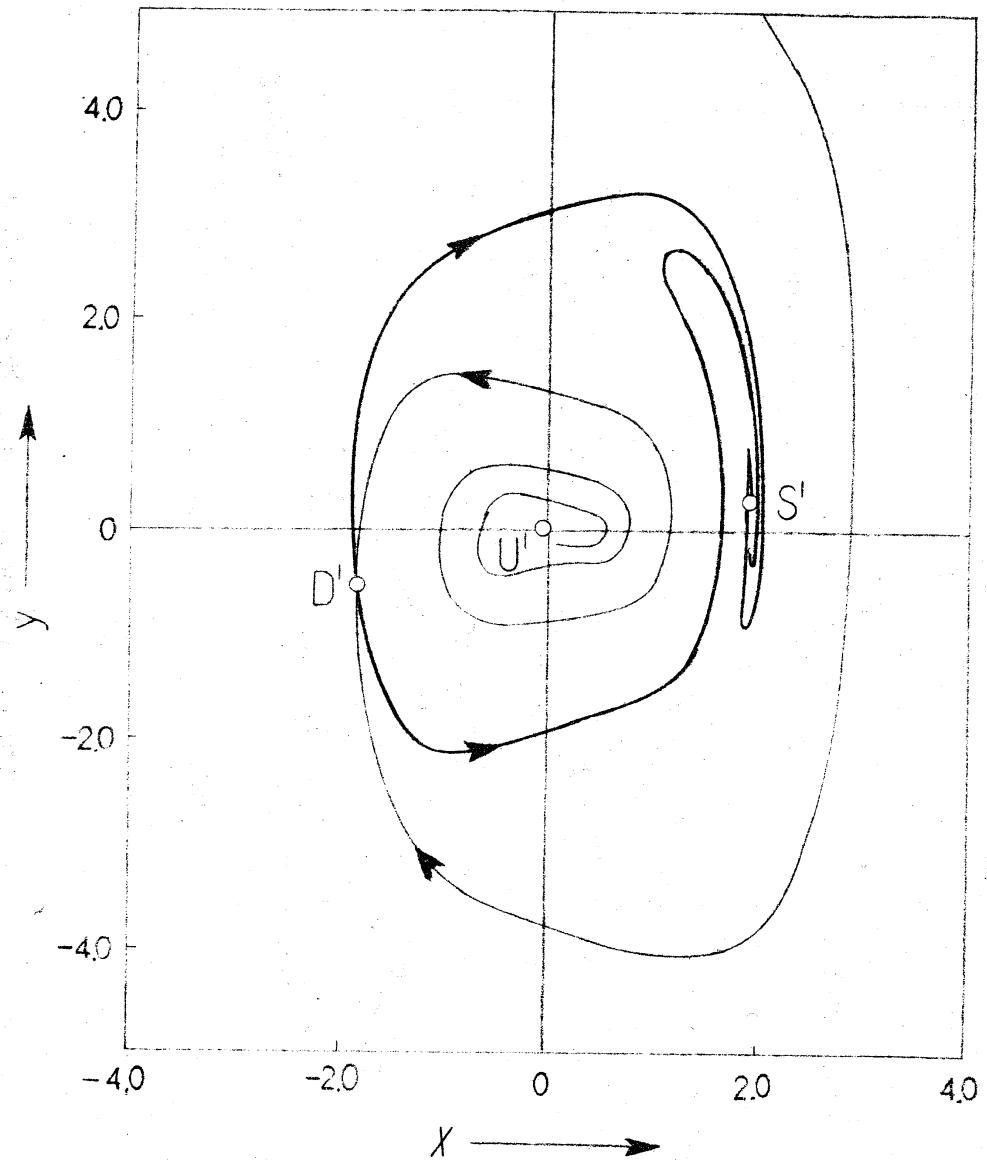


表1 図 式(2)で表わされる強制自励振動系の周波数引込領域
 (も) 基本調波および高調波引込領域



