数理解析研究所講究録
第 113 巻 1971 年 96-112

函数微分方程式における
微分不等式

東北大 理学部　加藤順二

常微分方程式論における重要な基本定理の一つは比較定理である.

<u>定理 A</u>. $x(t)$ を実数値をとる連続的微分可能な函数として、連続な函数 $f(t,x)$ に対して区間 $[a,b]$ 上で

$$\dot{x}(t) \leqq f(t, x(t))$$

を満たしているものと仮定する. このとき $u(t)$ を

$$\dot{u} = f(t, u)$$

の $(a, u(a))$, $u(a) \geqq x(a)$, を通る最大解とすれば、$u(t)$ が存在する限り、$[a,b]$ 上で

$$x(t) \leqq u(t)$$

が成り立っている.

函数微分方程式

(1) $$\dot{u}(t) = f(t, u_t)$$

を考える．ここで，$u_t(\theta) = u(t+\theta)$ は $[-h, 0]$ ($h>0$) 上の連続な函数の族 $C([-h,0], R)$ の要素で，$f(t,\varphi)$ は $[0,\infty)\times C([-h,0], R)$ 上で定義された完全連続な函数とする．今後において，$x(t) \in C([a-h, b], R)$ が更に $[a,b]$ 上で連続的微分可能であって

$$\dot{x}(t) \left\{ \begin{array}{c} \leqq \\ < \\ \geqq \\ > \end{array} \right\} f(t, x_t)$$

をみたしているとき，$x(t)$ を方程式 (1) の $[a,b]$ における

$$\left. \begin{array}{l} \text{sub-} \\ \text{st.(= strict) sub-} \\ \text{sup-} \\ \text{st. sup-} \end{array} \right\} \text{sol.}$$

と呼ぶことにする．更に，$\varphi, \psi \in C([-h,0], R)$ が

$$\varphi(\theta) \leqq \psi(\theta) \quad (\theta \in [-h, 0])$$

をみたしているとき，これを

$$\varphi \prec \psi$$

によって表わそう．このとき，定理 A と類似な表現が (1) の sub-sol. $x(t)$ に対して，条件 $u(a) \geqq x(a)$ を $u_a \succ x_a$ でおきかえて述べられる．しかしながらこれは一般的には正しくない

その理由としては2つのものが上げられる．

(i)　一般に，最大解は存在しない．

(ii)　解の一意性を仮定したとしても，2つの解 $u^1(t)$，$u^2(t)$ に対して，条件 $u^1{}_a < u^2{}_a$ が必らずしも $u^1(t) \leqq u^2(t)$ $(t \geqq a)$ を導かない．

例としては，(i) に対しては方程式

$$\dot{u}(t) = -2\{1 + u(t-1)\}\sqrt{|u(t)|}$$

の $u_0 \equiv 0$ を通る解を考えればよい．通常の意味の最大解が存在しないことがわかる．(ii) に対しては方程式

$$\dot{u}(t) = -u(t-1)$$

の $u^1{}_0 \equiv 0$，$u^2{}_0(\theta) = \theta$ $(\theta \in [-h, 0])$ を初期条件とする2つの解 $u^1(t)$，$u^2(t)$ を考えればよい．

従って，定理Aを函数微分方程式 (1) に一般化するためには，$f(t, \varphi)$ に対してある条件を仮定しなければならない．そして，明らかに，その条件は上の (i)，(ii) が起り得ないことの保証を与えるものとなっていなくてはならない．

