数理解析研究所講究録
第113巻 1971年 137-149

GLOBAL PARALLELIZABILITY OF LOCAL DYNAMICAL SYSTEMS

神戸大 理学部 江川 治朗

§1. 序

Dynamical system(こゝでいう global system)の parallelizability については，今までいろいろ議論されており非常に沢山の文献がある。その中で J. Dugundji と A.N. Antosiewicz の与えた parallelizability の条件は特にきれいで理解しやすい。一方，浦は[6]で Local system 間の同型写像を定義し([7]ではもっとこまかく議論した。)これをもとにして parallelizability を分類した。しかしながら[6]では，local system の "wandering" と "dispersive" に対する議論がなされていないので，これを完成させることがこゝでの主な目標である。

§2. 基礎概念

<u>定義 1.</u> 次の三つの条件 (1), (2), (3) を満足するとき，

$(X, \mathcal{D}, \pi)$ を local (dynamical) system という。このとき X を相空間，π を X 上の local system という。

(1) X は位相空間

(2) $\mathcal{D}$ は次の形をした $X \times R$ の開集合

$$\mathcal{D} = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times I_x$$

たゞし，R は実数の集合，$I_x \equiv (a_x, b_x) \subset R$ は 0 を含む開区間

(3) π は $\mathcal{D}$ から X への連続写像で

(i) $\pi(x, 0) = x, \qquad x \in X$

(ii) $(x, t_1) \in \mathcal{D}, (x, t_1 + t_2) \in \mathcal{D}, (\pi(x, t_1), t_2) \in \mathcal{D}$

$\Rightarrow \quad \pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2)$

(iii) $b_x < \infty \; (a_x > -\infty)$

$\Rightarrow \quad \pi_x : I_x \to X \; (\pi_x(t) \equiv \pi(x, t))$ の $t \to b_x \; (t \to a_x)$ の cluster set は空集合。

π を X 上の local system とする。$\mathcal{D} = X \times R$ のとき，特に π を X 上の global system という。

次の同型写像の定義は浦による。(〔6〕参照。〔7〕ではもっとこまかく議論されているのであるが，こゝでは必要がないので省略する。)

$(X, \mathcal{D}, \pi)$, $(Y, \mathcal{E}, \rho)$ を二つの local system とする。

定義２　(I)　$\chi = (h, \varphi)$ が次の条件を満足するとき，χ を π から ρ への type－3 の同型写像であるという。

(1)　h は X から Y の上への位相同型写像.

(2)　$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^* = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times I_x \subset X \times R$,　$\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^* = \bigcup_{y \in Y} \{y\} \times J_y \subset Y \times R$ とするとき，φ は $\mathcal{D}^*$ から R の中への連続写像で，

(i)　$\varphi(x, 0) = 0$,　　$x \in X$

(ii)　$\varphi_x(t) \equiv \varphi(x, t)$ と定義するとき，φ_x は I_x から $J_{h(x)}$ の上への位相同型写像。

(iii)　$(x, t) \in \mathcal{D}$,　$(h(x), \varphi(x,t)) \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow$　$h \circ \pi(x, t) = \rho(h(x), \varphi(x,t))$.

(II)　$\chi = (h, \varphi)$ が type－3 で $\mathcal{D}^* = X \times R$, $\mathcal{E}^* = Y \times R$ のとき，χ を type－2 の同型写像であるという。

(III)　$\chi = (h, \varphi)$ が type－2 で $\varphi(x, t) = c \cdot t$ $(c \neq 0)$ のとき，χ を type-1 の同型写像であるという。

上の定義からわかるように，type－1 $\Rightarrow$ type－2 $\Rightarrow$ type-3 が成り立つ。さらに π から ρ への type－1 又は type－2 の同型写像が存在するとき，π または ρ が global system ならば，他方も global system である。（[6] 参照）

<u>定義3</u>　πをX上のlocal systemとする。次の条件を満足するとき，πをX上のlocal parallel flowという。

(i)　$X = \bigcup_{s \in S} \{s\} \times J_s \subset S \times R$

たゞし，$J_s \equiv (m_s, n_s)$は0を含む開区間.

(ii)　$t_1 \in J_s$，$t_1 + t_2 \in J_s$

$\Rightarrow$　$\pi((s, t_1), t_2) = (s, t_1 + t_2)$.

特にπがX上のglobal system，すなわち$X = S \times R$のとき，πをX上のglobal parallel flowという。

πをX上のlocal parallel flowとする。任意の$s \in S$に対して$f(s) = n_s$（$g(s) = m_s$）とおくと，f（g）はSから$\overline{R}^+ = [0\ \infty]$（$\overline{R}^- = [-\infty\ 0]$）への下(上)に半連続な関数である。（〔6〕参照）.

