数理解析研究所講究録
第 114 巻 1971 年 18-68

Generalized Cauchy Problem から基本解の構成へ

京大数理研　河合隆裕

偏微分方程式論において Cauchy 問題はそれが局所的性質を持つ (cf. 楕円型境界値問題) 故であろうか，解の parametrize の方法として極めて便利な物であり，しかも複素領域においてもかなりよく調べられている。(特筆すべきは浜田 [1] である。) 従って偏微分方程式論を Cauchy 問題の観点から見直すことは単に双曲型方程式に限らずとも興味深いと期待される。以下はその試みを実行してみたものである。

Part I は主として Fourier 変換の見地からの approach である。この章で得られる結果は特に新鮮な感じを与えるものではないけれど，以下の章の理解を助けるのに方法が役立つだろう。又，compact support の hyperfunction の Fourier 変換論はそれ程重要でないが，parameter を入れれば，一挙に応用分野が広がることに注意しよう。

尚，この章の最初に昨年のシンポジウムの後に得られた初期値問題についての 2,3 の結果を introduction の意味をかねて記しておく。

Part II では Part I の結果を Radon 変換を用いて変数係数（係数は実解析的とする。以下同じ。）の作用素の双曲性，及びその拡張である I-双曲性を考察する。更にその方法で singular solution の構成（cf. Zerner [1]，Hörmander [1]）を行う。これは Part III の結果と合わせると best possible であることが判る。この部分では層 C の理論（佐藤[1]〜[3]）が問題の表現に適していることが如実に示される。正則性に関連した前 I-双曲性なる概念は Voltera [1]（cf. Hadamard [1]）にその萌芽が見られるようであるが C の理論なしでは formulate されにくい概念であろう。Cauchy-Kowalevsky の定理と双曲性の gap を埋める物として興味深い。

Part III では基本解の構成を行う。複素係数の時迄こめてこのような議論ができるとは私自身半年以前には考えていなかった。Hyperfunction の merit を感じさせられる。ここで用いられる基本解の構成法は Part I, II の直接接続として思いついた物だが，かなり目新しい有用な方法でないかと思う。

Part I　Fourier 変換と初期値問題

§0. 河合[1], [2]は Fourier hyperfunction の理論を用いて convolution operator $S*$ の双曲性を S の Fourier transform の性質で決定し、その系として $S*$ が通常の定数係数偏微分作用素という最も trivial な case には、

Th. $P(D)$ が hyperbolic w.r.t. $(1,0,\cdots,0)$ $\Longleftrightarrow$ $P_m(D)$ が hyperbolic w.r.t. $(1,0,\cdots,0)$ が成り立つこと

を示した。この系として $P(D)u=0$ なら u は x_1 について real analytic に depend することが判る。この事実は双曲性の概念を初期値問題とより直接的に関係付けうることを示唆する。§3でそれを実行する。§1では後の便宜の為いくつかの初期値問題についての定理を列挙する。§2では Fourier 変換論において cohomology がもっともよく理論を表現することを注意する。これは Martineau [1] の一部分の拡張と見なせよう。

§1　初期値問題について

Th. 1.1. $P_m(0,(1,0,\cdots 0)) \neq 0$ とする。この時

$P(x,D)u=0$, $\quad (\partial/\partial x_1)^j u(x_1,x')\big|_{x_1=0} = 0 \quad (j=0,\cdots,m-1)$

ならば $u=0$ (in some nbd of 0)

証明] 河合[2] 参照。 [2]の本文を書いている時この形の定理は ideal theorem として証明が与えてなかったが，その後 柏原君から 河合[2]の (Hörmander [1] 式の) Holmgren の定理の直接の系であることを注意された。柏原君に感謝します。

尚 p.6. の注意参照。

Cor. $P(D)$を定数係数の偏微分作用素とし，$P_m(1,0,\cdots,0)\neq 0$ とする。今$P(\xi)$の既約成分のいずれもが $(1,0,\cdots,0)$方向に関し non-hyperbolic とする。今 $P(D)u=0$, $u(0,x')$が compact support $(\ni 0)$ をもっているなら（実は）$u\equiv 0$ (in some nbd of 0).

証明] 河合[2] 参照。 これは Hörmander [1] Th.5.7.2. の精密化と見れるが，これを特異性にのみ注目すると Part II の考察につながっていく。

Th. 1.2. $S=\{s(x)=0\}$ は non-singular な C^ω-submanifold ($\subset \mathbb{R}^n$) とする。今 $P_m(x, \operatorname{grad} s(x))\neq 0$ (on S) とする。この時 $\mathcal{B}\xrightarrow{P}\mathcal{B}\to 0$ (exact) が S上で成立すれば，$\mathcal{D}ist^1(S, \mathcal{B}^P)\cong(\mathcal{B}_S)^m$

証明] 小松[1]の方法とほとんど同じであるから略する。ただし、$P: \mathcal{B}_x \to \mathcal{B}_x \to 0$ (exact) なら $\exists \omega \ni x$ s.t. $P: \mathcal{B}(\omega) \to \mathcal{B}(\omega) \to 0$ に注意しておく。(Schapira [1] にこの事実は注意されている。)

注意] 一般に $P: \mathcal{B}_x \to \mathcal{B}_x \to 0$ $(x \in S)$ を仮定しなくても $0 \to \mathcal{D}ist^1(S, \mathcal{B}^P) \xrightarrow{\delta} (\mathcal{B}_S)^m$ (exact) は成立する。(Th. 1.1. による。) 尚 この δ は次のような process で具体的に与えられる。$s(x) \equiv x_1$ と座標をとることにしておく。

(i) まず $u = \{u^+(x), u^-(x)\} \in \mathcal{B}^P(\omega - \omega \cap S)$ として $\tilde{u}(x)$ を $u^+(x), u^-(x)$ の $\mathcal{B}$ の flabbiness による ω 全体への拡張とする。

(ii) $P\tilde{u} = \varphi(x)$ とすると $\operatorname{supp} \varphi \subset \omega \cap S$

(iii) Cauchy-Kowalevsky の定理により容易に判るように $\varphi(x) = Pf + \sum_{j=0}^{m-1} \delta^{(j)}(x_1)\, g_j(x')$ $(\operatorname{supp} f \subset \omega \cap S.)$ と unique に分解される。

(iv) そこで $u(x) \longmapsto \{g_j(x')\}_{j=0}^{m-1}$ なる対応を考えると (iii) における分解の uniqueness により、これは well-defined である。これが δ なる写像の具体的意味である。

注意] この δ なる写像の具体的意味を考えれば、Th. 1.1 が通常の Holmgren の定理により得られることは何ら説明を要さない。

注意] この定理の δ の更に構成的意味は Part II で（適当な "regularity" の条件の下で）与える。

注意] $\to \mathcal{D} \to \mathcal{D} \to \mathcal{M} \to 0$ （$\mathcal{D}$ is differential operator の sheaf）なる微分方程式系に対しても適当な regularity の条件の下で $\dim S = n - l$（l は $\mathcal{M}$ の projective resolution の長さ）として
$(\mathcal{B}_S)^\alpha \cong \mathcal{E}xt^l_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{B})$ （α は $\mathcal{M}$ により定まる。）
が成立するようであるが、細部の吟味がまだ不十分なのでこれについては次回に譲る。

§2 Fourier 変換は cohomology 理論で最もよく説明される。（（難しい）^{2} ＝ 易しい）

Ehrenpreis 他により exponential type の entire function と analytic functional には確かによい対応がつけられた。だが，それは構成的でない為に実用上不便なことが多い。又 real compact support をもつ物が実際応用上解析学に現われることは比較的少く むしろ "fibre compact" に近い条件がゆるめられることが必要となる。即ち parameter に依存して逆 Fourier 変換を行わねばならぬ。それは Borel や Pólya の考え方を cohomology の言葉を用いて定式化することによってなされる。但し以下この § では次の事実を仮定する。

(A) Ω ; open convex $\subset \mathbb{C}^n$,　V ; open $\subset \mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow H^q(\Omega \times V, \mathcal{O}|_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n}) = 0 \quad (q \geq 1)$

これは実解析函数の空間の商空間の完備性に関係した微妙な問題があり，未だ証明は出きない。但し今の場合正則函数の特殊性で多重劣調和函数の性質を調べた方が速いかも知れない。但し (A) は以下の議論に不可欠というものではない。

Lem. 2.1 $J(\zeta)$ を $\mathbb{C}^n$ 上の entire function であって 次の評価 (*) を満たすものとする。

(*) $|J(\zeta)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + h_K(\zeta)}$ ($\forall \varepsilon > 0$)

但し K を compact convex,

$h_K(\zeta) = \sup_{z \in K} \mathrm{Im}\langle z, \zeta\rangle$ とする。

この時 $\tau_0, \cdots, \tau_{n-1}$ を $\mathbb{C}^n$ 内の $\mathbb{R}$ 上一次独立な vector として $\Gamma(\tau_0, \cdots, \tau_{n-1})$ を $\tau_0, \cdots, \tau_{n-1}$ の生成する cone とする。