その条件を述べるまえに，まず，次の補題を述べる．

補題．函数微分方程式 (1) および

(2)
$$\dot{u}(t) = g(t, u_t)$$

において，$g(t, \varphi)$ は $[0, \infty) \times C([-h, 0], R)$ で定義され完全連続で

$f(t,\varphi)$ に対して条件

(C_0) $\varphi \prec \psi$, $\varphi(0)=\psi(0)$ をみたす任意な $\varphi, \psi \in C([-h,0],$ $R)$ に対して

$$f(t,\varphi) < g(t,\psi)$$

をみたしているものと仮定する。このとき、(1), (2) の解 $u^1(t)$, $u^2(t)$ が初期時 $t=a\geqq 0$ において $u^1_a \prec u^2_a$ をみたせば、$t\geqq a$ に対して

$$u^1(t) < u^2(t)$$

が成り立っている。

条件 (C_0) は (ii) が起り得ないためには自然な条件であると考えることができる。そして、常微分方程式のときと全く同様に、任意な $\varepsilon>0$ に対して

(3) $$g(t,\varphi) = f(t,\varphi)+\varepsilon$$

とおいて補題を適用して一般化された定理Aが証明できる。そのためには (3) で与えられた $g(t,\varphi)$ が条件 (C_0) をみたすための条件として、$f(t,\varphi)$ が条件：

<u>条件 (C)</u>. $\varphi \prec \psi$, $\varphi(0)=\psi(0)$ をみたす任意な φ, $\psi \in$ $C([-h,0],R)$ に対して

$$f(t,\varphi) \leqq f(t,\psi)$$

を満たしていなくてはならない.

この条件は定理Aの一般化のための充分条件であるが、常微分方程式（$h=0$）の場合にはなんらの制限をも与えておらず．条件（C_0）と同様に自然な条件であると考えることができる。

このとき、次の定理が得られる．この定理は補題と共に［1］の中で見出すことができる．

定理1．条件（C）のもとで、

（1°）　方程式（1）は任意の初期条件のもとで、最大解および最小解をもつ，

（2°）　$u(t)$ が方程式（1）の解で、$x(t)$ が区間 $[a,b]$ における方程式（1）の

$$\left.\begin{matrix}\text{sub}\\ \text{st. sub}\\ \text{sup}\\ \text{st. sup}\end{matrix}\right\}\text{-sol. で、}\quad x_a\left\{\begin{matrix}\prec\\ \prec\\ \succ\\ \succ\end{matrix}\right\}u_a\ \text{ならば、}\quad x(t)\left\{\begin{matrix}\leqq\\ <\\ \geqq\\ >\end{matrix}\right\}u(t)$$

が区間 $(a,b]$ において成り立っている．なおここで、第一、第三の場合に対しては解 $u(t)$ は適当に、すなわち、それぞれ最大解および最小解となるようにえらばれているものとする.

定理1の系として、直ちに次の定理がえられる.

<u>定理2</u>. $\overline{\omega}(t)$, $\underline{\omega}(t)$ をそれぞれ(1)の $[a,b]$ における st. sup-sol. および st. sub-sol. とし、$u(t)$ を(1)の解とする。このとき条件(c)のもとで、$\overline{\omega}_a > x_a > \underline{\omega}_a$ ならば、

$$\overline{\omega}(t) > x(t) > \underline{\omega}(t) \quad (t>a)$$

が成り立っている.

なお、補題において(2)の解 $u^2(t)$ を固定して考える場合は条件 (C_0) において、$\psi = u^2{}_t$ の場合を考えれば充分である. そのように条件 (C_0) をゆるめることができる. 特に方程式(2)が常微分方程式である場合は条件 (C_0) は条件

(*) $\varphi < \Omega_t(t, \varphi(0))$ ならば、$f(t,\varphi) < g(t, \varphi(0))$

(このとき $f(t,\varphi)$ は条件 $g(t,v)$ をみたすという)によっておきかえられる, こゝで、$\Omega(s,t,v)$ は点 (t,v) を通って左にでる方程式(2)すなわち

$$(2') \qquad \dot{\Omega}(t) = g(t, \Omega(t))$$

の最大解である。このとき、補題は次の形で述べられる.