オ2図 種々の B , ν に対する方程式 (3) の位相面図
 . (a) $B = 0.2$, $\nu = 1.6$ の場合

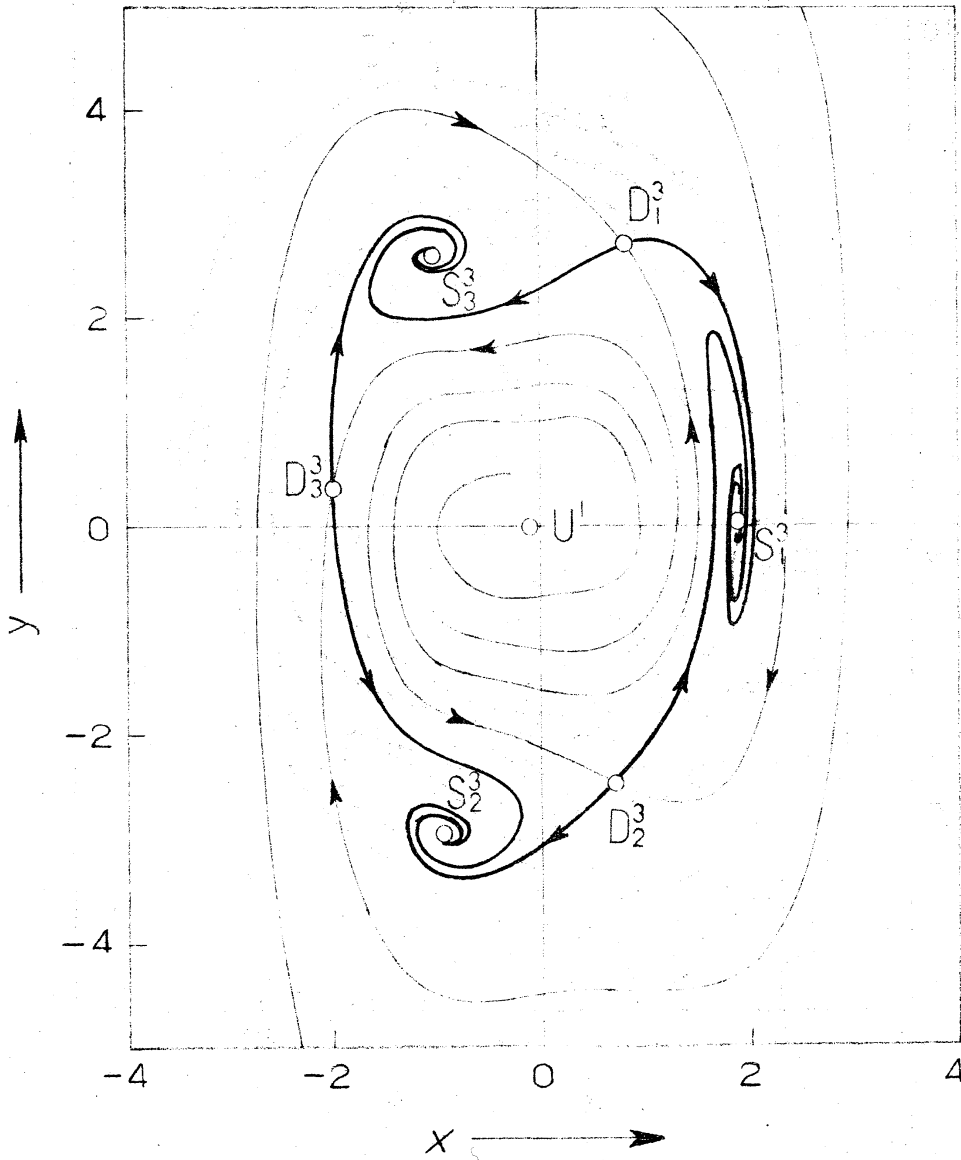
