

C の flabbiness と Radon 変換

東大数学科 柏原正樹

1969年に佐藤幹夫先生によって建設され始めた C の理論は、1970年初頭には既に偏微分方程式への応用に十分な程度に一般論が完成して、佐藤の基本定理を始め多くの結果が得られ始めていた。 C の理論を構成する際に用いられた事実は、 O の flabby dimension が n である事 (即ち Malgrange の定理) 及び O の flabby dimension が 1 である事 (即ち Grauert の定理), Stein 多様体の基本定理, 及び Edge of the wedge theorem (の version) だけであり, それらを曰ゆる General nonsense によって組み合せて肉付けして C の理論が得られたのである。 C の一般論ができた後も, C が flabby であるかどうかについては仲々結論がでず, 一時は C の flabbiness が疑われた時期さへあった。しかし, 最近 C の

flabbiness が 2つの方法で証明できた。
 第一の方法は, C の flabbiness を, S^*M の convex set を support とする relative cohomology の vanishing に帰着させるもので, 最初に得られた証明はこの方法であった。第二の方法は, C の flabbiness を B/O の flabbiness に帰着させようというもので, こちらの方が第一の方法に較べてはるかに容易にできる。しかし, 第二の方法は, 第一の方法の延長として得られた δ 函数の色々な分解公式をもつてして初めて遂行できるのである。

どちらの方法をとるにしても, Radon 変換と C の理論の関係に注目しなければならないのである。

M を n 次元実解析多様体, $N = S^*M$ をその cotangential sphere bundle, $\pi: N \rightarrow M$ を projection とする。次の図式 を考える。ここに

$$\begin{array}{ccccccc}
 N & \leftarrow & S^*N & \leftarrow & N \times_M S^*M & \leftrightarrow & Z \\
 \downarrow \pi & & & & \downarrow \omega & \swarrow & \\
 M & \xleftarrow{\pi} & & & S^*M & &
 \end{array}$$

Z は $N \times_M S^*M$ の diagonal である。
 $C_N^{(i)}$ を π に属する相対 i -form (

C_N を係数とする) のつくる層とする。その時、
De Rham 列

$$0 \rightarrow \omega^{-1} C_M \rightarrow C_N \xrightarrow{d\pi} C_N^{(1)} \xrightarrow{d\pi} \dots \xrightarrow{d\pi} C_N^{(n-1)} \rightarrow 0$$

は exact である。それより exact sequence

$$0 \rightarrow \Gamma_Z(C_N) \xrightarrow{d\pi} \Gamma_Z(C_N^{(1)}) \xrightarrow{d\pi} \dots \xrightarrow{d\pi} \Gamma_Z(C_N^{(n-1)}) \rightarrow \omega^{-1} C_M / Z \rightarrow 0$$

を得る。

これを ω (π でも同じことに注意せよ。Z 上

では $\omega = \pi$) で S^*M に落して

$$(*) \quad 0 \rightarrow \omega_* \Gamma_Z(C_N) \xrightarrow{d\pi} \omega_* \Gamma_Z(C_N^{(1)}) \xrightarrow{d\pi} \dots \xrightarrow{d\pi} \omega_* \Gamma_Z(C_N^{(n-1)}) \rightarrow C_M \rightarrow 0$$

は exact である。

最後の

$$\omega_* \Gamma_Z(C_N^{(n-1)}) \rightarrow C_M$$

は、 π に沿った積分 \int で与えられる。

従って、これは、 C_M の section を S^* 方向の singularity に分解できる事をあらわしている。

オーの方法は、任意の S^*M の closed convex set G (各 fibre ω_m convex) に対して

$$H_G^i(S^*M; C_M) = 0 \quad \text{for } i > 0$$

が成立する事実を用いる。この事実から、任意の Z の closed subset G に対して

$$H_G^i(S^*N; \mathcal{C}_N) = H_G^i(Z; \Gamma_Z(\mathcal{C}_N)) = 0$$

for $i > 0$

である。従って $\Gamma_Z(\mathcal{C}_N)$ は flabby である。更に、 $\Gamma_Z(\mathcal{C}_N^{(i)})$ も flabby である。(*) の exact sequence (2) 直ちに \mathcal{C}_M が exact である事を得る。

亦二の方法は、まづ

$$K: \mathcal{C}_M \rightarrow (\pi_* \Gamma_Z(\mathcal{C}_N))^{\ell}$$

$$T: (\pi_* \mathcal{C}_N|_Z)^{\ell} \rightarrow \mathcal{C}_M$$

という sheaf homomorphism を定義して、

$$\mathcal{C}_M \xrightarrow{K} (\pi_* \Gamma_Z(\mathcal{C}_N))^{\ell} \simeq (\pi_* \Gamma_Z(\mathcal{C}_N))^{\ell}$$

$$\rightarrow \pi_* (\mathcal{C}_N)^{\ell} \rightarrow \pi_* (\mathcal{C}_N|_Z)^{\ell} \simeq \pi_* (\mathcal{C}_N|_Z)^{\ell}$$

$$\xrightarrow{T} \mathcal{C}_M$$

が identity operator になるようにする。

$\pi_* (\mathcal{C}_N) = \mathcal{B}_N / \mathcal{O}_N$ は flabby であるから、その direct summand \mathcal{C}_M も flabby になる。