<u>定理3</u>. $f(t,\varphi)$ は条件 $g(t,v)$ を満たしていると仮定する。このとき、(1)と(2')の解 $u^1(t)$, $u^2(t)$ が条件 $u^1{}_a < u^2{}_a$ を

みたせば、$t \geqq a$ において $u^1(t) \leqq u^2(t)$ が成り立つ。こゝで、$u^1(t)$ が (1) の sub-sol. であっても同様である。

この定理の系として、次のような一般化が得られる。方程式 (1) の代りに、適当な空間の変数 x を助変数とする方程式

(4) $$\dot{u}(t) = f(t;x)$$

を考える。この解を助変数 x に注目して $u(t;x)$ と表わすことにする。このとき、条件 (*) を助変数 x に関する条件に読みなおして、条件

(**) $$u_t(x) < \eta_t(t, \cancel{\eta(0?)}\ u(t;x))$$ をみたす、すべての x に対して

$$f(t,x) < g(t, u(t;x))$$

が得られる。したがって、

<u>系</u>. 条件 (**) が (4) の解（あるいは sub-sol.）$u(t;x)$ に対して成り立っているものと仮定する。このとき、(2′) の解 $u^2(t)$ が条件 $u_a(x) < u^2_a$ をみたせば、そのような助変数 x に対しては、$t \geqq a$ において $u(t;x) \leqq u^2(t)$ が成り立つ。

この系は比較定理が Liapunov-like 函数を通じて n 次元の函数微分方程式に対してもある局限された形ではあるが可能であることを示している。すなわち、実数値函数 $V(t, x)$ を n

次元函数微分方程式系

(5) $$\dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

に対して考える．簡単にするために $V(t,x)$ などの変数に関しても微分可能（連続的）であると仮定する． $x(t) \in C([-h,\infty), R^n)$ に対して

$$V(t, x(t)) = u(t; x),$$

(6) $$\frac{\partial}{\partial t}V(t,x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}V(t,x(t)) \cdot F(t,x_t) = f(t;x)$$

とおいて，$x = x(t)$ はある固定して考えている時間 t に対して、区間 $[t, t+\delta)$（$\delta > 0$）では初期函数 x_t を持った方程式系 (5) の解であるとすれば、この点 t において $u(t;x)$ は方程式 (4) の解となっている．このとき、条件 (**) における仮定 $u_t(x) < \Omega_t(t, u(t;x))$ は

$$V(t+\theta, x(t+\theta)) \leqq \Omega(t+\theta, t, V(t, x(t))) \quad (\theta \in [-h, 0])$$

に書きかえられる．したがって、条件 (**) を次の補題に従って書き改めることによって、Krasovskiĭ によって与えられた定理（[2] における定理31.4）を特別な場合として含む結果を述べることができる．

<u>補題</u>. 値 u の取る範囲を $\{u \geqq 0\} = R^+$ に制限して考える．$\Phi(t,u)$, $K(t,u)$ を共に $[0,\infty) \times R^+$ で定義された連続函数で条件

$$\Phi(t,u) > \overset{u}{\cancel{\theta}}, \quad K(t,u) > 0 \quad (u > 0),$$

$$\Phi(t,0)=k(t,0)=0$$

かつ、$\Phi(t,u)-u$, $k(t,u)$ は各固定した t に対して、u に関して単調非減少であると仮定する。このとき、任意な $\varphi\in C([-h,0],R^+)$, $\varphi(0)>0$, に対して条件

$\varphi(\theta)\leqq\Phi(t,\varphi(0))$ $(\theta\in[-h,0])$ ならば、$f(t,\varphi)<-k(t,\varphi(0))$

が成り立っているならば、適当に $g(t,u)$,

$$g(t,u)>0\quad(u>0),\quad g(t,0)=0$$

をえらんで、$f(t,\varphi)$ が条件 $-g(t,u)$ をみたしている。こゝで、u が R^+ 全体でなく、適当な区間 $[0,B]$ の値をとる場合のみを考えて充分であるときは、明らかに、Φ および k に対する単調性の仮定は取り去ってもよい。