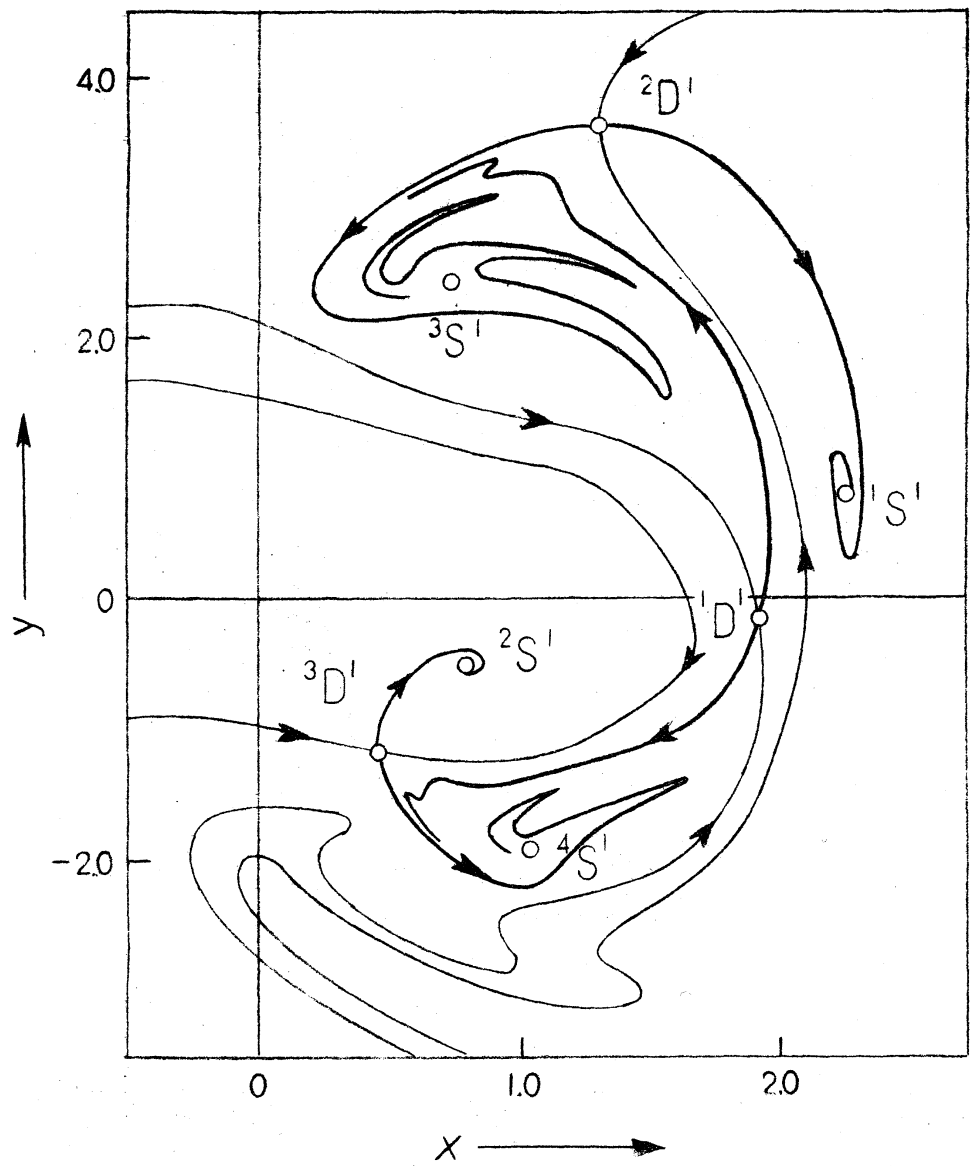
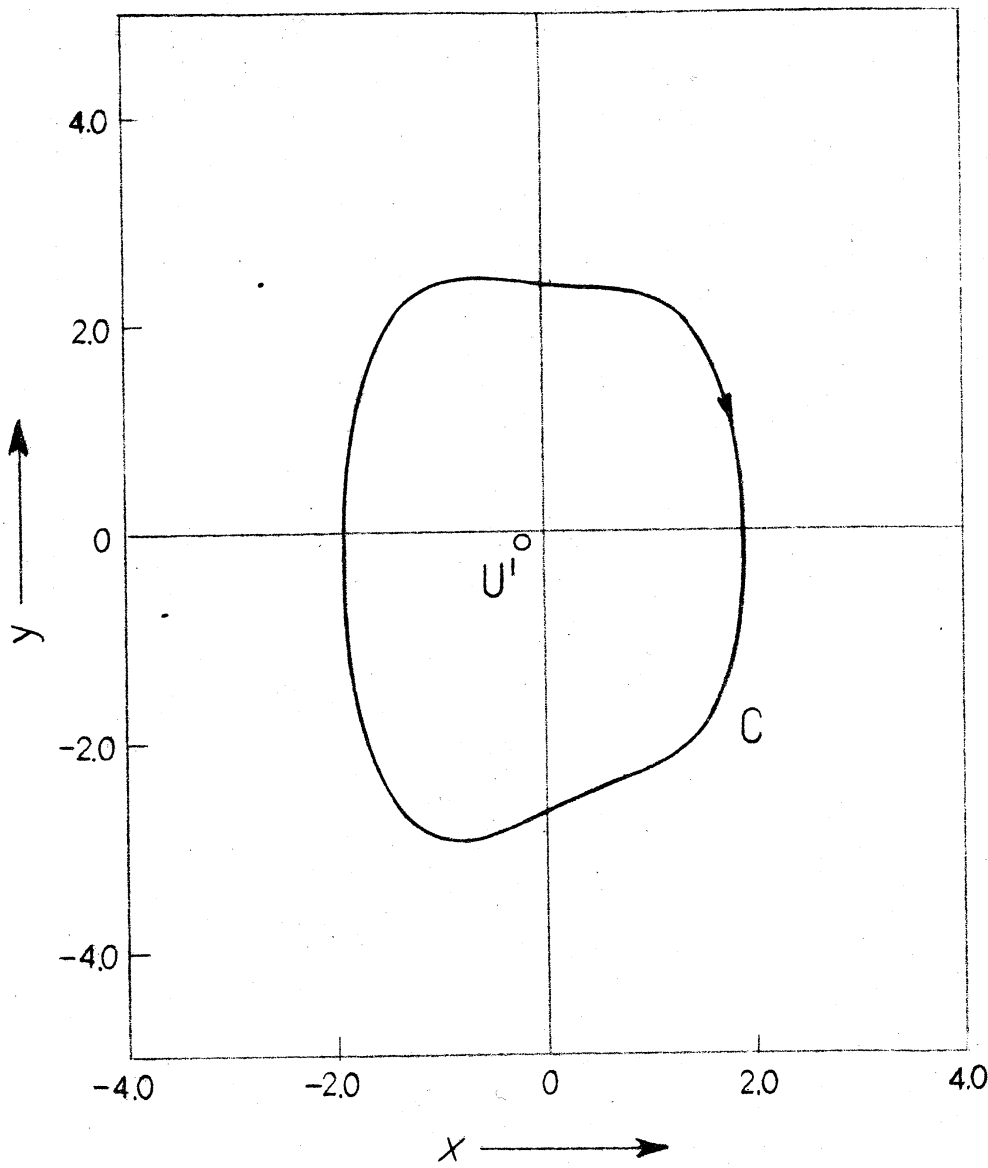