ここで $z \in \Omega(\tau_0, \cdots, \tau_{n-1}) \underset{\mathrm{Df.}}{=} \{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Im}\langle z, \zeta\rangle > h_K(\zeta) \ \forall \zeta \in \Gamma(\tau_0, \cdots \tau_{n-1})\}$ に対し

$$\varphi_{\tau_0 \cdots \tau_{n-1}}(z) = \int \cdots \int_{\Gamma(\tau_0 \cdots \tau_{n-1})} J(\zeta) e^{i\langle z, \zeta\rangle} d\zeta$$

と定めると、$\{\varphi_{\tau_0 \cdots \tau_{n-1}}(z)\}$ は（これは well-def. で）

$H^{n-1}(\{\Omega_{\tau_j}\}, \mathcal{O}) \cong H^{n-1}(\mathbb{C}^n - K, \mathcal{O})$

$\cong H^n_K(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ の元を定める。

証明] $z \in \Omega\{\tau_0, \cdots, \tau_{n-1}\}$ とすれば

$- \mathrm{Im}\langle z, \zeta\rangle + h_K(\zeta) < 0$ on $\{|\zeta| = 1\} \cap \Gamma\{\tau_0, \cdots, \tau_{n-1}\}$

従って K compact 故 $h_K(\zeta)$ が連続 故
$-\mathrm{Im}\langle z,\zeta\rangle + h_K(\zeta) < -\varepsilon_z$ としてよい。
従って $-\mathrm{Im}\langle z,\zeta\rangle + h_K(\zeta) < -\varepsilon_z|\zeta|$ 故
(*) により

$$\int_{\Gamma(\tau_0,\cdots\tau_{n-1})}\int J(\zeta)e^{i\langle z,\zeta\rangle}d\zeta$$ は絶対収束し

しかも Stein mnf. 上 deRham cohomology が holomorphic form により表現されることより $\sum(-1)^j\varphi_{\tau_0\cdots\hat{\tau}_j\cdots\tau_n}(z)=0$
$(z\in\Omega(\tau_0,\cdots,\tau_n))$ 即ち cocycle condition を $\{\varphi_{\tau_0,\cdots\tau_{n-1}}\}$ は満たしている。

注意 (i) $n=1$ の時は上の cocycle cond. が "互いに解析接続される" という形になる。これが Borel や Pólya の理論の出発点だったと思われる。従って Fourier 変換の理論と関係するのは analytic functional であるよりはむしろ cohomology 群であると考えるのが自然である。

(ii) $n \geq 2$の時は $h_K(\zeta)$ と
$\overline{\lim}\, \frac{1}{r}\log|J(r\zeta)|$ の間によい対応がない。これが $n \geq 2$の時 "linearな" covering では不十分な理由であろう。この周辺を整備することは多分函数論の面白い問題であろう。

Th. 2.2 $K \subset \mathbb{R}^n$ を compact convex set とする。この時 $J(t, \zeta)$ が次の条件 (**) を満たすとする。

(**) V を $\mathbb{R}^n$ 内の open set とする時, $\forall \varepsilon > 0$
$\exists\, \Omega_\varepsilon$ ($\mathbb{C}^n$内の open set $\supset V$) s.t.
$\forall L \Subset \Omega_\varepsilon$ に対しても

$$|J(t, \zeta)| \leq C_{\varepsilon, L}\, e^{\varepsilon|\zeta| + h_K(\zeta)}.$$

この時 $\int J(t, \zeta) e^{i\langle z, \zeta\rangle} d\zeta$ に Lem. 2.1 と同様の意味付けを与えれば これにより $H^n_{K\times V}(\mathbb{C}^n \times V; \mathcal{O}|_{\mathbb{C}^n \times V})$ の元を得る。

証明] Lem. 2.1 と同様である。

§3 定数係数双曲型作用素の Cauchy 問題の基本解

Th. 3.1 　P を m 階定数係数 PDO として、P_m が $(1, 0, \cdots, 0)$ 方向に双曲型とする。この時 $\exists\, \mu_k(x_1, x')$ $(0 \leq k < m)$ s.t.

$$\begin{cases} P(D_1, D')\, \mu_k(x_1, x') = 0 \\ D_1^j \mu_k \big|_{x_1=0} = \delta_{k,j}\, \delta(x') \\ \operatorname{supp}_{x'} \mu_k(x_1, x') \subset \{ x' \mid |x'| < \overset{\exists}{c} x_1 \} \end{cases}$$

証明] $P(\zeta) = \sum_{j=0}^{m} \zeta_1^{m-j} q_j(\zeta')$ として

$$p_k(\zeta_1, \zeta') \underset{Df.}{=} \sum_{j=0}^{k} \zeta_1^{k-j} q_j(\zeta')$$ とおく。

(この idea は Hörmander [1] に負う)

ここで P_m が $(1, 0, \cdots, 0)$ 方向に双曲型ならば 河合[1] により $\exists\, C$ s.t.

$$\left.\begin{array}{l} P(\zeta_1,\zeta')=0 \\ |\mathrm{Im}\,\zeta_1| > C|\mathrm{Im}\,\zeta'| \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists C_\varepsilon$$

s.t.

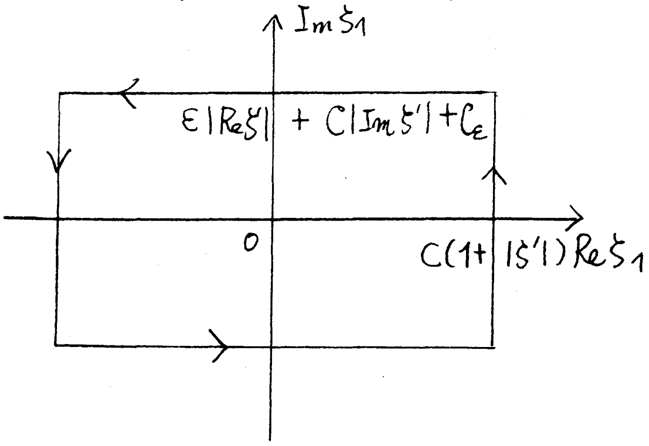
$$|\mathrm{Im}\,\zeta_1| < \varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta| + C_\varepsilon \quad \text{となる。}$$

従って $P(\zeta_1,\zeta')=0$ ならば $\forall\varepsilon>0\ \exists C_\varepsilon$
s.t. $|\mathrm{Im}\,\zeta_1| < \varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta| + C_\varepsilon + C|\mathrm{Im}\,\zeta'|$ として
よい。又 $P_m(1,0,\cdots,0)\neq 0$ 故 $|\zeta_1| \leqq$
$\leqq {}^{\exists}C(1+|\zeta'|)$ としてよい。

今 (z_1,ζ') の entire function $E_k(z_1,\zeta')$
を次のように定める。

$$E_k(z_1,\zeta') \underset{\mathrm{Df.}}{=} \int_{\Gamma^{\varepsilon}_{\zeta'}} e^{-i\zeta_1 z_1}\, P_{m-1-k}(\zeta_1,\zeta') \Big/ P(\zeta_1,\zeta')\, d\zeta_1$$

但し $\Gamma^{\varepsilon}_{\zeta'}$ とは ε と ζ' により定まる下図のような ζ_1-plane 内の積分路とする。



この時 $|\mathrm{Re}\,\zeta_1| \leq |\zeta_1| \leq C(1+|\zeta'|)$ 故
もし必要ならば C_ε を大きくとり直すことにより $P(\zeta_1, \zeta')=0$ を満たす ζ_1 は $\Gamma^{\varepsilon}_{\zeta'}$ によって囲まれる領域内にのみ存在するとしてよい。 従って $\forall\theta>0$ に対しても

$$|E_k(z_1, \zeta')| \leq C_{\varepsilon,\theta}\, e^{\theta|\zeta'|} \times$$
$$\times \exp\{|x_1|(\varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta'| + C|\mathrm{Im}\,\zeta'| + C_\varepsilon) +$$
$$+ C|y_1|(1+|\zeta'|)\}$$ が成立する。

よって §2 Th. 2.1. により

$$\left[\int E_k(z_1, \zeta')\, e^{-i\langle\zeta', z'\rangle} d\zeta'\right]$$
$$\in H^{n-1}_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{n-1}; \mathcal{O}|_{\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{n-1}})$$

この元を $\mu_k(x_1, x')$ とすれば明らかに
$$\mathrm{supp}\,\mu_k(x_1, x') \subset \{x' \mid |x'| \leq C|x_1|\}$$
と μ_k の def. により
$$P(D_1, D')\mu_k(x_1, x') = 0$$ 更に
$$D_1^j \mu_k(x_1, x')\big|_{x_1=0}$$
$$= \left[\int e^{-i\langle\zeta', z'\rangle} d\zeta' \int_{\Gamma^{\varepsilon}_{\zeta'}} \zeta_1^j\, p_{m-1-k}(\zeta_1, \zeta') \times\right.$$
$$\left.\times \left(1 \big/ P(\zeta_1, \zeta')\right) d\zeta_1\right]$$ であり