証明するためには、$g(t,u)$ として、$u>0$ のとき

$$0<g(t,u)\leqq\min\left\{\frac{1}{3h}u,\ \frac{1}{h}\min_{t\leqq s\leqq t+h}\left[\Phi(s,\tfrac{2}{3}u)-\tfrac{2}{3}u\right],\ k(t,u)\right\}$$

をみたす、u に関して単調非減少な連続函数をえらべばよいことを示せば充分である。

<u>定理4</u>. $V(t,x)$ は正定値な実数値函数で連続、かつ、$V(t,0)=0$ とする。系 (5) に対して、(6) で与えられた函数 $f(t;x)$ を考える。このとき、補題で述べた仮定をみたす函数 $\Phi(t,u)$ と $k(t,u)$ とが存在して、

(7) $V(t+\theta, x(t+\theta)) \leqq \Phi(t, V(t, x(t)))$ $(\theta \in [-h, 0])$ ならば,

$$f(t; x) < -k(t, V(t, x(t)))$$

がすべての連続函数 $x(t)$ に対して成り立っているものと仮定する。このとき、

(1°) 方程式

(8) $$\dot{u} = -k(t, u)$$

の零解が安定, 漸近安定ならば (5) の零解も同様である,

(2°) 更に, $V(t, x) \to \infty$ $(\|x\| \to \infty)$ が t に関して一様に成り立てば、(1°) において、安定性の大域性が保存される.

(3°) また、$V(t, x)$ が infinitesimal small upper bound を持てば、(1°) において、安定性の一様性が保存される.

なお、上の定理において、$V(t, x)$ の連続性から

$$\|x\| \geqq \beta(t, V(t, x))$$

をみたす連続、かつ、固定した t に対して v に関し単調増加な函数 $\beta(t, v) > 0$ $(v > 0)$, $\beta(t, 0) = 0$, が存在することに注意すれば、(7) において

$$f(t; x) < -k(t, V(t, x(t)))$$

を条件

$$f(t; x) < -k(t, \|x(t)\|)$$

でおきかえ、(8) 式の代りに、

$$\dot{u} = -k(t, \rho(t,u))$$

を考えて安定性に関する結果を述べることができる。

常微分方程式

(9) $$\dot{u} = f(t,u)$$

に対しては定理Aの双対として次の定理が得られる。

<u>定理B</u>. もしも $x(t)$ が右に向って (9) の (st.) sub- (sup-) sol. ならば、それは左に向って (9) の (st.) sup- (sub-) sol. である。すなわち、別の言葉で云えば、もしも $x(t)$ が (9) の st. sub-sol. ならば、点 $(t, x(t))$ は集合

(10) $$\{(t,u) ;\ u < x(t)\}$$

の strictly egress point である。$x(t)$ が st. sup-sol. である場合に対しても (10) における不等式の向きをかえて同じ結論を得る。

函数微分方程式 (1) に対しては一般には左に出る解について議論することは出来ない。しかしながら、strictly egress point を定義することは一般に可能である。

<u>定義</u> (Lakshimikantham-Leela [1]). 集合 $D \subset [0,\infty) \times R^n$ の境界点

(t_0, x^0) は次の条件をみたすとき strictly egress point と呼ばれる．すなわち、

$$(t_0+\theta, \varphi^0(\theta)) \in D \quad (\theta \in [-h, 0]), \quad \varphi^0(0) = x^0$$

をみたす任意な $\varphi^0 \in C([-h,0], R^n)$ に対して (t_0, φ^0) を通る (1) のすべての解 $x(t)$ に対して、適当に $\delta > 0$ をえらべば

$$(t, x(t)) \in D^c \quad (t_0 < t < t_0+\delta)$$

が成り立っていることである。こゝでは函数微分方程式 (1) としては $[0,\infty) \times C([-h,0], R^n)$ で定義されたものを考えている．