表2図 種々の B, ν に対する方程式(3)の位相面図
 (b) $B = 2.0, \nu = 5.0$ の場合



カ2図 種々の B , ν に対する方程式(3)の位相面図
 (C) $B = 2.4$, $\nu = 0.912$ の場合



才2図 種々の B , ν に対する方程式(3)の位相面図
 (d) $B=1.0$, $\nu=4.0$ の場合

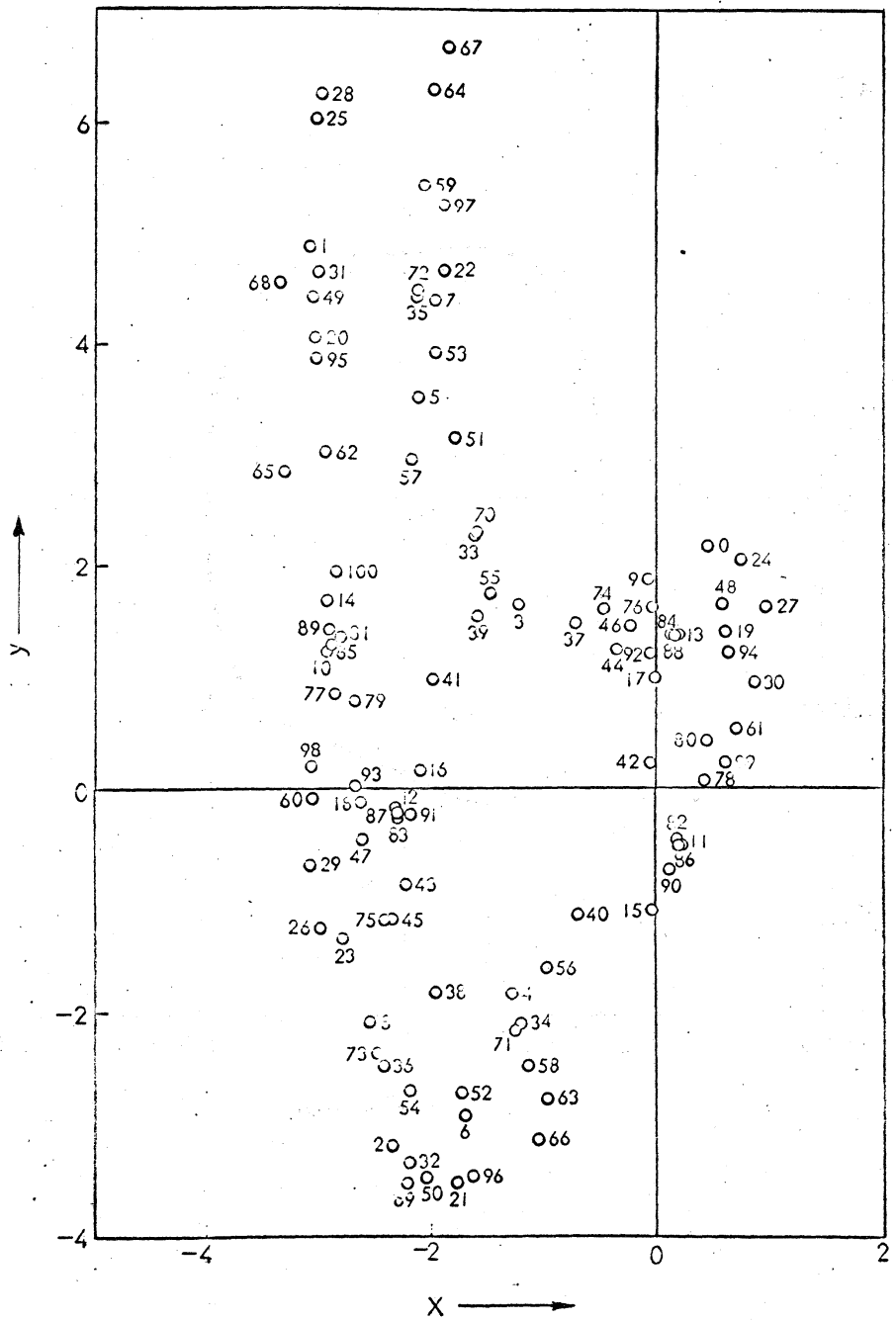
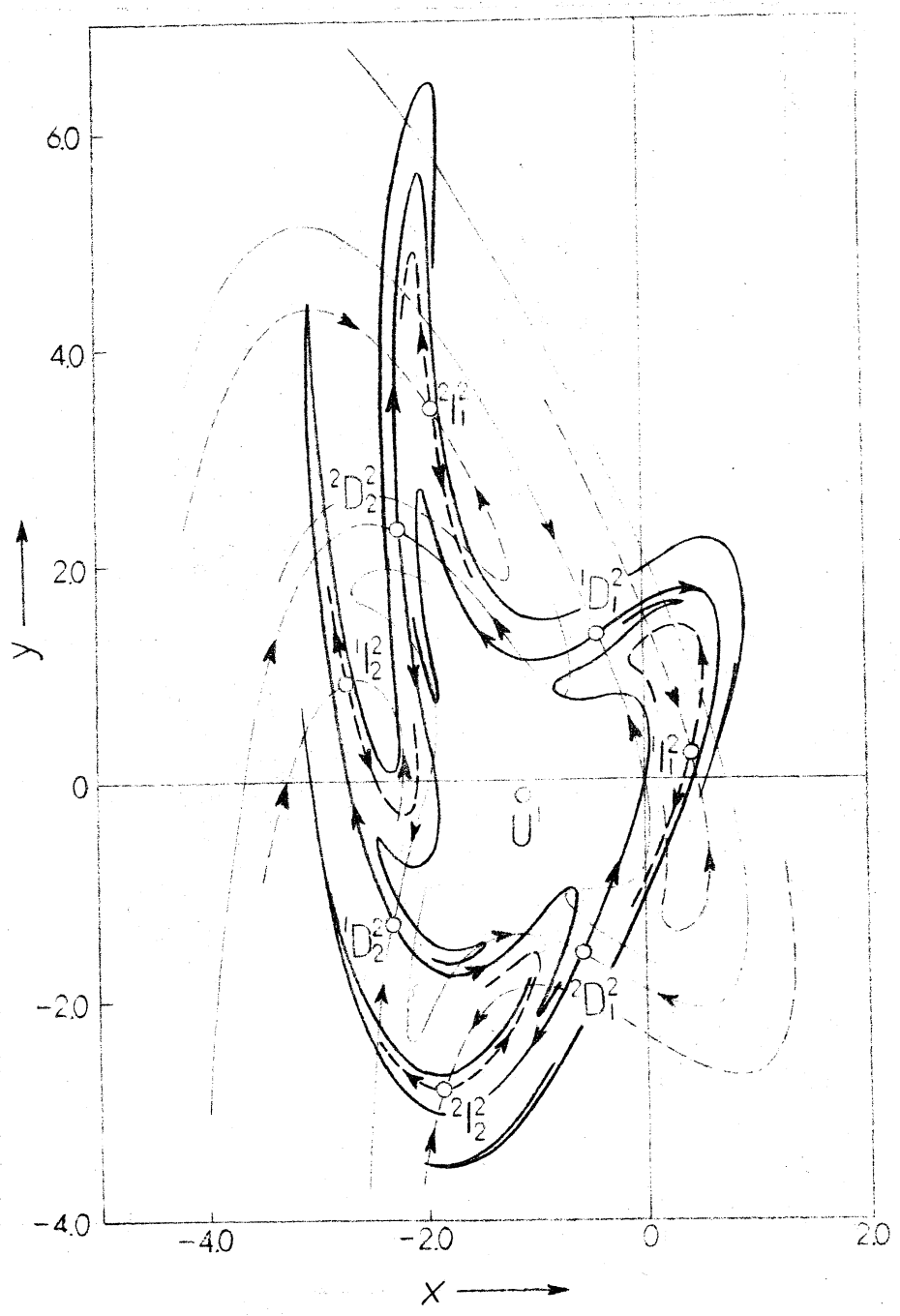
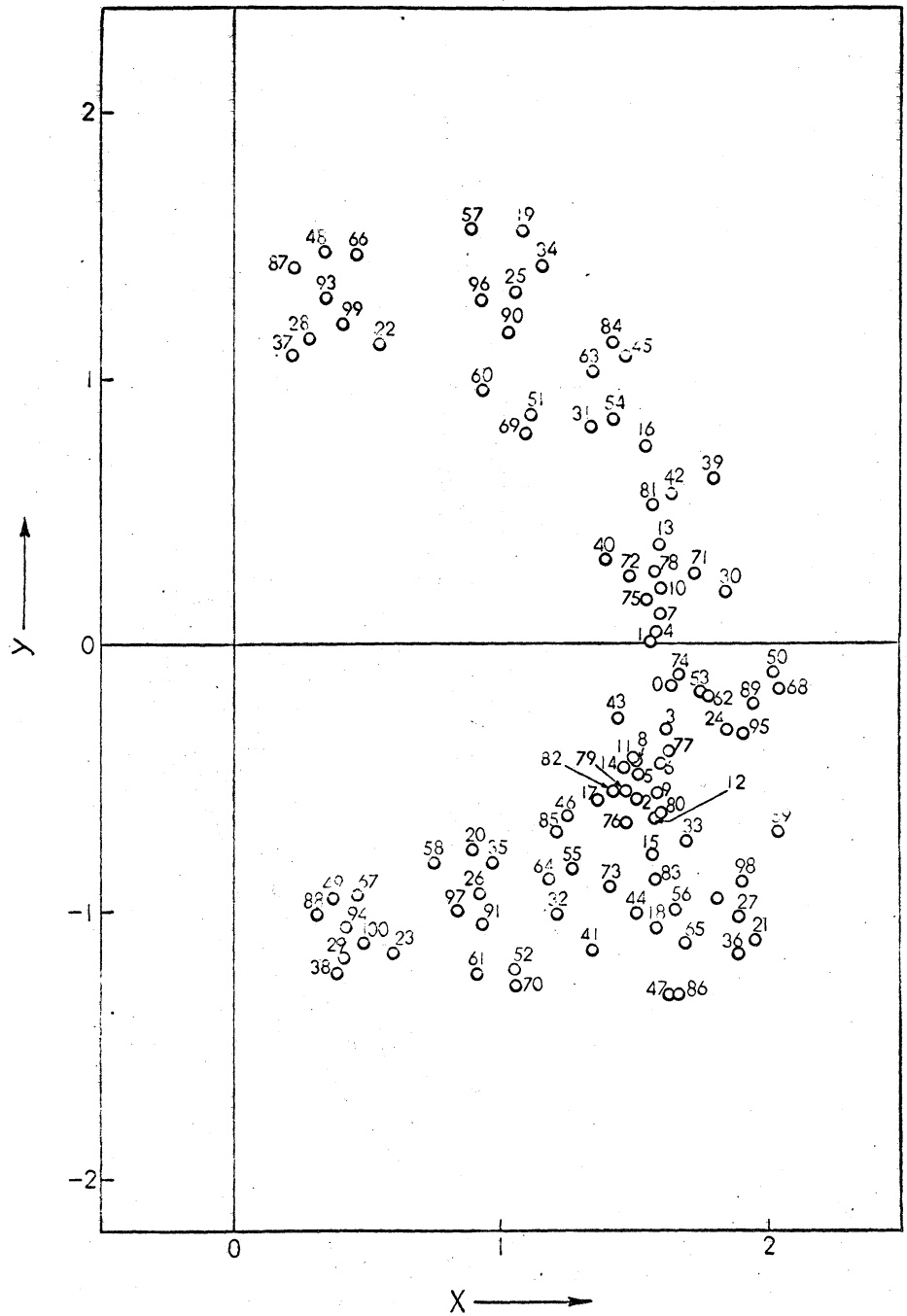


