

有限要素法の原子力発電プラントへの応用

東 芝

原子力本部

水 町 渉

1. 序

最近有限要素法 (Finite Element Method) は大変 Popular になり, 各方面に利用されている。これは物体または構造物を, ある大きさの要素に分割し, 構造物をそれらの要素の集合体として解析する方法である。有限要素法は応力解析, 固有値解析, 動的振動解析, 熱解析, 流体力学問題等に大変有効な方法である。

有限要素法に関する最初の論文はアメリカの航空学会より, 1954 年に発表された。(文献①)

その後電子計算機の大型高速化により, 有限要素法は飛躍的に進歩をとげた。また原子力発電所の建設や, 宇宙開発等の大きなシステムの出現により, その応用範囲も広がった。この方法により, 従来困難であった非線型問題も簡単にとりあつかえるようになった。

具体例として応力解析をとれば, 塑性解析その他の非線型問題 (Material Non - Linearity), ならびに大撓み問題などの非線型問題 (Geometrical Non - Linearity) などの問題が楽に解けるようになった。

特に原子力発電プラントでは, 高温高圧その他の過酷な条件下での, 信頼性と安全性が要求されている。

その為, より正確な構造解析が必要であるが, このような場合有限要素法は大変有効な手段である。

2. 理 論

有限要素法は仮想仕事の原理 (The Principle of Virtual Work) に基づく、変分法の応用である。

ここで重要なことは、有限要素法において、要素の数を増していけば、全ポテンシャル・エネルギーが単調に減少することである。この為要素数を増すことにより、漸次厳密解に収束することが証明されるのである。

(1) 応力解析

まず変位を適当な函数で仮定する。この変位函数は適合条件 (Compatibility Condition) を満足しなければならない。

適合条件を満足しない変位を仮定した場合には、いくら要素の数を増しても、正解へ収束するという保証はされない。

変位を u , 函数を S , その係数を α とすれば

$$\{ u(x, y, z) \} = [S(x, y, z)] \{ \alpha \} \quad (2.1)$$

次に接点変位 u を一般化された座標系で求める。

$$\{ u(x, y, z) \} = [A] \{ \alpha \} \quad (2.2)$$

$$[A] = [S(x_i, y_i, z_i)] \quad (2.3)$$

つまり $[A]$ は $[S]$ に各々の接点座標を代入したものである。

ここで $[A]$ の逆マトリクスをとり、 $\{ \alpha \}$ を求める。

$$\{ \alpha \} = [A]^{-1} \{ u \} \quad (2.4)$$

変位を偏微分することにより歪みを求める。

(2.1) 式で $\{ \alpha \}$ は係数であるので、 $\{ u \}$ の偏微分とはつまり

$[S(x, y, z)]$ の偏微分ということになる。それを $[B(x, y, z)]$

とすれば

$$\{ \epsilon(x, y, z) \} = [B(x, y, z)] \{ \alpha \} \quad (2.5)$$

各要素内の応力 $\{ \sigma(x, y, z) \}$ はフックの法則より

$$\{ \sigma(x, y, z) \} = [D] \{ \epsilon(x, y, z) \} \quad (2.6)$$

ここで $[D]$ は材料の特性で、応力-歪みマトリクスである。

(2.6) 式に (2.5) 式を代入すれば

$$\{\sigma(x, y, z)\} = [D] [B(x, y, z)] \{\alpha\} \quad (2.7)$$

歪みエネルギーの変分を δU とすれば

$$\delta U = \iiint (\delta \epsilon)^T \{\sigma\} dV \quad (2.8)$$

(2.8) 式に (2.7) 式を代入すれば

$$\delta U = \iiint (\delta \alpha)^T [B]^T [D] [B] \{\alpha\} dV \quad (2.9)$$

ここで $(\delta \alpha)$ は定数であるから体積積分の外に出て

$$\delta U = (\delta \alpha)^T \left[\iiint [B]^T [D] [B] dV \right] \{\alpha\} \quad (2.10)$$

(2.4) 式より

$$\delta \alpha = [A]^{-1} \{\delta u\} \quad (2.11)$$

(2.11) 式を (2.10) 式に代入すれば

$$\delta U = \{\delta u\}^T [A^{-1}]^T \left[\iiint [B]^T [D] [B] dV \right] [A]^{-1} \{u\} \quad (2.12)$$

ここで

$$[K] = [A^{-1}]^T \left[\iiint [B]^T [D] [B] dV \right] [A]^{-1} \quad (2.13)$$

とおけば

歪エネルギーの変分の式は次のようになる。

$$\delta U = \{\delta u\}^T [K] \{u\} \quad (2.14)$$

ここで接点変位と接点外力の関係は Castigliano の定理を適用して

$$\{P\} = \frac{\partial U}{\partial \{u\}} \quad (2.15)$$

である。

(2.14) 式, (2.15) 式より

$$\{P\} = [K] \{u\} \quad (2.16)$$

これは接点の内力であり, $[K]$ は有限要素法による剛性マトリクス

(Stiffness Matrix) である。

この $[K]$ は各接点における剛性マトリクスであり, 全体の剛性マトリクスは各接点, そこに関連した要素の剛性マトリクスの和として表わされる。

$$[K] = \sum_i [K]_i \quad (2.17)$$

これが全体の剛性マトリクスである。

次に初期変位または熱応力などがある場合、それらによる初期歪みを $\{\varepsilon_0\}$ とすれば

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) \quad (2.18)$$

となる。

(2) 固有値解析

有限要素法は Clough 教授により最初に発表されたが、その目的は複雑な形状の構造物の振動問題の解析であった。

その後、有限要素法は応用範囲が広い為、応力解析その他で急速に発達して、振動問題は影がうすい感じである。しかし Clough 教授は原子力発電所の地盤まで含めた地震の動的解析などを行なって、振動問題への有限要素法の有用性を説いている。