<u>定義4</u>　πをX上のlocal systemとする。πからlocal（global）parallel flowへのtype-n（$n = 1, 2, 3.$）の同型写像が存在するとき，πはlocally（globally）type-n parallelizable globally on Xという。

Parallelizabilityのみを議論するときは，type-1とtype-2は同値である。さらにdynamical systemの

parallelizable の古典的概念と type-1 parallelizable と同値である。([1], [6] 参照).

定義 5. π を X 上の local system とする。$M \subset X$ が quasi-invariant である。
$\Leftrightarrow$

任意の $x \in M$, 任意の $t \in I_x$ に対して, $\pi(x, t) \in M$

$M \subset X$ を quasi-invariant set とする。このとき, $\mathcal{D}' = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times I_x$, $\pi' = \pi \mid \mathcal{D}$ とおくと, $(M, \mathcal{D}', \pi')$ は local system である。これを $\pi \| M$ とかき, π の M への制限という。

定義 6. π を X 上の local system とする。J^+ (J^-) は次の等式によって定義される X から 2^X への写像である.

$$J^+(x) = \bigcap_{\substack{V(x) \in \mathcal{V}(x) \\ b < b_x}} \overline{\pi(V(x)\ [b, \infty))}, \qquad x \in X$$

$$\left(J^-(x) = \bigcap_{\substack{V(x) \in \mathcal{V}(x) \\ a > a_x}} \overline{\pi(V(x)\ (-\infty, a])} \right)$$

たゞし, $\mathcal{V}(x)$ は x の近傍の filter, また $I \subset R$ とするとき,

$\pi(V(x), I) = \{ y \mid {}^{\exists} z \in V(x), {}^{\exists} t \in I_z \cap I ;\ \pi(z, t) = y \}$.

$J^+(J^-)$ を x の positive(negative) prolongational limit set という。この定義は〔2〕におけるものを filter の概念を使ってかいたものである。J^+ の主な性質をあげると,

(1) $J^+(x) = \{ y \mid {}^{\exists}\text{nets}, \{x_\lambda\}, {}^{\exists}\{t_\lambda\};\ x_\lambda \to x,\ \pi(x_\lambda, t_\lambda) \to y,$ $t_\lambda \geqq 0,\ \lim_{\lambda}\text{it inf } t_\lambda \geqq b_x \}$.

(2) $J^+(x)$ は X の閉集合で quasi-invariant である.

(3) $y \in J^+(x) \iff x \in J^-(y)$

たゞし, (2), (3) において相空間は Hausdorff であると仮定してある。

Global system の場合と同様に, $x \notin J^+(x)$ のとき x を wandering point, $J^+(X) = \phi$ のとき π を dispersive flow という。

<u>定義7</u>　$C(x) = \{ y \mid {}^{\exists}t \in I_x;\ \pi(x, t) = y \}$ を x を通る軌道という。

§3. Global parallelizability

§2で基礎概念を述べたので,これより目標の parallelizability に関する議論の要点を述べる。まず得られた結果を述べる。

π を X上の local system とする。

[I] (1)　X を完全正則な空間, $x_0 \in X$ とする。$C(x_0)$ の

quasi-invariant な近傍 U が存在して，$\pi \| U$ が locally type-1 or -2 parallelizable globally on U

$\Leftrightarrow$

$x_0 \notin J^+(x_0)$.

(2)　X を局所コンパクトで Lindelöf の性質を持つ空間とする。π が locally type-1 or -2 parallelizable globally on X.

$\Leftrightarrow$

$J^+(X) = \phi$.

[II] (1)　X を距離空間，$x_0 \in X$ とする。$C(x_0)$ の quasi-invariant な近傍 U が存在して，$\pi \| U$ が globally type-3 parallelizable globally on U.

$\Leftrightarrow$

$x_0 \notin J^+(x_0)$.

(2)　X を局所コンパクト，Lindelöf の性質を持つ距離空間とする。π が globally type-3 parallelizable globally on X

$\Leftrightarrow$

$J^+(X) = \phi$.

[III]　π を local parallel flow, $f(g)$ を定義 3 のあとに述べた S から $\bar{R}^+$ ($\bar{R}^-$) への下(上)に半連続な関数とする。

π が globally type-3 parallelizable globally on X.

$\Leftrightarrow$

次の条件を満足する S×R から R への連続写像 F が存在する。すべての $s \in S$ に対して

(1) $F(s, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$

(2) $t_1 < t_2 \quad \Rightarrow \quad g(s) < F(s, t_1) < F(s, t_2) < f(s)$

(3) $\lim_{t \to \infty} F(s, t) = f(s), \quad \lim_{t \to -\infty} F(s, t) = g(s)$

上の結果に順次説明を加える。〔I〕の証明では有名な Whitney－Bebutov の local section の定理（〔1〕,〔2〕参照，この定理は Hajek によって完全正則な空間にまで拡張できることが証明されている。）を使って〔3〕の方法を修正して得られる。〔II〕の証明では〔1〕の結果を使って〔III〕が成り立つかどうかの問題になる。〔III〕の条件は下（上）に半連続な関数を連続関数で近似するという純位相的な問題である。これに関連して Baire の theorem として次の定理が知られている。（下に半連続な場合のみ述べる。）