表3 図 $B=17, \nu=4$ とした方程式(3)の位相面図

(a) うなり振動を表す軌列の一例

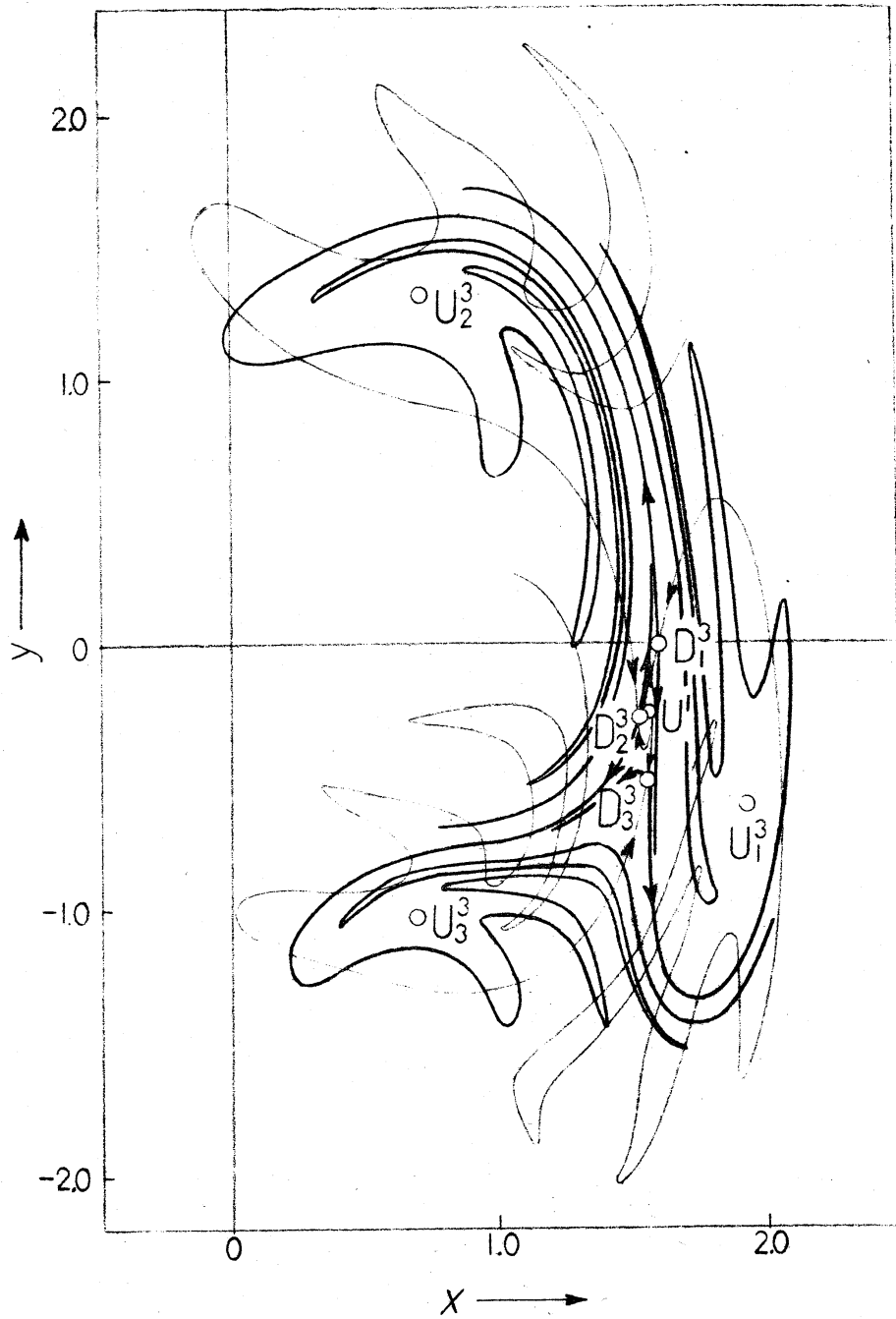


オ3図 $B = 1.7$, $\nu = 4$ とした方程式(3)の位相面図
 (セ) 不動点, 周期点および不変曲線

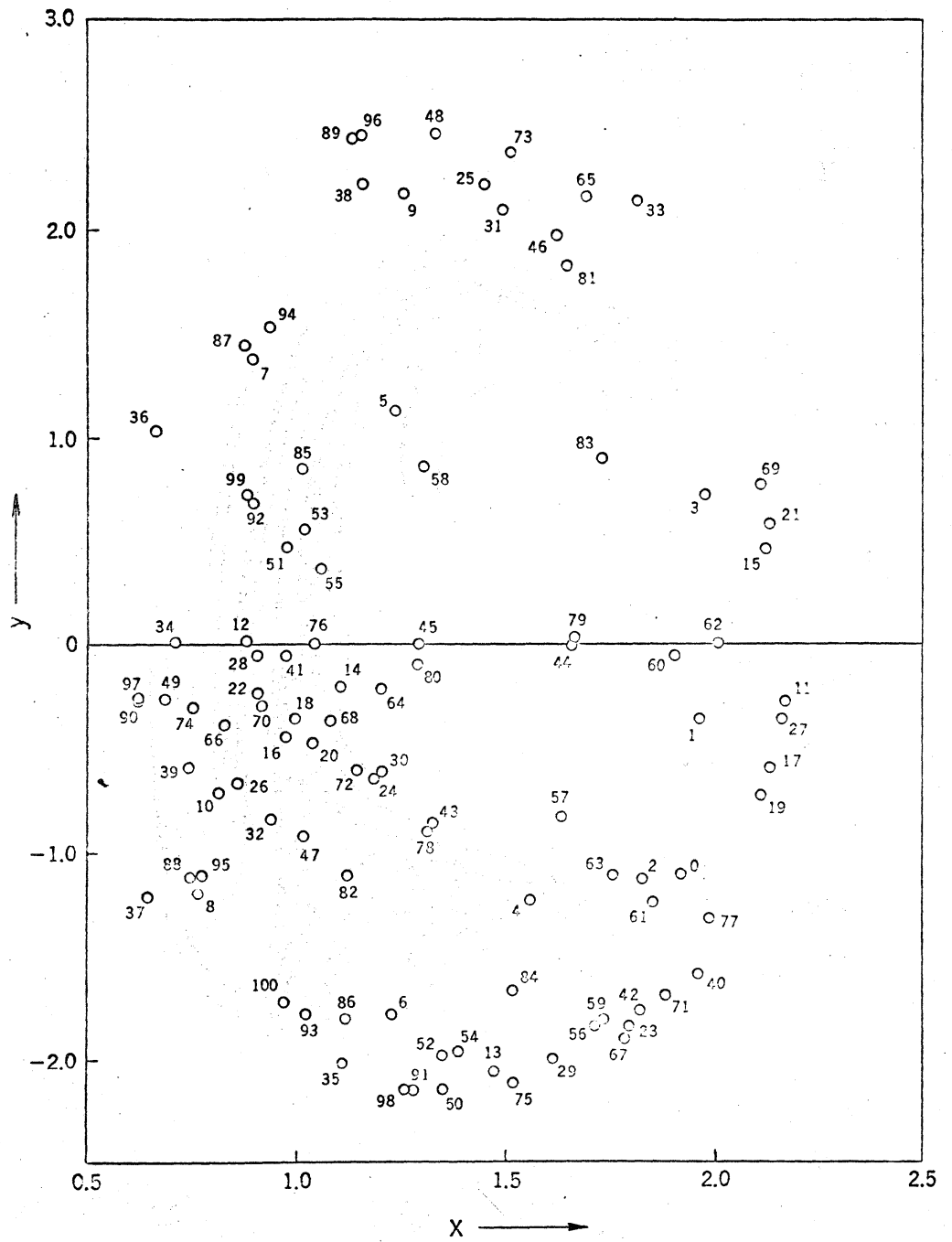


オ4図 $B=1.2$, $V=0.95$ とした方程式(3)の位相面図