しかも

$$\zeta_1^{j} p_{m-1-k}(\zeta_1, \zeta') \Big/ P(\zeta_1, \zeta')$$

$$= \zeta_1^{j-k-1} + \{ (\zeta_1^{j-k-1} (\zeta_1^{k+1} p_{m-1-k}(\zeta_1, \zeta')$$

$$- P(\zeta_1, \zeta'))) \Big/ P(\zeta_1, \zeta') \}$$

ここで　{　} 内の分子は

$$\zeta_1^{k+1} p_{m-1-k} \ (\zeta_1, \zeta')$$

$$= \zeta_1^{k+1} \sum_{j'=0}^{m-1-k} \zeta_1^{m-1-k-j'} q_{j'}(\zeta')$$

$$= \sum_{j'=0}^{m-1-k} \zeta_1^{m-j'} q_{j'}(\zeta') \quad \text{より} \quad \zeta_1 \text{について}$$

高々　$(j-k-1)+k=(j-1)$　次である。

故に $j < m$ 故

$$\int_{\Gamma_{\zeta'}} \zeta_1^{j} p_{m-1-k} \Big/ P \quad d\zeta_1$$

$$= \int_{\gamma} \zeta_1^{j-k-1} d\zeta_1 \qquad \text{従って}$$

$$D_1^{j} \mu_k \big|_{x_1=0} = \delta_{kj} \delta(x')$$

系
$$\begin{cases} P(D_1, D')\, u(x_1, x') = f(x_1, x') \\ \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^k}(x_1, x')\Big|_{x_1=0} = g_k(x') \end{cases}$$

$$(k = 0, \cdots, m-1)$$

において $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$, $g_k \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n-1})$ ならば $u \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ として unique に存在。

証明］一意性は §1 Th. 1.1. より明らか。存在は Duhamel の原理による。簡単の為 $P(\zeta_1, \zeta') = \zeta_1^{m} + \cdots$ と仮定しておく。

$$h(x_1, x') \underset{\text{def.}}{=} f(x_1, x') - P(D)\left(\sum_{k=0}^{m-1} 1/k!\; x_1^k g_k(x')\right)$$

と定めて
$$\begin{cases} P(D)\, u'' = h \\ u''|_{x_1=0} \text{ は } 0\text{-data} \end{cases}$$
をとこう。

今 $v(x_1, y_1, x')$
$$= \int \mu_{m-1}(x_1, x'-y')\, h(y_1, y')\, dy'$$ とすれば

$v(x_1, y_1, x')$ は $(n+1)$-変数の実解析函数であり 更に $P(D)v = 0$

かつ $(\partial/\partial x_1)^k v(x_1, y_1, x')\big|_{x_1=0} = \delta^k_{m-1}\, h(y_1, x')$

が満たされる。　従って

$$\int_0^{x_1} v(x_1-y_1, y_1, x')\,dy_1 \underset{\mathrm{Df.}}{=} u''(x_1, x') \text{ と}$$

定めれば　$u'' \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$，更に

$P(D_1, D')\, u''(x_1, x')$

$$= \int_0^{x_1} P(D_1, D')\, v(x_1-y_1, y_1, x')\,dy_1$$

$$+ v^{(m-1)}(x_1-y_1, y_1, x')\Big|_{y_1=x_1} = h(x_1, x')$$

× 明らかに u'' の Cauchy data は 0

従って

$u'' + \sum \frac{1}{k!} x_1^k g_k(x') \underset{\mathrm{Df.}}{=} u$ が求める解である。

更に初期値問題に関し hyperfunction の merit を示す次の定理が今迄の所より得られる。

Th. 3.2. $\begin{cases} Pu = f(x_1, x') \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^k u\Big|_{x_1=0} = g_k(x') \end{cases}$ なる

Cauchy 問題は f が x_1 について real

analytic に依存する限り Pが双曲型なら solvable である。

Proof] 河合[1]の基本解を用いて $P(D)u'=f$ なる u' は容易に構成できる。次に河合[1]の正則性 Th. により $u'|_{x_1=0}$ etc. を考え、それを $\{h_k(x')\}_{k=0,\dots,m-1}$ とする。

Th. 3.1. により

$$\begin{cases} P(D)v=0 \\ v(0,x')=g_0(x')-h_0(x'),\ \cdots\cdots \end{cases}$$

という Cauchy 問題は

$$v(x_1,x')=\sum_{k=0}^{m-1}\int \mu_k(x_1,x'-y')\,(g_k(y')-$$

$$-h_k(x'))\,dx'$$ として解ける。故

$u=v+u'$ として求める(唯一の)解が得られる。

注意] (Th. 3.1. において) $P(\zeta_1,\zeta')=\prod_{j=1}^{m}(\zeta_1-\alpha_j(\zeta'))$ として

$|\zeta'|\gg 1$ では $\alpha_j\neq\alpha_k\ (j\neq k)$ を仮定すれ

は　p_{m-1}/P の代りに

$\prod_{j=2}^{m}(\zeta_1 - x_j)/P$ を考え，しかも x_1 は

p. 12 の長方形内に入るとすれば(*) $PE=0$

$E(0, x') = \delta(x')$ なる E を得る。この事実を

精密化した物が Part II §2 の結果である。

尚 Part II の結果は const. coeff. の場合には

global な結果を与えていることを注意しておく。

(収束半径を調べればよい。)

(*) 但し今度は積分路 $\Gamma^{\varepsilon}_{\zeta'}$ は $x_1(\zeta')$ を中心

とする(たとえば半径 1 の)円とする。又，ここの証明

法から判るように $x_j \neq x_k$ という条件はもっとゆるめ

うる。

Part II　Cauchy 問題の基本解

§0　まず §1 では 双曲型作用素 に対する Cauchy 問題の基本解を構成する。以下 作用素は simple characteristic であると仮定する。多分 constant multiplicity なら 以下の議論は成立すると思うけれど詳細が検討してないので 次回に 譲りたい。§2 では §1 の方法を modify して たとえば principal part が real な operator に対して bicharacteristic strip にのみ singularity をもつ solution を構成する。この結果は 更に Part III で 拡張される。§3 では I-双曲性なる概念を論じ、Cauchy-Kowalevsky の定理を 実領域で 拡張する 一つの方向 (多分 唯一つの 方向) を示す。

§1　双曲型作用素と Cauchy 問題の基本解

以下 Part II, Part III を通じて 基本的な 次の定理を 浜田[1] より引用しよう。

Theorem (Cauchy- Kowalevsky -浜田)
$P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x) = (\partial/\partial t)^m + \cdots$ は simple characteristic とする。今 $K_1(\xi), \cdots, K_m(\xi)$ を $t=0$; $\langle x, \xi\rangle = 0$ を通る P の characteristic surface

とする時 $\langle x,\xi\rangle=0$ で pole をもつ $t=0$ に与えられた初期dataに対して $Pu=0$ の解で $K_1\cup\cdots\cdots\cup K_m$ 以外で多価解析的な物でlocalに，uniqueに，存在する。

注意] $P_m(t,x;\tau(t,x,\xi),\xi)=0$ の解を $\{\tau_j\}_{j=1}^{m}$ とする時 $K_j=\{\varphi_j(t,x)=0\}$ 但し $\varphi_j=t\psi_j(t,x)+\langle x,\xi\rangle$ $(\psi_j(0,0)=\tau_j(0,0,\xi))$ と表現できる。又 $u=\sum_{j=1}^{m}u_j$ $Pu_j=0$, u_j は φ_j の逆巾と $\log\varphi_j$ の正則函数を係数とする一次結合で現わされる。

Th. 1.1. 上の定理と同様の仮定で $t=0$ での初期dataを p ヶ $(1\leq p\leq m)$ 与え，$K_1,\cdots,K_m$ の任意の p ヶ（それを $K_1,\cdots,K_p$ としよう）を指定する時 $K_1\cup\cdots\cup K_p$ 以外で多価解析的な解が存在する。しかもそれの存在域は，$\langle x,\xi\rangle=\langle y,\xi\rangle$ に pole をもつ data を与えて y について一様な存在域を local にはもつとしてよい。

証明] 浜田[1] p.23 ff. の殆んど同一の繰り返し故略する。

Th. 1.2. P が t 方向に双曲型であると仮定する。この時

$$\begin{cases} P(t,x;\partial/\partial t,\partial/\partial x)E_j(t,x;y)=0 \\ (\partial/\partial t)^k E_j(t,x;y)\big|_{t=0} = \delta_{jk}\,\delta(x-y) \\ \quad (0\leq k\leq m-1) \qquad (0\leq j\leq m-1), \end{cases}$$