しかしながら、次の例が示すように、条件 (c) は定理 B に類似なものを得るためには不充分である．例えば、方程式

$$\dot{u}(t) = 2u(t-1) + 1$$

に対して、$\omega(t) \equiv 0$ は st. sub-sol. であり、右辺は条件 (c) を満たしているが、$(0, \varphi^0)$, $\varphi^0(\theta) = \theta$, を通る解は点 $(0, 0)$ が集合 $[0,\infty) \times (-\infty, 0)$ に対して strictly egress point ではないことを示している．そこで、条件 (c) の代りに、

<u>条件 (c*).</u> $\varphi < \psi$, $\varphi(0) = \psi(0)$ ならば、$f(t, \varphi) \geqq f(t, \psi)$

を仮定すれば定理 B に類似な結果が得られることが証明される。このことを用いて次の定理が得られる．

定理5. $\overline{\omega}(t)$, $\underline{\omega}(t)$ を $[0,\infty)$ における方程式 (1) の st. sup-sol. および st. sub-sol. で $[-h,\infty)$ において $\underline{\omega}(t)>\overline{\omega}(t)$ が成り立っているものと仮定する. このとき、条件 (C^*) のもとで少なくとも1つ、(1) の解 $x(t)$ で

$$\underline{\omega}(t)>x(t)>\overline{\omega}(t) \quad (t\geqq 0)$$

をみたすものが存在する。

注意. すでに述べたように、常微分方程式 $(h=0)$ に対しては、条件 (C), (C^*) のいずれも何らの制限とならない. したがって、これらの定理は自然な拡張であると考えることができる. しかしながら、条件 (C), (C^*) の両辺をみたす方程式は $(t,\varphi(0))$ のみに依存して定まっている、すなわち、常微分方程式でしかあり得ない.

次に、2階の方程式

$$\ddot{u}(t)=f(t,u_t,\dot{u}(t)) \tag{11}$$

を考える. こゝで、$f(t,\varphi,y)$ は $[a,b]\times C([-h,0],R)\times R$ で定義された完全連続な函数である.

このとき、次の定理を証明することができる.

定理6. $f(t,\varphi,y)$ が有界ならば、任意に与えられた φ^0

$\in C([-h,0],R)$, $x^0\in R$ に対して、(11) の解 $u(t)$ で条件

(12) $$u_a=\varphi^0,\quad u(b)=x^0$$

をみたすものが少なくとも1つ存在する。

以下では、$\overline{\omega}(t)$, $\underline{\omega}(t)\in C([a-h,b],R)$ は $[a,b]$ で2回連続的微分可能で、それぞれ、

$$\ddot{\overline{\omega}}(t)\leqq f(t,\overline{\omega}_t,\dot{\overline{\omega}}(t)),$$

$$\ddot{\underline{\omega}}(t)\geqq f(t,\underline{\omega}_t,\dot{\underline{\omega}}(t))$$

をみたしており、かつ、

$$\overline{\omega}(t)>\underline{\omega}(t)\quad (a-h\leqq t\leqq b)$$

であると仮定する。

定理7. $f(t,\varphi,y)$ は各固定した y に対して条件 (C^*) をみたしており、さらに、条件

(13) $$\sup\{|f(t,\varphi,y)|\ ;\ (t,\varphi)\in S,\ y\in R\}<\infty$$

が成り立っていると仮定する。ここで、

$$S=\{(t,\varphi)\ ;\ \overline{\omega}_t\succ\varphi\succ\underline{\omega}_t,\ t\in[a,b]\}.$$

このとき、

$$\overline{\omega}_a\succ\varphi^0\succ\underline{\omega}_a,\quad \overline{\omega}(b)\geqq x^0\geqq\underline{\omega}(b)$$