(a) うなり振動を表わす点列の一例

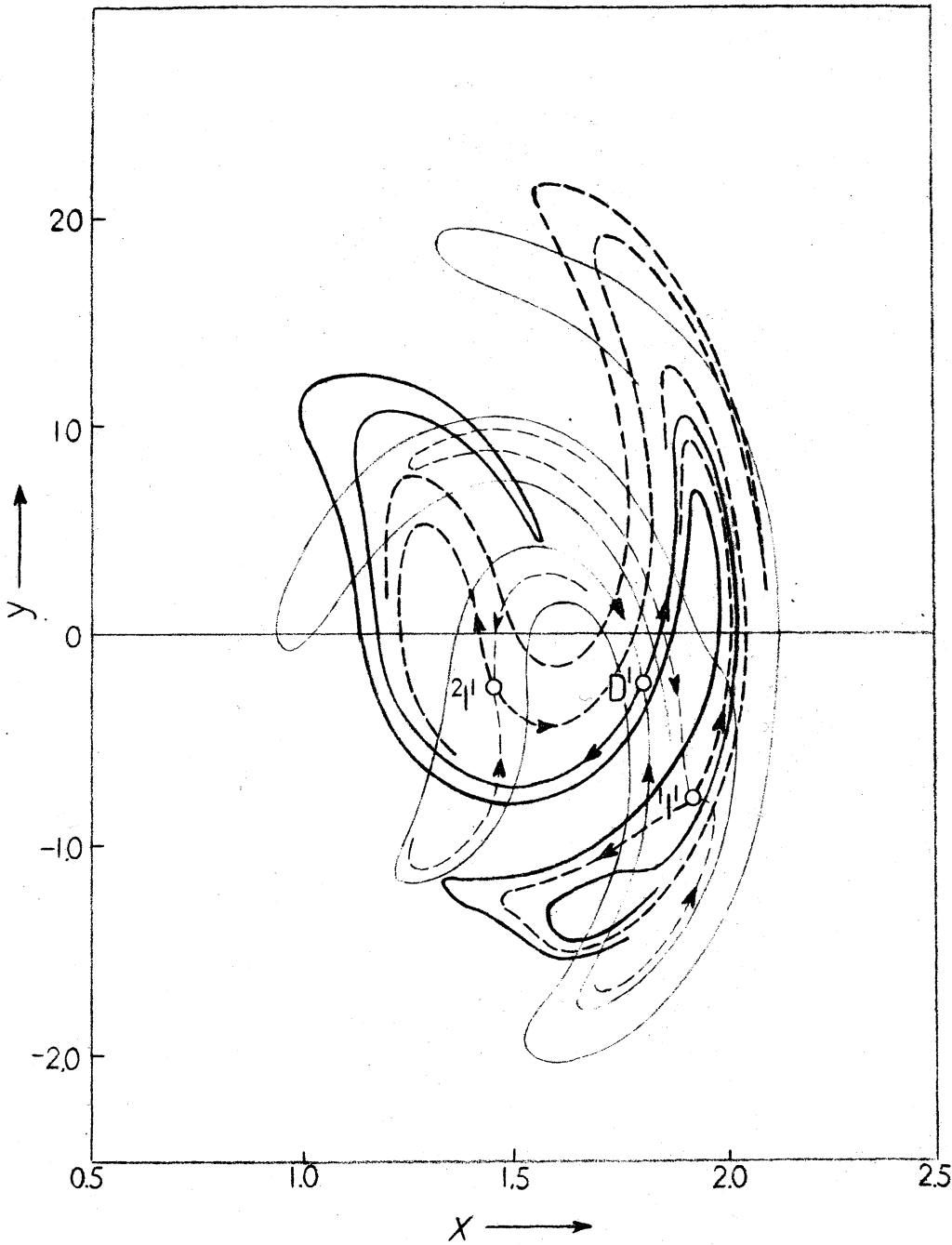


カ4図 $B=1.2$, $\nu=0.95$ とした方程式(3)の位相面図
 (七) 不動点, 周期点および不変曲線

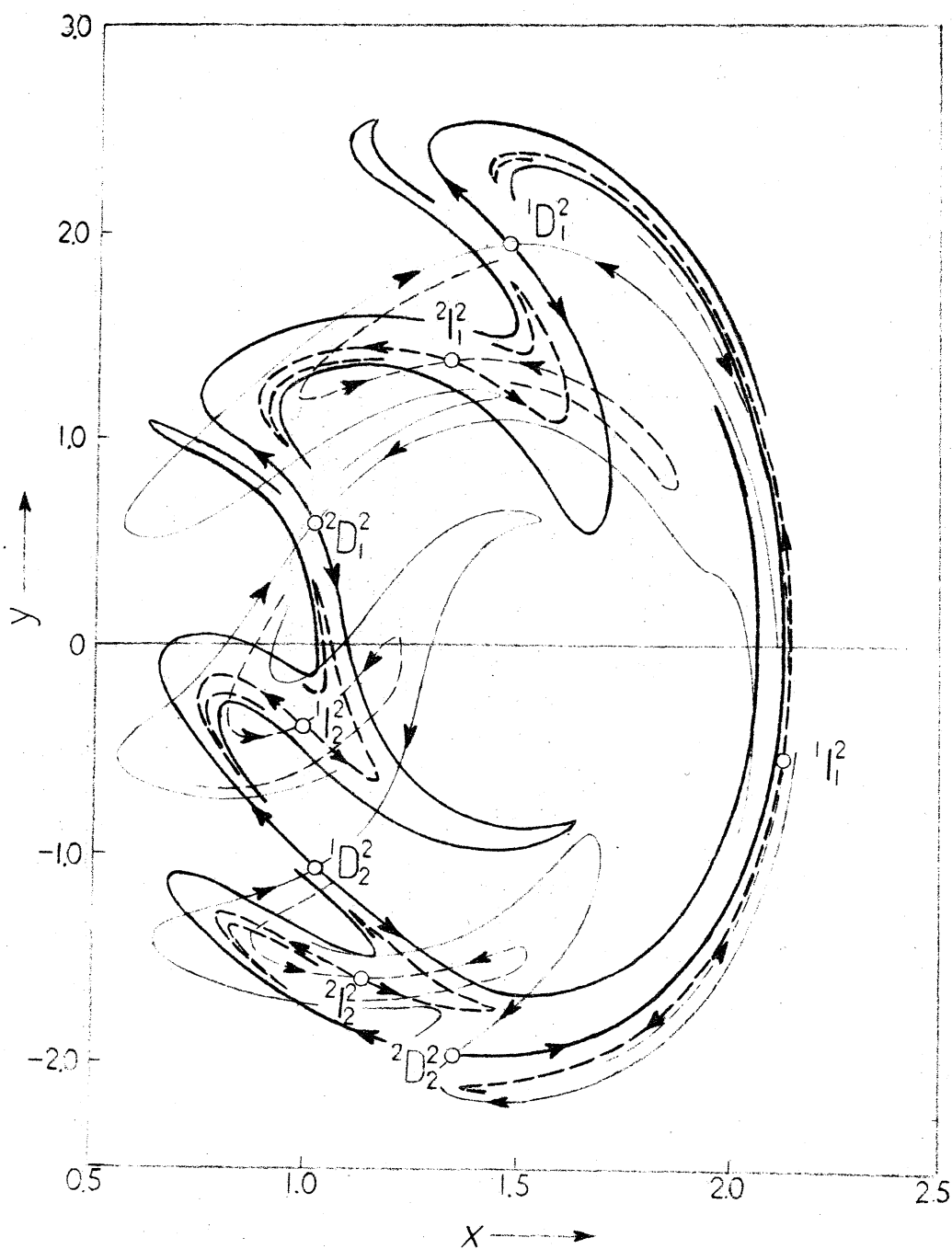


から図 $B=1.8, \nu=0.6$ とし方程式(3)の位相面図

(入) うなり振動を表わす点列の一例