を満たす $E_j(t,x;y)$ が存在する。この時 $E_j(t,x;y)$ は $t=0$, $x=y$ を通る bicharacteristic curves の全体 (ie characteristic conoid) を除いた所で実解析的である。特に Part I §1 Th. 1.1 により有限伝播速度の現象を示す。

証明] いずれの場合でも証明に変りはないから最も ~~重要~~ な $j=m-1$ の時を扱おう。以下 E_{m-1} を単に E と記すことにする。

次のような Cauchy 問題を複素領域で考えよう。($\xi\in S^{n-1}$)

$$\begin{cases} P(t,z,\partial/\partial t,\partial/\partial z)E(t,z;y,\xi)=0 \\ (\partial/\partial t)^k E(t,z;y,\xi) = \delta_{k,m-1}\times 1\big/\langle z-y,\xi\rangle^{n} \end{cases}$$

(n は $\{t=0\}$ の次元数)　但しここで $t\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^n$ ($|t|,\|y\|\ll 1$) とする。このような E は浜田の定理により, $K_1(y,\xi)\cup\cdots\cup K_m(y,\xi)$

を除いて多価解析的に存在する。しかも今 P は t-方向に双曲型であり，又 $y \in \mathbb{R}^n$ 故，$K_j(y,\xi)$ の定義方程式 $\varphi_j(t,x;y,\xi)$ は $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ とすれば $\varphi_j(t,x;y,\xi)=0$ なる点で $\mathrm{Im}\,\varphi_j>0$ なる領域で正則な函数の bdry value をとれるようになっているとしてよい。（佐藤 [1]，[2] 参照。）（$t \in \mathbb{R}$ としても a priori には $t \in \mathbb{C}$ としておいても どちらでもよいことは上の議論と p.2 の注意より明らか。）今 p.2 の注意により，$E=\sum_{j=1}^{m} E_j(t,x;y,\xi)$

$PE_j=0$，E_j は K_j の外で多価解析的とし，$E_j(t,x;y,\xi)$ の定める超函数を $E_j(t,x;y,\xi)$ と記す。ここで $S.S.\,E_j(t,x;y,\xi)$

$\subset \{(t,x,\tau,\eta) \mid \varphi_j(t,x;y,\xi)$

$(\tau,\eta)=c\,\mathrm{grad}_{(t,x)}\varphi_j(t,x;y,\xi) \quad (c>0\}$ となっていることは明らか。（S.S. は singular support on S^*M の意）今 $E_j(t,x;y,\xi)$ は (y,ξ) に real analytic に depend するように $E_j(t,x;y,\xi)$ が作られているとして構わないから

$$E_j(t,x;y) \underset{\text{def}}{=} \int_{|\xi|=1} E_j(t,x;y,\xi)\,\omega(\xi) \quad \text{と定める。}$$

$E=\sum_{j=1}^{m} E_j(t,x;y)$ とすればこれが求める核

質をすべて持った解であることは容易に判る。ここで層 $\mathcal{C}$ における積分の正則性に関する佐藤の補題（佐藤 [1] p. 28. [2], [3]）が用いられた。（これについては更に一般の場合により詳しく §2 で論じる。）

注意］上の証明から判るように初期data を全く一般にすることを要しないなら双曲性は必らずしも必要でない。これが §3 の発想の出発点である。

§2 Singular Solution の構成

Th. 2.1. P_m が real であるとする。このとき，P の任意の bicharacteristic strip b を一つ fix する時，$Pu=0$ かつ $\phi \neq S.S.\,u \subset b$ となる物が存在する。

証明］適当に座標系をとって $\xi_0 \in I \subset S^{n-1}$ とに $(0,0;\tau_0,\xi_0)$ を通る bicharacteristic strip が b となり，しかも $\tau(t,x;\xi)$ が $(0,0,\xi_0)$ の近傍で real と仮定して構わない。ここで §1 Th. 1.1.

の結果と Th. 1.2. の方法を用いて、

$$\begin{cases} PE=0 \\ E(0,x,y,\xi) = 1/(\langle x-y,\xi\rangle + i0)^n \end{cases}$$

なる $E(t,x,y,\xi)$ を構成できる。($\xi \in I$)

$E(t,x,y;\xi)$ を (t,x,y,ξ) の超函数と思って
その S.S. を考えれば明らかに

$S.S.\,E \subset \{\varphi(t,x;y,\xi)=0$ として

$\mathrm{grad}_{(t,x,y,\xi)}\varphi$ なる方向 $\}$. ここで $\mu(y)$

を $\{y=0,\ \xi=\xi_0\}$ にのみ support をもつ超函数

として (たとえば $1/(\langle x,\xi_0\rangle + i(|x|^2-\langle x,\xi_0\rangle^2)+i0)$)

$$\int E(t,x,y;\xi)\mu(y)\,dy\,\omega(\xi) = u(t,x)$$ を考え

れば、この積分は C での積分 (佐藤 [2], [3] 参照) として well-defined でしかも ξ についての積分が行われているから佐藤の補題により

$S.S.\,u(t,x) \subset b$ しかも構成法より明らかに

$u(0,x)=\mu(x)\neq 0$ i.e. $\phi \neq S.S.\,u(t,x)$

注意] 我々の singular support の定義により $u(t,x)$ は bicharacteristic <u>curve</u> の外で real analytic であることは注目に値する。(Cf. Hörmander [1]

Ch. 8.)

注意] この定理の逆については Part III で論じる。

Th. 8.2. P を real coefficient と限らない作用素とし、$P_m = A_m + iB_m$, A_m, B_m は real coeff. とする。この時 $\mathrm{grad}_\xi [P_m, \overline{P_m}] = 0$ on $P_m(x, \xi) = 0$ ······ (1) とし、更に $P_m(x, \xi) = 0$ 上で $\mathrm{grad}_\xi A_m(x, \xi)$ と $\mathrm{grad}_\xi B_m(x, \xi)$ が一次独立 ······ (2) と仮定しよう。

この時

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x(t,s)}{\partial t} = \mathrm{grad}_\xi A_m(x, \xi) \\[2ex] \dfrac{\partial x(t,s)}{\partial s} = \mathrm{grad}_\xi B_m(x, \xi) \\[2ex] \dfrac{\partial \xi(t,s)}{\partial t} = -\mathrm{grad}_x A_m(x, \xi) \\[2ex] \dfrac{\partial \xi(t,s)}{\partial s} = -\mathrm{grad}_x B_m(x, \xi) \end{cases}$$

なる偏微分方程式系は完全積分可能であり、従って $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ として $(x(0,0), \xi(0,0))$ を与えれば unique な "bicharactristic surface" (という用語があ

るかどうか知らないが）を定める。この時，このbicharacteristic surfaceの上にsingularityを持つnon-trivialなsolution u が存在する。

証明）Th. 2.1. の方法をこの場合に適用することは可能と思われるし，又それは §3の結果を改良するためにも重要なのだが，まだ Th. 1.1. に相当する結果が証明してないので，ここでは Hadamard [1] の方法を用いよう。（Th. 1.1. も Hadamard の方法で証明されているのだから同じことだが。）条件(2)を考えると $x_1=x_2=0$ 内で $\langle x', \xi' \rangle = 0$ （$\xi'=(\xi_3, \cdots, \xi_n)$）なる超平面を考え，ここを通るbicharacteristic surfaceの全体を考えると x-space 内で P のある real characteristic surface で parameter を ξ' にもつものがある。その surface の方程式を $\{\varphi(x;\xi')\}$ とすれば，$P_m(x, \operatorname{grad}\varphi(x,\xi')) \equiv 0$ 故，φ の(巾)巾及び $\log\varphi$ の一次結合として $Pu=0$ $U(x;\xi')$ 作れる。しかも $\varphi(x,\xi')$ が real 故 $U(x;\xi')$ の境界値として $u(x;\xi')$ なる超函数を得，これを ξ' について積分すれば，求める singular solution が得られる。

注意］いくつかの例から考えてこの定理の条件(2)はもっとゆるめられると思われる。

§3 I-双曲性 ―― 初期値問題の可解性への一つの approach ――

Th. 3.1.
$$\begin{cases} P(t, x; D_t, D_x)\, u = 0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^j u(t, x)\Big|_{t=0} = \mu_j(x) \quad (0 \leq j \leq m-1) \end{cases}$$

が任意の $\{\mu_j\}_0^{m-1}$ に対して解けるなら $\forall \xi \in S^{n-1}$ に対して $\exists \tau \in \mathbb{R}$ s.t. $P_m(0, x; \tau, \xi) = 0$

証明］佐藤の基本定理（佐藤［1］，［2］）により $S.S.\, u \subset \{P_m(t, x, \tau, \xi) = 0\}$ 従って C における制限の理論（佐藤［2］）により，
$S.S.\, u(0, x) \subset \{\xi \mid (\tau, \xi) \in S.S.\, u(t, x)\}$ 故明らか。

注意］上の結論は当然 $P_m(0, x; \tau, \xi) = 0$ の根ではすべて real となるべきである。これを証するには Pseudo differential operator の一般論の

構成を要し(Part III §3) まだ一般のcaseには証明してない。Pが~~定数係数~~各次の作用素の時には正しい。

Th. 3.2

$$(\text{C.P.})\begin{cases} P(t,x,D_t,D_x)u=0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(t,x)\Big|_{t=0}=\mu_j(x) \quad (0\leq j\leq m-1)\end{cases}$$

において ϖ_ξ S.S. $\mu_j(x)\in I\subset S^{n-1}$ (ϖ_ξ とは ξ-方向への projection) とする。次の条件(IH)が成り立つなら上の(C.P.)は solvable.