<u>Baire's theorem</u>（〔4〕参照）

S を距離空間，f を S 上の $\inf_{s \in S} f(s) \geqq M$ を満たす下に半連続な関数とする。このとき次の条件を満たす S 上の連続関数

列 $\{f_n\}$ が存在する。すべての $s \in S$ に対して

(1) $M \leqq f_1(s) \leqq f_2(s) \cdots\cdots \leqq f_n(s) \leqq f_{n+1}(s) \cdots\cdots\cdots \leqq f(s)$

(2) $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$,

この Baire の定理を修正して，次の命題が成り立つことが分かる。

<u>命題 1</u>

S を距離空間，$f(g)$ を S から $\overline{R}^+$ ($\overline{R}^-$) への下 (上) に半連続な関数とする。このとき〔III〕の条件を満足する $S\times R$ 上の連続関数 F が存在する。

命題 1 によって〔III〕は S が距離空間なら成り立つことが示される。したがって〔II〕はあきらかである。こゝで問題になるのは距離空間でなければどうであろうかということである。これに対しては一般に否定的である。Baire の定理は距離空間でないとコンパクト空間でも成り立たないことを示す例が作られる。この例を使うと〔II〕の (1) は局所コンパクトな空間 (したがって正則空間) では成り立たない例を構成することができる。

非距離空間に対するBaireの定理への反例

R^dを離散位相を持つ実数の集合とする。R^dは局所コンパクトである。$S = R^d \cup \{\infty\}$をR^dのAlexandroffのコンパクト化した空間とする。このとき次の命題が成り立つ。

命題 2

fをS上の連続関数とする。$M = \{ s \in S \mid f(s) \neq f(\infty) \}$とおくと$M$は可附番集合である。

命題 3

fを次のようなS上の下に半連続な関数とする。

$$f(s) = \begin{cases} 3 & s \neq \infty \\ 1 & s = \infty \end{cases}$$

このfに対してはBaireの定理は成り立たない。

注意 1. こゝで構成したSはコンパクトであるが第一可附番公理を満たさない。こゝでは省略するが完全正則，可分で第一可附番公理を満たす空間で同様な例を構成することができる。

$\boxed{\text{II}}$の(1)に対する例

Sをさきに与えた例のコンパクト空間とする。

$X = \bigcup_{s \in S} \{s\} \times J_s$　　　たゞし，$J_s = \begin{cases} (-3,\ 3) & s \neq \infty \\ (-1,\ 1) & s = \infty \end{cases}$

$\mathcal{D} = \bigcup_{(s,r) \in X} \{(s,r)\} \times I_{(s,r)}$　たゞし，$I_{(s,r)} = \begin{cases} (-3-r,\ 3-r) & s \neq \infty \\ (-1-r,\ 1-r) & s = \infty \end{cases}$

$\pi : \mathcal{D} \longrightarrow X$ を $((s,r),\ t) \in \mathcal{D}$，$(s,\ r+t) \in \mathcal{D}$

$\Rightarrow\ \pi((s,r),\ t) = (s,\ r+t).$

と定めると，Xは局所コンパクトであって，$(X, \mathcal{D}, \pi)$は local systemである。しかしながら命題3より〔III〕は成り立たないから〔II〕の(1)は成り立たない。

注意2.　こゝで構成した例は第一可附番公理を満たさない。注意1でふれた例を使うと完全正則，可分で第一可附番公理を満たす空間における例も構成することができる。

§4.　Vinograd の定理についての注意

こゝでいうVinogradの定理とはR^nの開集合で定義された自律系の微分方程式はglobal system を定めるということである（〔5〕参照）。これはこゝで定めた同型写像の概念を使うとtype−3の同型写像で local system が global system へうつるということと同値である。この定理を一般

の相空間に拡張できないかということであるが，これに対して完全な解答を与えることはむつかしいが，§3で与えた例は相空間が局所コンパクトのときは一般には不可能であることを示している。

REFERENCES

(1) N.P.Bhatia and G.P.Szegö, Dynamical Systems: Stability Theory and Applications, Lecture Notes in Mathematics No.35, Springer (1967).

(2) N.P.Bhatia and O.Hajek, Local Semi-Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics No.90, Springer (1969).

(3) J.Dugundji and Antosiewicz, Parallelizable flows and Liapunov's second method, Ann. of Math. 73, (1961), 543-555.

(4) E.J.McShane, Integration, Princeton University Press,1947.

(5) V.V.Nemytskii and V.V.Stepanov, Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton University Press, Princeton N.J. 1960.

(6) T.Ura, Local Isomorphisms and Local Parallelizability in Dynamical Systems Theory, Math. Systems Theory, 3 (1969), 1-16.

(7) T.Ura, Isomorphism and Local Characterization of Local Dynamical Systems, Funkcialaj Ekvacioj, 12 (1969), 99-122.