第5図 $B = 1.8$, $\nu = 0.6$ とした方程式(3)の位相面図
 (七) 変換Tに関する不動点および不変曲線



オ 5 図 $B = 1.8$, $\nu = 0.6$ とした方程式 (3) の位相面図
 (C) 変換 T^2 に関する不動点および不変曲線

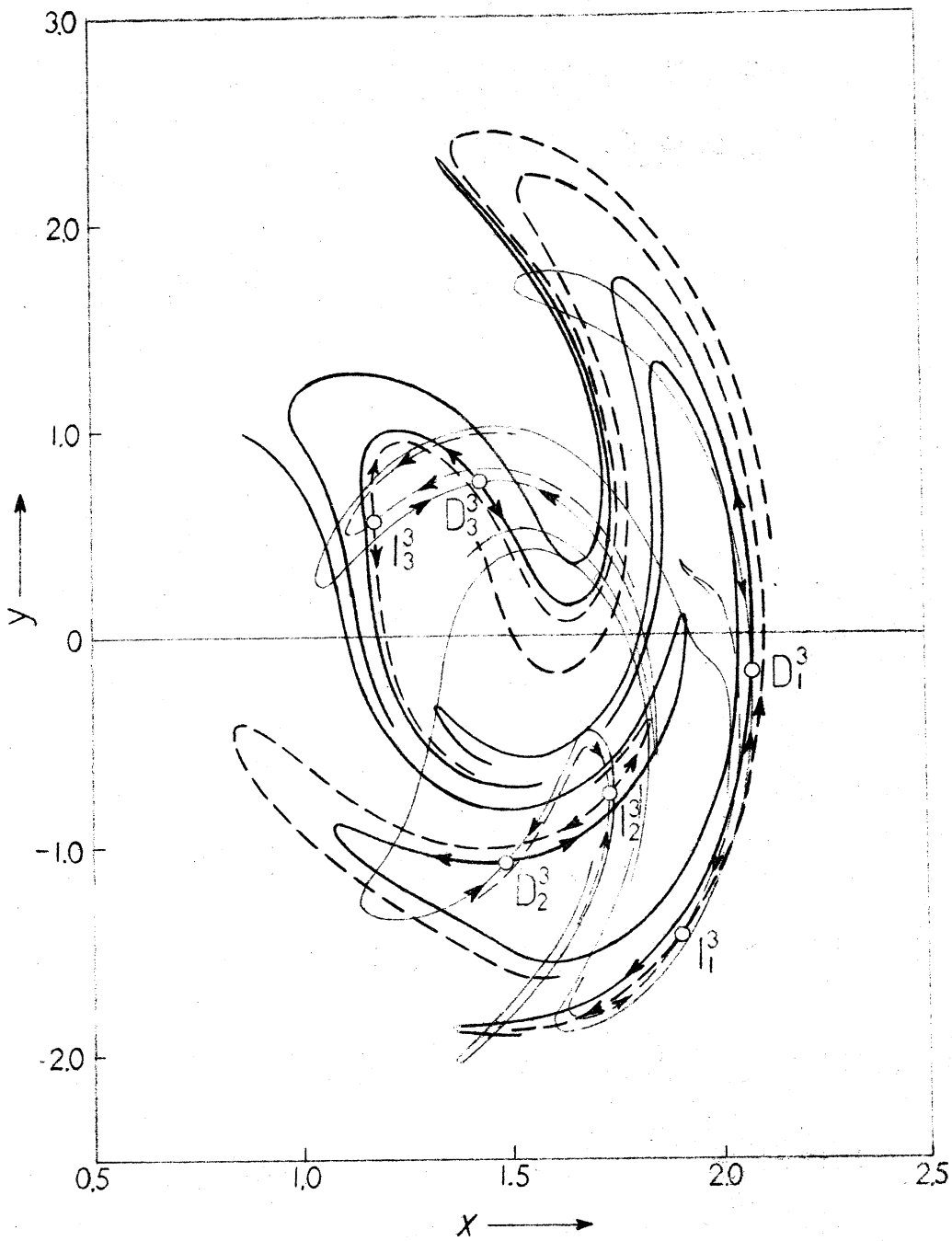


表5図 $B = 1.8$, $\nu = 0.6$ とし、方程式(3)の位相面図
 (d) 変換 T^3 に関する不動点および不変曲線