条件(IH) $P_m(t,x;\tau,\xi)=0$ の根 τ は $\xi\in I$ なる限りすべて real である。

証明] §1 Th. 1.2 のそれと同様である。

Th. 3.3 更に条件(IH)': $\operatorname{Im}(t\tau(t,x;\xi))\geq 0$ でも同様の結論が成立する。

証明] 証明方法より明らか。

注意] 更に上の定理を $n\geq 3$ の時は精密化することも可能であるが今ここでそれに深入りすることは"遊び"になるだろう。Part II §1 を参照されたい。そこと同じ analysis が (i.e. 曲面波を

用いる）可能であることは容易に判ろう。

eg. 1. $P = (\partial/\partial t)^2 - (\partial/\partial x_1)^2 + (\partial/\partial x_2)^2$

（これが Voltera [1] の扱ったものである。）

eg. 2. $P = \partial/\partial t + it\,\partial/\partial x$

注意］ 上のように 初期値に特異性の制限をつけて 双曲性を考えることを 仮に I-双曲性と呼んでみた。このように mod a で考えることは reflection の原理の一つの新しい見方を与える。ただそれには $n \geq 3$ の時 浜田[1] の結果をもう少し改良する要がある。詳しくは次回に譲りたい。ただし $n=2$ の時は 浜田[1] の結果で十分で、その考え方を Part III §1 の $n=2$ の時の 正則性定理の証明中に示しておいた。詳細は Part III §1 と重複するので省略する。

Part III (Pseudo)differential operator の局所理論

§0 この章では偏微分作用素の可解性, 正則性等を論じる。又この章の考察は最近 Pseudodifferential operator の formalism をほぼ完成させたので殆んどそのまま Pseudodifferential operator に拡張できる。まず §1 では基本解の構成について Part II §3 の考え方を生かした物を述べる。(他にも構成法はあるがこれが最もよい結果を与える。) 又同じ考え方の適用例として $n=2$ の時の正則性定理に証明を与える。§2 では §1 で構成された基本解の正則性を検討する。§3 では pseudodifferential operator に対しての §1, §2 の結果の拡張を試みる。

§1 基本解の構成

Lem. 1.1. 次に示す条件(S)の下で

$$P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x)\, E(t, x) = 1/(\langle x, \xi\rangle + at + i0)^n$$

を満たす $E(t, x)$ が存在する。

条件(S): $\mathrm{Im}\langle z, \xi\rangle > 0$ に含まれ $\mathbb{R}^n$ 上で $\mathrm{Im}\langle z, \xi\rangle = 0$ に接するある領域 U_ξ において各 j に対して $t > s \geq \alpha$ 又は $\beta \geq s > t$ $(s, t \in \mathbb{R})$ ならば $\mathrm{Re}\, \varphi_j(t, z; s) = 0$ なる限り $\mathrm{Im}\, \varphi_j(t, z; s) > 0$ 。ここで

t と s の大小関係は各 j により異なってもよい。尚 $\varphi_j(t, x; s) = 0$ を $t = s$, $\langle x, \xi\rangle = 0$ を通る characteristic surface の方程式とする。

証明] 今たとえば $\xi_1 \neq 0$ としてもよいから ($\because$ $\xi = 0$ なら non-characteristic 故問題ない。) $T = t$, $w_1 = at/\xi_1 + x_1$, $w_j = x_j$ なる束の変換をして考えることにより

$$P(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x) E(t, x) = 1/(\langle x, \xi\rangle + i0)^n$$

の解を求めれば十分である。

今 初期 data を $t = s$ において $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\langle x, \xi\rangle^{n+1} \end{pmatrix}$

で与えて Part II §1 Th. 1.1. を適用して $u(t, x; s) = \sum_{j=1}^{m} u_j(t, x; s)$ なる解を得る。ここで $j = 1, \cdots, l$

に対しては $t > s \geq \alpha$ で $j = l+1, \cdots, m$ に対しては $\beta \geq s > t$ において $\mathrm{Re}\,\varphi_j = 0$ なる限り $\mathrm{Im}\,\varphi_j > 0$ となるように j は決めておく。ここで

$$E(t, x) = u_+(t, x) - u_-(t, x) \underset{\mathrm{Df.}}{=} \sum_{j=1}^{l} \int_{\alpha}^{t} u_j(t, x, s)\,ds - \sum_{j=l+1}^{m} \int_{t}^{\beta} u_j(t, x, s)\,ds$$

と定めれば　これは $z \in U_\xi$ で一価正則であり，しかも $P(t, z, \partial/\partial t, \partial/\partial z)\, E(t, z) = 1/\langle z, \xi \rangle^{n+1}$ が成立する。
実際，$u^{(0)} = u$，$u^{(j)} = (\partial/\partial t)^j u$ とおいて一階化した方程式を $\partial/\partial t\, \check{u} = \mathcal{G}\, \check{u}$ $\left(\check{u} = \begin{pmatrix} u^{(0)} \\ \vdots \\ u^{(m-1)} \end{pmatrix} \right)$

と略記する。今

$$\mathcal{U}(t, z) \underset{\mathrm{Df.}}{=} \sum_{j=1}^{l} \int_\alpha^t \check{u}_j(t, z, s)\, ds$$

$$- \sum_{j=l+1}^{m} \int_t^\beta \check{u}_j(t, z, s)\, ds$$ と定めれば，定義

により $\partial/\partial t\, \check{u}_j = \mathcal{G}\, \check{u}_j$ 及び

$$\partial/\partial t \int_\alpha^t \check{u}_j(t, z, s)\, ds = \check{u}_j(t, z, t) + \int_\alpha^t \partial/\partial t\, \check{u}_j\, ds,$$

$$\partial/\partial t \left(-\int_t^\beta \check{u}_j(t, z, s)\, ds \right) = \check{u}_j(t, z, t) - \int_t^\beta \partial/\partial t\, \check{u}_j\, ds$$

が成立つから

$$(\partial/\partial t - \mathcal{G})\, \mathcal{U}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\langle z, \xi \rangle^{n+1} \end{pmatrix}$$

が $u(t, z, s)$ の初期条件の与え方により成立する。
この方程式系の最下行に注目して，初期条件の与え

方により成立する $v_j=(\partial/\partial t)^j v_0$ を代入すれば

$$P(t,z,\partial/\partial t,\partial/\partial z)\,v_0(t,z)=1/\langle z,\xi\rangle^{n+1}$$

しかも定義により $v_0(t,z)=E(t,z)$

従って $P(t,z,\partial/\partial t,\partial/\partial z)E(t,z)=1/\langle z,\xi\rangle^{n+1}$

故に条件(iii)により $E(t,z)$ の境界値を考えて

$P(t,x,\partial/\partial t,\partial/\partial x)E(t,x)=1/(\langle x,\xi\rangle+i0)^{n+1}$ の解 $E(t,x)$ が求まる。

系. 今 φ_j すべてについての一種の positivity を要求したが、実は一ケの φ_{j_0} についての条件でその方向の solution が出きていることは明らかである。実際

$$E(t,z)-\sum_{j=2}^{l}\int_\alpha^t u_j(t,z,s)\,ds+\sum_{j=l+1}^{m}\int_t^\beta u_j(t,z,s)\,ds$$

を $E_1(t,z)$ とすれば $E_1(t,z)$ の定める超函数 $E_1(t,x)$ に対して $P(t,x,\partial/\partial t,\partial/\partial x)E(t,x)=1/(at+\langle x,\xi\rangle+i0)^{n+1}$ が (τ_0,ξ) の nbd. で成立つからである。尚もっと直接的にもこの事実を示せるが、それには浜田[1]をもう少し改良する要がある。

更に上では平面波による δ 函数の分解により基本解を作ったが、これでは適用範囲が狭くなる。そこで曲面波による δ 函数の分解を与える次の佐藤の公式

を用いよう。（佐藤 [3] 参照）

公式（佐藤）

今 $\varphi(x,\xi)$ が $(0,\xi)$ で positive type とする。$\varphi(x,\xi)=\sum x_j\varphi_j(x,\xi)$ （$\varphi_j(x,\xi)$ は ξ について positively homogeneous）と分解して

$$\int_{S^{n-1}} \frac{\dfrac{\partial(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n)}{\partial(\xi_1,\ \cdots\ \xi_n)}}{(\varphi+i0)^n}\,\omega(\xi) = \frac{(-2\pi i)^n}{(n-1)!}\,\delta(x)$$