をみたす任意な φ^0 と x^0 に対して、条件 (12) をみたす方程式 (11) の解 $u(t)$ が少なくとも1つ存在する。

証明は、

$$\tau_t(\varphi)(\theta) = \begin{cases} \overline{\omega}_t(\theta), & \overline{\omega}_t(\theta) < \varphi(\theta) \\ \varphi(\theta), & \underline{\omega}_t(\theta) \leqq \varphi(\theta) \leqq \overline{\omega}_t(\theta) \\ \underline{\omega}_t(\theta), & \varphi(\theta) < \underline{\omega}_t(\theta), \end{cases}$$

$$g(t,\varphi,y) = f(t,\tau_t(\varphi),y) - \tau_t(\varphi)(0) + \varphi(0)$$

とおいて、$g(t,\varphi,y)$ は有界かつ連続だから、方程式

(14) $$\ddot{u}(t) = g(t,u_t,\dot{u}(t))$$

に対して、定理6を適用し、次に、

$$g(t,\varphi,y) = f(t,\varphi,y), \quad (t,\varphi) \in \mathcal{S},$$

かつ，

$$\varphi(0) > \overline{\omega}(t) \text{ ならば、 } g(t,\varphi,y) > f(t,\overline{\omega}_t,y)$$

$$\varphi(0) < \underline{\omega}(t) \text{ ならば、 } g(t,\varphi,y) < f(t,\underline{\omega}_t,y)$$

であることに注意して、(12) をみたす (14) の解が実は (11) の解であることを示すことによって行なわれる.

定理7における条件 (13) をゆるめることが期待される. その1つの結果として次の定理が得られる. そこで.

$$\overline{M}(\alpha) = \sup\{ f(t,\varphi,y) \ ; (t,\varphi) \in \mathcal{S},\ |y| \leqq \alpha \},$$

$$\overline{m}(\alpha) = \inf\{ f(t,\varphi,y) \ ; (t,\varphi) \in \mathcal{S},\ |y| \leqq \alpha \},$$

かつ.

$$M(\alpha) = \max\{0, \overline{M}(\alpha)\}, \quad m(\alpha) = \min\{0, \overline{m}(\alpha)\}$$

とおく。

<u>定理8</u>. 定数 $\alpha>0$ が存在して、

$$\alpha > \frac{\overline{\omega}(b)-\underline{\omega}(a)}{b-a} + \left\{M(\alpha)-\frac{m(\alpha)}{2}\right\}(b-a)$$

$$\alpha > \frac{\overline{\omega}(a)-\underline{\omega}(b)}{b-a} + \left\{\frac{M(\alpha)}{2}-m(\alpha)\right\}(b-a)$$

が成りたっていれば、定理7において条件(13)を削ずることが可能である。

(12)をみたす(11)の解の一意性に関しては Jackson ([3] 参照)の結果~~を一般化~~と同様にして次の定理を証明することができる。

<u>定理9</u>. 方程式(11)における $f(t,\varphi,y)$ は次の条件のいずれか1つをみたしているものと仮定する。

(1°) $\varphi<\psi$, $\varphi(0)<\psi(0)$ ならば、任意な (t,y) に対して

$$f(t,\varphi,y)<f(t,\psi,y).$$

(2°) $\varphi<\psi$ ならば、任意な (t,y) に対して

$$f(t,\varphi,y)\leqq f(t,\psi,y),$$

かつ、任意に固定した (t,y) に対して、$f(t,\varphi,y)$ は φ に関して局所的に Lipschitz の条件を満たしている。

このとき、任意に与えられた $\varphi^0\in C([-h,0],R)$, $x^0\in R$ に対し

て条件(12)を満たす方程式(11)の解は存在しても高々1つである。

この定理と同様に、[3]における Jackson の結果はそのいくつかを函数微分方程式に対して拡張することができる。しかしながら、この一意性に関する定理9における条件と存在定理7における条件とは $f(t,\varphi,y)$ が $(t,\varphi(0),y)$ のみの函数、すなわち、(11)が常微分方程式の場合でなければ両立しないことに残念ながら注意しなければならない。

参考文献

[1]. V. Lakshimikantham - S. Leela, Differential and Integral Inequalities, Vol. 2, Academic Press, 1969.

[2]. N. N. Krasovskii, Stability of Motion, Stanford University Press, 1963.

[3] Robert McKelvey (ed.), Lectures on Ordinary Differential Equations, Academic Press, 1970.