数理解析研究所講究録
第113巻 1971年 91-95

Cauchyの折れ線法について

神大 理　菊池 紀夫

福原[F. E. 14(1961)]は Cauchy の折れ線法を用いて，二階放物型偏微分方程式の初期，境界値問題の解を構成した。この方法は楕円型方程式の解(があるとして)からなる空間の compact 性に注目し，Cauchy の折れ線の分点における値をこの空間の中に構成し，正規族の考えを用いて解を求めるというものである。空間変数1次元の場合が解説されているが，ここでは3次元の場合でも同じように出来ることを注意したい。

Ω は R^3 の有界な領域とし

$$\Omega_{-\delta} = \{ x \in \Omega ;\ dist(x, \partial\Omega) > \delta \}$$

とするとき

$$\Omega = \{ x ;\ dist(x, \Omega_{-\delta}) < \delta \}$$

が十分小さな任意の正数 δ に対してなりたつものとする。さらに，その境界 $\partial\Omega$ は C^2 に属するものとする。$\bar{\Omega}$ で

連続な実数値関数の集合を $C(\bar{\Omega})$ とし，$C(\bar{\Omega}) \ni u(x)$ に対し，$\|u\|$ は

$$\|u\| = \max\{|u(x)|;\ x \in \bar{\Omega}\}$$

とあらわすものとする。

$$\Delta f(x) \in C(\bar{\Omega}),\quad f(x)\big|_{\partial\Omega} = 0$$

のとき，放物型方程式

$$\partial u(t,x)/\partial t = \Delta u(t,x) + f(x)$$

$$u(t,x)\big|_{t=0} = 0,\quad u(t,x)\big|_{\partial\Omega} = 0$$

と $(t,x) \in [0,T]\times\Omega$ の範囲でみたす $u(t,x)$ を求める初期，境界値問題を考える。$[0,T]$ を N 等分して

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T,\quad h = T/N$$

とする。$u_0 = 0 \in C(\bar{\Omega})$ とし，$u_{n-1} \in C(\bar{\Omega})$ が求まったとき，u_n は

$$h\Delta u_n = u_n - u_{n-1} - hf$$

$$u_n\big|_{\partial\Omega} = 0$$

によって求める。(t_n, u_n)，$n = 0, 1, \cdots, N$，を結んでできる折れ線を $\varphi_N(t)$ とする。すなわち，

$$\varphi_N(t) = \frac{t - t_{n-1}}{h} u_n + \frac{t_n - t}{h} u_{n-1},\quad t \in [t_{n-1}, t_n]$$

とおく。$\{u_n\}$ の作り方から

$$\|\Delta u_n\| \leqq nhB \leqq TB,\quad B = \|\Delta f\|$$

がなりたつ。 他方，$\partial\Omega \in C^2$ のときには，Δ の Green 関数 $G(x, y)$ について，つぎの評価

$$|G(x,y)-G(x',y)| \leqq C|x-x'|/min(|x-y|, |x'-y|),$$

$$|\partial G(x,y)/\partial x| \leqq C/|x-y|^2$$

のなりたつことが知られている。 等式

$$u_n(x) = \int_\Omega G(x, y)\Delta u_n(y)\,dy$$

と，上の評価を用いると

$$|u_n(x_1)-u_n(x_2)| \leqq C|x_1-x_2|$$

となり，$\{u_n\}$ は $C(\bar\Omega)$ の compact 集合に属することがわかる。 他方，

$$D_t^+\varphi_N(t) = \frac{u_n-u_{n-1}}{h} = \Delta u_n + f, \quad t \in [t_{n-1}, t_n)$$

であり，

$$\|D_t^+\varphi_N(t)\| \leqq TB + \|f\|$$

となる。 すなわち，$\{\varphi_N(t)\}$ は t に関して同程度連続となるから，$N\to\infty$ のとき，$\{\varphi_N(t)\}$ はある $\varphi(t)\in C(\bar\Omega)$ に $C(\bar\Omega)$ で一様収束していると仮定できる。

また，e を R^3 の任意の単位ベクトルとし，十分小さな正数 δ に対し

$$\delta u(x) = u(x+\delta e) - u(x)$$

とおく。 このとき，

$$h\|\delta\Delta u_n\| \leqq \max\{h\|\delta(\Delta u_{n-1}+h\Delta b)\|,\ h\|\delta b\| + \sup_{x\in\partial\Omega_{-\delta}}|u_n(x+\delta e)-u_{n-1}(x+\delta e)-u_n(x)+u_{n-1}(x)|\}$$

がなりたち，

$$|u_n(x+\delta e)-u_{n-1}(x+\delta e)-u_n(x)+u_{n-1}(x)|$$
$$=|\int_\Omega (G(x+\delta e, y)-G(x,y))(\Delta u_n(y)-\Delta u_{n-1}(y))dy|$$
$$\leqq Ch\delta$$

であるから

$$\|\delta\Delta u_n\| \leqq \|\delta\Delta u_{n-1}\| + h\|\delta\Delta b\| + C\delta + \|\delta b\|$$
$$\leqq T\|\delta\Delta b\| + C\delta + \|\delta b\|$$

となり，$\delta\to 0$ のとき，x と n に独立に

$$\delta\Delta u_n \longrightarrow 0$$

となる。したがって，

$$D_t^+\varphi_N(t)\ (=\Delta u_n + b,\quad t\in[t_{n-1}, t_n))$$

は $C(\bar{\Omega})$ の compact 集合に属す。他方，

$$t\in[t_{n-1}, t_n),\quad t+\delta\in[t_{m-1}, t_m)$$

のとき，

$$\|D_t^+\varphi_N(t+\delta)-D_t^+\varphi_N(t)\| = \|\Delta u_m - \Delta u_n\|$$
$$\leqq (m-n)hB \leqq (\delta+2h)B$$

となり，$\{D_t^+\varphi_N(t)\}$ は t に関して同程度連続となる。したがって，$N\to\infty$ のとき，$C(\bar{\Omega})$ で一様に

$$D_t^+ \varphi_N(t) \longrightarrow D_t \varphi(t)$$

と仮定することができる。

作り方から，$t \in (t_{n-1}, t_n)$ においては

$$\| D_t^+ \varphi_N(t) - (\Delta u_{n-1} + f) \| = \| \Delta u_n - \Delta u_{n-1} \| \leqq h B$$

であり，Δ が $C(\overline{\Omega})$ で閉作用素であることに注意すれば，$N \to \infty$ のとき

$$D_t \varphi(t) = \Delta \varphi(t) + f$$

$$\varphi(0) = 0$$

となる。作り方から，$\varphi(t)$ は $\partial\Omega$ で 0 となる x の連続関数である。