この公式により characteristic surface として $t=s$ で $\varphi(x,\xi)=0$ を通る物を考えれば Part II §1 Th. 1.1. を initial data として

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{\partial(\varphi_1\cdots\varphi_n)}{\partial(\xi_1\cdots\xi_n)}\Big/\varphi^n \end{pmatrix}$$

を与えて用いれば条件 (S) の下で Lem 1.1. が成立つことは明らかである。

従って前頁系により、適当な φ を選ぶことにより、そこを通る characteristic surface の挙動を精密に調べればよい。それには Nirenberg = Treves [1] の座標変換の方法が役に立つので それを次頁以降で

検討しよう。

適当な実の座標変換により、$t=0$ での initial data を $\langle x, \xi\rangle + i\sum x_j^2$ として与えた characteristic equation の solution $w(t,x)$ が、下の条件 (NT) の下に $t>0$ 又は $t<0$ ($t\in\mathbb{R}$) において $\tilde{X}$ における原点のある近傍において $w(t,x)\neq 0$ とできることを証明する。このようにして条件 (NT) の下に基本解の構成は完成する。

(条件 NT) を述べる前に Nirenberg - Trèves に従って operator の normal form を求めておく。

$P_m(x,\xi)$ は simple characteristic とするから、$P_m(x,\xi) = Q(x,\xi)(\xi_{n+1} - a - ib)$ (a, b は positively homogeneous order 1) と仮定してよい。以下 ξ_{n+1} を τ x_{n+1} を t と書くことにする。この時

(条件 $NT)_{(0,0,0,\xi^0)}$ $b(0,0,\xi^0)$ は $\tau - a(x,t,\xi^0)$ の bicharacteristic strip に沿って偶数次の零点を持つか、あるいは奇数次の零点を持つとすれば そこでの微係数は正 ($\neq 0$) である。ここで 0 は偶数と見なす。

次に座標変換により a を消すこととする。それは Nirenberg Trèves [1] に実行されているが 復習しておこう。それは実際 $J(y/x)$ を $y=y(x)$ の Jacobian matrix として

$$\begin{cases} \partial/\partial t\, y = J(y/x)\, \mathrm{grad}_\xi\, a(t, x\ \ {}^tJ(y/x)\xi^0) \\ y|_{t=0} = x \end{cases}$$

をとけばよい。 $t = s$ として
$(t, x) \longmapsto (s, y)$ はもちろん 原点の 複素近傍での
解析的変換である (原点の Jacobian $= 1$)
$\partial/\partial s = \sigma$ とすれば

$$\sigma = \tau - \langle \mathrm{grad}_\xi\, a(t, x, {}^tJ(y/x)\xi^0,\ {}^tJ(y/x)\eta \rangle$$

故 $\tau - a(t, x, \xi)$ は

$$\sigma - \tilde{a}(s, y, \eta) = a(x(y,s), s, {}^tJ(y/x)\eta\rangle$$

$$- \langle \mathrm{grad}\, a(s, x(y,s), {}^tJ(y/x)\xi^0, {}^tJ(y/x)\eta\rangle$$

従って $\mathrm{grad}_\eta\, \tilde{a}(s, y, \xi^0) = 0$ 従って

$$\tilde{a}(s, y, \xi^0) = 0 \quad \therefore \begin{cases} \mathrm{grad}_y\, \tilde{a}(s, y, \xi^0) \equiv 0, \\ \frac{\partial}{\partial s}\tilde{a}(s, y, \xi^0) \equiv 0 \end{cases}$$

さて このような座標変換の 後に $s = 0$ で
$\tilde{w}(0, y) = i\langle \xi^0, y\rangle - \sum_{j=1}^{n} y_j^2$ なる初期値問題に対する
$\partial/\partial s\, \tilde{w}(s, y) = \tilde{a}(s, y, \mathrm{grad}_y \tilde{w}) + i\, b(s, y, \mathrm{grad}_y \tilde{w})$
の解 (それは 既に $\underbrace{\text{unique に 存在すること}}_{\text{一階 偏微分方程式の一般論により}}$ は判っていること
に注意) $\tilde{w}$ の (収束する) 漸近展開を行い その最初の数項の
評価を行うことにより $\tilde{w}$ について p. 6. で述べた種質

を証明する。即ち $\tilde{w}(s,y) = i\langle \xi_0, y\rangle - \sum y_j^2 +$
$+ \sum_{k=0}^{\infty} u_k(s,y)$ 但し $u_k(s,y)$ は y について k 次斉次多項式 $\tilde{w}$ を展開する。もちろん初期条件により $u_k(0,y)=0 \ (\forall k)$ である。同様に

$T(s,y,\eta) = \tilde{a}(s,y,\eta) + i\,\tilde{b}(s,y,\eta) = \sum T_k(s,y,\eta)$

(T_k は y について k 次斉次, η について 1 次斉次) と展開しておく。$\partial/\partial s\, \tilde{w} = T(s,y,\ \mathrm{grad}_y \tilde{w})$ の y についての展開の係数を比べよう。

(0) $\partial/\partial s\, u_0 = T_0(s,y,\ \xi^0 + \mathrm{grad}_y u_1)$

(1) $\partial/\partial s\, u_1 = T_1(s,y,\ \xi^0 + \mathrm{grad}_y u_1) +$
$+ \langle \mathrm{grad}_\eta T_0(s,y,\ \xi^0 + \mathrm{grad}_y u_1),\ \mathrm{grad}_y u_2 - 2y\rangle$

ここで $u_2(s,y)$ を known function と考えてよいから上の (0), (1) なる常微分方程式の解の評価を行う。即ち

$d/ds\, u_1 = T_1(s,y,\xi^0) + \langle \mathrm{grad}_\eta T_0(s,y,\xi^0),$
$\mathrm{grad}_y u_2 - 2y\rangle + \Phi_1(s,y,u_1)$ (Φ_1 は解析的) $u_1 = \sum u_{1j} y^j$ とする。
かつ $\Phi_1(s,y,0)=0$

しかるに定義により, $\mathrm{grad}_\eta T_0(s,y;\xi^0)$
$= \mathrm{grad}_\eta T(s,0;\xi^0)$, $T_1(s,y,\xi^0)$
$= \langle y,\ \mathrm{grad}_y T(s,0,\xi^0)\rangle$ 故

ここで $\mathrm{grad}_y\, \tilde{a}(s, y, \xi^0) \equiv 0$, $\partial/\partial s\, \tilde{a}(s, y, \xi^0) \equiv 0$,
$\mathrm{grad}_\eta\, \tilde{a}(s, y, \xi^0) = 0$ を思い出して

$d/ds\, u_1 = i \langle y, \mathrm{grad}_y \tilde{b}(s, 0, \xi^0) \rangle$

$+ i \langle \mathrm{grad}_\eta \tilde{b}(s, 0, \xi^0), \mathrm{grad}_y u_2 - 2y \rangle$

$+ \Phi_1(s, y, u_1)$. ここで u_2 は y について

の2次斉次多項式, $\Phi_1(s, y, 0) \equiv 0$ 故.

$|d/ds\, u_{1j}| \leq C_0 \left(\sum_k |u_{1k}| + |\mathrm{grad}_y \tilde{b}(s, 0, \xi^0)| \right)$
(C_0 は y の動く範囲にのみよる。)

ここで次の評価 (A) が成り立つと仮定しよう。(この評価については後述)

(A) $\tau - a(t, x, \xi)$ の bich. strip の上で

$|\mathrm{grad}\, b|^2 \leq \mathrm{const}\, |b|$

この仮定の下に.

$|d/ds\, u_{1j}| \leq C_1 \left(\sum |u_{1k}| + |\tilde{b}(s, 0, \xi^0)|^{1/2} \right)$

故に $|s| \ll 1$ とて

$|u_{1j}| \leq C_2 \int_0^s |\tilde{b}(s', 0, \xi^0)|^{1/2} ds'$

従って (条件 NT)$_{(0,0,0,\xi^0)}$ により,

$\tilde{b}(s, 0, \xi^0) = -b_0 s^{k_0} + O(s^{k_0+1})$

ここで (i) k_0 は偶数, 又は (ii) k_0 が奇数なら

$b_0 \leq 0$.

まず case (i) の場合に話を進めよう。

$|u_{1j}| \leq C_3 \; |s|^{(k_0+2)/2}$

$\therefore \; |u_1| \leqq C_3'' |y| |s|^{(k_0+2)/2}$

$\leqq C_3' |s|^{1/2} (|y|^2 + |s|^{k_0+1})$

(O) により

$|{}^{d}/_{ds} u_0| = T_0(s, y, \xi_0) + \langle \operatorname{grad}_\eta T_0(s, y, \xi^0), \operatorname{grad}_y u_1 \rangle$
$+ O(|\operatorname{grad}_y u_1|^2)$

$\therefore \; |{}^{d}/_{ds} u_0) + b(s, 0, \xi^0)|$

$\leq |\langle \operatorname{grad}_\eta \tilde{b}(s, 0, \xi^0), \operatorname{grad}_y u_1 \rangle| + C_4 |\operatorname{grad}_y u_1|^2$

再び (A) により

$\leq C_5 (|\tilde{b}(s, 0, \xi^0)|^{1/2} \; |s|^{k_0+2/2} + |s|^{k_0+2})$

よって $\tilde{b}$ の展開により

$= C_6 |s|^{k_0+1}.$

$\therefore \; |u_0 - b_0' s^{k_0+1}| \leqq C_7 s^{k_0+2}$

と同様に $|u_2(s, y)| \leq C_8 |s| |y|^2$

$\therefore \; \tilde{w}(s, y) = i\langle \xi^0, y \rangle + \sum y_j^2 + u_0 + u_1 + u_2 + O(|y|^3)$

$\therefore \; |\tilde{w}(s, y) - i\langle \xi^0, y \rangle + \sum y_j^2 - b_0 s^{k_0+1}|$

$\leqq \text{const} \{ s^{k_0+2} + |s|^{1/2} (|y|^2 + |s|^{k_0+1}) + |s||y|^2 + |y|^3 \}$

$\leq \text{const} (|y| + |s|^{1/2}) (|y|^2 + s^{k_0+1}) \quad (\because |s| \ll 1)$

従って $\overset{w=}{\widetilde{(-i\overline{w}}}$ を考えれば，それは characteristic equation の solution でしかも $s=0$ で $\langle \xi^0, y\rangle + i\sum y_j^2$ かつ $\mathrm{Im}\, w \geqq C\left(\sum y_j^2 - b' s^{k_0+1}\right)$，故に k_0 が偶数故 $b'>0$ なら $s<0$，$b'<0$ なら $s>0$ とすればよい。

しかも今 $s=0$ で考えたけれど，$s=s'\neq 0$ を原点として考えればそこでの b の s に関する展開の初項は $b's^{k_0}$ 故 $b'>0$ なら $s<s'$，$b'<0$ なら $s>s'$ としてよい。従って $\int_\alpha^t F(t,z;s)\,ds$ として基本解を求めうる。

次に case (iii) を考えよう。この時 $b_0>0$ 故，$s'>0$ ならそこで case (i) の $b'>0$ の状況が適用されて，$\int_0^t F(t,z,s)\,ds$ が well-defined．又，$s'<0$ ならそこで $b'<0$ の状況が適用されてやはり $\int_0^t F(t,z,s)\,ds = -\int_t^0 F(t,z,s)\,ds$ が well-defined．従って $\int_0^t F(t,z,s)\,ds$ で基本解を求めうる。

よって（条件A）の検討が残るのみである。しかも（条件A）は今迄述べて来た所より判るように，k_0 が偶数で $\geqq 2$ の時にのみ確かめればよい。実際，$k_0=0$ の時は問題なく，又 k_0 が奇数で，$b_0>0$ の時には上のような許

価を必要としないからである。しかるに k_0 が 2以上の偶数であれば この条件が必らず成立することは Nirenberg-Trèves [1] の Lem. 1.1. を用いて判る。以上により証明は終った。

以上述べてきた所から 条件(NT)の下で 基本解が構成された。従って

Th. 1.2. (x_0, ξ_0) の近傍で (NT) が成立していれば $P(x, D_x)u(x) = \mu(x)$ がとける。ここで S.S. μ は (x_0, ξ_0) の十分小さい近傍に含まれるとする。

証明] $\mu(x) \in (C_M)_*$ は $(\mathcal{B}_{S^*M}/\mathcal{A}_{S^*M})_*$ の元で表現されるから それに $\chi_I(x, \xi)$ (I は (x_0, ξ_0) の適当な nbd.) をかけることは well-defined であるから その元を $\mu_I(x, \xi)$ とし、これを $\mathcal{B}$ の flabbiness を用いて $\mu_I(x, \xi) = \mu_+(x, \xi) + \mu_-(x, \xi)$ 但し Supp $\mu_+(x, \xi) \subset$ [{(NT)の条件中 b の s に関する展開の最初の項の係数が負}の閉包) $\underset{\text{def}}{=} A_+$

Supp $\mu_-(x, \xi) \subset$ [{(NT)の条件中 b の s に関する展開の最初の項の係数が正}の閉包] $\underset{\text{def}}{=} A_-$ とする。

上の分解を用いて $\varphi_+(x, \xi) \underset{\text{def}}{=} \int F_+(x, y, \xi)\mu_+(y, \xi)dy$ と定めれば、

$F_+(z,y,\xi)$ の構成法により $\varphi_+(z,\xi)$ は
$z\in\Omega$ (i.e. (x_0,ξ_0) の $\tilde{X}$ における nbd.) において
正則な ~~超函数~~ (in ξ) である。 $\varphi_-(z,\xi)$ も
同様にして定めて $\varphi(z,\xi) \underset{\mathrm{Df}}{=} \varphi_+(z,\xi)+\varphi_-(z,\xi)$
とすれば $\int \varphi(z,\xi)\,\omega(\xi) \underset{\mathrm{Df}}{=} U(z)$ は $z\in\Omega$ で

正則故 その境界値を考えることが出来る。それを
$u(x)$ とする。 すると

$$P(z,D_z)\,U(z)$$

$$=\iint \frac{1+i\langle z-y,\xi\rangle}{(\langle z-y,\xi\rangle+i|z-y|^2)^n}\left(\mu_+(y,\xi)+\mu_-(y,\xi)\right)dy\,\omega(\xi)$$

$$=\iint \frac{1+i\langle z-y,\xi\rangle}{(\langle z-y,\xi\rangle+i|z-y|^2)^n}\,\mu(y,\xi)\,dy\,\omega(\xi)$$

両辺は Ω で正則故 ここで境界値に移って
(x_0,ξ_0) の nbd. で $P(x,D_x)\,u(x)=\mu(x)$

Q.E.D

尚 今迄我々は Nirenberg Trèves 式の条件の
与え方をしてきた。 上の考察では そこの $k=\infty$ の case
がまだ cover されていない。(近傍で $k=\infty$ ならもちろん

よいけれど）これは $n=2$ の時には容易に判るように今迄の理論で cover されるが $n \geq 3$ の時はまだうまく証明できない。ところで Nirenberg Trèves 型の条件は実にうまいぎりぎりの所を捕え切ったものであるが、naturality の点でやや不満がある。これを補うものとして考えられたのが佐藤の条件（佐藤[3]参照）であるが、これについて次の Th. が成り立つことを注意しておく。

Th. 1.3 （佐藤の条件）$\Rightarrow$ P は (x_0, ξ_0) で "non solvable"

ここで (non) solvable の意味は次のように（少しずるいけれど）定義する。

◎ $C \xrightarrow[P]{} C$ が solvable

$\Longleftrightarrow$ $PE(x,y) = \delta(x-y)$ が S.S.E 判 $(0, \eta)\}$

としてとける。（但し η は dy 座標）

証明は殆んど自明故省略する。ここで上のように parameter を入れて solvable を定義しないと一般には supp $\mathrm{Cok}\, C^P$ が closed かどうか（少

なくとも a prioriには）不明故 上のずるい定義にも一理あるとの adviceを柏原君から頂いた。

ここで 佐藤の条件 と(NT)の条件は多分 equivalentであろうと予想されることを付記しておく。(但し 直接証明はかなり難しいであろう。)

さて 次に正則性の問題についてはかなり問題は微妙でこれには Nirenberg-Trèves 流の formulation以外今一寸考えつかない。(我々の間にあったある予想が最近柏原君の反例により $n \geqq 3$ の時崩れたので)。

正則性については A_+, A_- の内点では今迄述べてきた所で証明は済んでいるが $(x_0, \xi_0) \in \partial A_+$ の時は微妙でまだよく判らない。

ただ $n=2$ の時にのみは characteristic surface と bicharacteristic curve が一致すること等の特殊事情のため理論は簡明になる。次頁以降でそのことを示す。$n \geqq 3$ の時のこの方法の拡張は浜田[1]の拡張と共に現在考えている所である。

62

$m=2$の時の正則性定理

Th. 1.3. $m=2$ とする。この時

$\mathrm{Ker}\, C^{P} \ni (x_0, \xi_0) \Longleftrightarrow \exists\, k(x)$ s.t.

$P_m(x, \mathrm{grad}\, k) \equiv 0$, $k(x_0)=0$,

$\mathrm{grad}\, k|_{x_0} = \xi_0$ $\mathrm{Im}\, k \geq 0$ if $\mathrm{Re}\, k = 0$

証明($\Longrightarrow$)を行えばよい。$x_0=(0,0)$とする。

$x_1=t$, $x_2=x$ とし、xの複素座標をえで記す。対偶を証明するのであるが、それにはkに関する条件を少し言いかえた形で行う。(上の)(の否定)

$P_m(t, x, 1, 0) \neq 0$ が考えている所で成立っているとして一般性は失われない。又 $P(t,x,D)u=0$ ならば佐藤の基本Th.により、$u=\sum_{j=1}^{m} u_j$ S.S.$u_j \subset \{(t,x,\tau_j(t,x), \xi_j(t,x)) \mid P_m(t,x,\tau_j,\xi_j)=0\}$, $Pu_j=0$としてよい。ここで仮定より$\xi_j \neq 0$である。今$(\tau_1(0,0), \xi_1(0,0)) = \xi_0$と仮定して$u_1$が$(0,0)$の近傍で実解析的であることをいいたい。今$(0,0,\xi_0)$を通るcharacteristic curveの方程式$k(t,\tilde{x})=0$をえについてとき$\tilde{x}=\varphi(t)$とする。$\tau_1/\xi_1>0$とする。

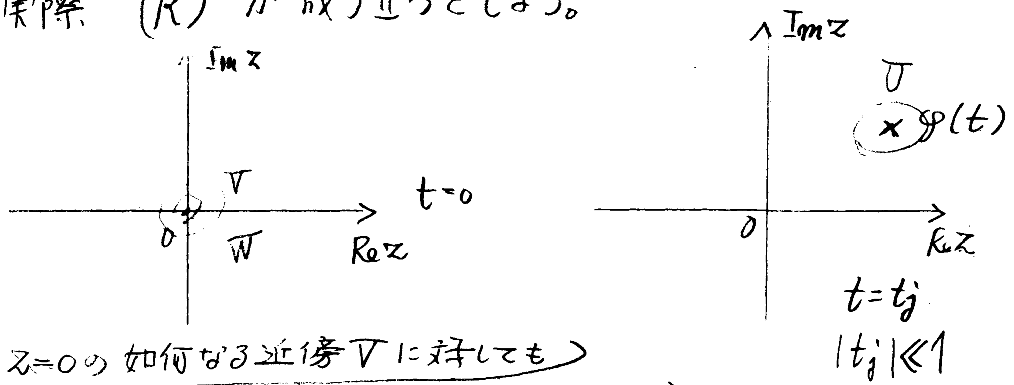
ここで我々は次のことを証明する。

(R) $\exists t_j \longrightarrow 0$ s.t. $\operatorname{Im}\varphi(t_j) > 0$

$\Longrightarrow$ $S.S.\,u_0 \not\ni (0,0)$

実際 (R) が成り立つとしよう。

[図]



$z=0$の如何なる近傍Vに対しても

($\varphi(t)$の十分小さな近傍Uを考えれば、$z\in U$として(ε, z)を通る characteristic curves はただ一本を除き$\{0\}\times V$とまじわらないとしてよい。何故なら$t=\varepsilon$で$z_0(\in U)$を初期 data として Hamilton-Jacobi の方程式をとき$t=0$におけるzの値を$z(z_0)$とすれば、$z(z_0)$は local homeo. 特にUを十分小として homeomorphism としてよいからである。従って Part II Th.1.1. により ($n=2$故) $u(0,z)$はVで正則である。

($\because$ $z_0\in\partial U \Rightarrow z(z_0)$, which enters in V, never enters in $W\ni 0$)

逆に条件(R)が成立たないならば明らかに singular solution が存在する。

さて条件(R)を characteristic surface の言葉に言い直しておこう。

$k(t,x) = x - \varphi(t)$ 故 $\varphi(t) = \theta(t) + i\psi(t)$ として $\exists t_j \to 0$ s.t. $\psi(t_j) > 0$ 一方 $\mathrm{Re}\, k(t,x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ とすると $x - \theta(t) = 0$ 特に $t = t_j$ として $x_j = \theta(t_j)$ の時 $\psi(t_j) > 0$ 即ち $\mathrm{Im}\, k < 0$ 言いかえれば $\exists (x_j, t_j) \to 0$ s.t. $\mathrm{Re}\, k(t_j, x_j) = 0$ かつ $\mathrm{Im}\, k(t_j, x_j) < 0$

逆に $\mathrm{Re}\, k = 0$ かつ $\mathrm{Im}\, k < 0$ ならば $\psi(t) > 0$ は明らか故 条件(R)は characteristic surface の言葉で言い換えれた。

注意] このように characteristic surface の言葉で regularity が記述できるのは $n=2$ の特殊性にかなり強く依存していることを最近柏原君が反例により示した。

§2 基本解の正則性

この節では §1 で作られた基本解の正則性を調べる。この節の事実の証明は柏原君の advice によってかなり短くなった。私の最初の証明は複素領域での analysis をもっと要した。柏原君に厚く感謝します。

Th. 2.1 $P_m(x, D)$ は real coefficients であるとする。この時 §1 で作られた基本解の sing. support S.S. E は(local には)次の集合 S に含まれる。

$S = \Delta^a \cup \{(x, x', \xi, -\xi') \mid (x, \xi)$ と (x', ξ') は同一の bicharacteristic strip に乗っていて $x_1 > x_1'\}$

証明] 今 P_m は real coefficients としているから

$$E(x, x') = \int d\omega(\xi) \int_{\alpha}^{x_1} E(x, x', \xi, s)\, ds$$ において

$$S.S.\ E(x, x', \xi, s) \subset \{\operatorname{grad} \varphi \mid \varphi = 0\}$$

としてよい。ここで φ は $x_1 = s$ で $\langle x - x', \xi \rangle$ となる characteristic equation の solution 故、$\partial/\partial\xi_1 \varphi = (s - x_1')$ 又、$\operatorname{grad}_\xi \varphi|_{t=x_1} = x - x'$

$(\partial/\partial x_1 + \partial/\partial t)\varphi|_{t=x_1} = \xi_1$, $\operatorname{grad}_{x'} \varphi|_{t=x_1} = -\xi$

は明らかである。従って積分の正則性に関する

佐藤の補題（佐藤[1] p.28 [2], [3]）を $\int d\omega(\xi)$ と $\int d\sigma$ に適用すれば直ちに結果が得られる。実際半空間に入っていることは、

$\partial/\partial\xi_1 \varphi = 0$ として $s = x_1'$ 一方積分範囲から考えて $s < x_1$ 故 $x_1' < x_1$ が従うからである。

注意］この定理により Part II §2. の結果が best possible であることが判る。

§3 Pseudodifferential operator の calculus について。

漸近展開とは何かを反省するとそれは formal power series の空間（又はその部分空間）に適当な位相を入れて考察することの代数的表現であることがわかる。これと Fourier 変換とを結びつけることにより我々は自然に（スペクトル分解された）pseudodifferential operator の概念に到達する。これは„定義のみあって定理がない"と言われてきた hyperfuction における pseudodifferential operator の概念（佐藤[1], [2]）に肉付けを与える物である。時間があれば pseudodiff. op. の可解性その他に関する定理，予想等を話したい。又、基本解の構成もこの方法で可能であるが、詳しくは次回に譲る。

文献

Hamada [1] PRIM. '69 p 21～41

Zerner [1] C. R. 250 (1960)

Hörmander [1] Linear P. D. O. Springer

[2] Conference at Tokyo. '69

Volterra [1] Rivista di Matematica (1894) p. 1～14.

河合 [1] To appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo

[2] '69. 11月 Symposium 報告集

佐藤 [1] 堅田シンポジウム報告集

[2] 数学の歩み 15-1 (1970) p. 9 - 72

[3] To appear

Martineau [1] Math Annalen (Köthe 記念号)

Schapira [1] Bull. Soc. math. France (1969)

小松 [1] Conf. at Tokyo '69

Nirenberg - Treves [1] C. P. A. M. '70 - 1

追記

このシンポジウム後に、次の notes が出ておりますので御参考迄に。

T. KAWAI. Proc. Japan Acad. 46 p. 912 - 916.

M. Kashiwara and T. Kawai. 〃 p. 1130 - 1134.

T. Kawai. Proc. Japan Acad. 47 p.19.—23.

(このノート中 p20. Th. 1. 中の $P'(z, D_z)$ は $P'(z, D_z, D_s)$ ($\equiv P(z, D_s + D_{z_1}, D_{z'}) - P(z, D_z) / D_s$) の誤りです。同誌上 47.-2 の T. Kawai の Construction of a local elem. sol (To appear) (II) をも御覧下さい。)

更に Pseudo-diff. op. に関した部分は間もなく出ます 12月 Tokyo Symp. の報告集で述べる予定です。

前本報告集, 今となっては (1971年2月) 飽き足らぬ部分も多いのですが, 私に今加筆訂正をする時間的余裕が御座居ませんので, 1971年3月のシンポジウムの私のお話や現在準備中の "Construction of a local elem. sol for linear p.d.o. I, II." (上の Proc. Japan Acad はその resumé です。) 及び 相原-河合の (間もなく resumé のみは出す予定) pseudo-diff. op. についての考察 等を御覧頂ければ有難く存じます。