振動問題には大きく分けて固有値問題と動的解析の問題がある。固有値問題とは構造物の固有値（固有振動数など）と固有ベクトルを求めるものである。現在固有値解析の方法は、構造物を多質点系に分割し、その間をバネで結ぶという系で解くのが一般的である。

これで相当程度の精度の解が求められている。

しかし、構造物の形状が複雑になった場合、いろいろな仮定をおくことになり問題も多い。

その場合、有限要素法を使えばより連続体に近い形で解を得られる。ただし単純な形状のものに対しては、多質点系で充分の精度が得られるので有限要素法をもちだすことはないと考えられる。

① 固有値解析

一般に固有値問題では、質量マトリクスは対角マトリクスとなり、方程式は

$$[K_{ij} - M_i \omega^2] \{X\} = \{0\} \quad (2.19)$$

ここで質量マトリクスは

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & & \\ 0 & 0 & M_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & M_n \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

しかし有限要素法による質量マトリクスは、剛性マトリクスと同様にフルマトリクスとなる。

したがって方程式は

$$[K_{ij} - M_{ij}\omega^2] \{X\} = \{0\} \quad (2.21)$$

ここで質量マトリクスは

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & & \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ M_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

この質量マトリクスは、エネルギー法より剛性マトリクスと同様に求めることができ、次式から求められる。

$$[M_{ASS}] = [A^{-1}]^T \left[\iiint [S]^T \rho [S] dV \right] [A]^{-1} \quad (2.23)$$

で与えられる。

ここで ρ は密度、 $[S]$ は (2.1) 式の函数のマトリクスである。

$[A]$ は座標マトリクスである。

それではどうして有限要素法による質量マトリクスが(223)式のようになるかを以下に証明してみる。

慣性力がする仮想仕事 δW は

$$\delta W = \iiint (\delta \vec{u})^T \rho \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} dV \quad (2.24)$$

ここで $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}$

\vec{r} は位置のベクトル

\vec{r}_0 は変形前の位置のベクトル

\vec{u} は変形量のベクトル

$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ はその加速度である。

これに(2.1)式を代入すれば

$$\delta W = \{\delta \alpha\}^T \iiint [S(x, y, z)]^T \rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} dV \quad (2.25)$$

これに(2.4)式を代入すれば

$$\delta W = \{\delta \vec{u}\}^T [A]^{-1 T} \iiint [S]^T \rho [S] [A]^{-1} \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} dV \quad (2.26)$$

したがって

$$\{F\} = [[A]^{-1}]^T [\iiint [S]^T \rho [S] dV] [A]^{-1} \left\{ \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} \right\} \quad (2.27)$$

一般に慣性力は

$$\{F\} = [M_{ASS}] \left\{ \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} \right\} \quad (2.28)$$

したがって質量マトリクスは

$$[M] = [A]^{-1 T} [\iiint [S]^T \rho [S] dV] [A]^{-1}$$

このように仮想仕事の原理より質量マトリクスが求まるが、実際にこの Consistent Mass Matrix を用いるか、Lumped Mass Matrix を用いるべきかは未だに論争の多いところである。我々は両方のプログ

ラムを開発したが、結果においてはあまり変りがなかった。

仮想仕事の原理により求める質量マトリクスは Consistent Mass Matrix といわれ、TRW Systems の J.S.Archer が考えたものである。1969年9月の日米シンポジウムでは、この Archer と従来の Lumped Mass が良いと考える Clough が真向から対立し、大変興味ある論争となった。

解法上の問題としては、(219)式と(221)式を比較してみれば明らかなおり、Lumped Mass の方が、はるかに楽である。我々の振動解析では低次の固有値が重要であるので、Lumped Mass System を用いても充分である。しかし高次の固有値も必要な場合は、Consistent Mass System を使うべきである。

3. 有限要素法の原子力発電プラントへの応用

有限要素法は大変 Popular になり、各分野に応用されているが、特に原子力発電プラントの解析に用いる場合、次のような merits がある。

① 応用解析と振動解析が同じ Input でできる。

原子力発電プラントは高温高圧のシステムであり、severe な応力状態である。この為正確な応力解析を要求される。

また一方、原子力に関する我が国特有の国民感情により、大地震時にも安全であることが強く要求される。この耐震解析は原子炉建家からウラン燃料棒に至るまでの各機器について計算しなければならない。したがって応力解析と振動解析は共に重要であるが、有限要素法を用いれば両者は同じ Input で計算できるのである。

② 原子力発電プラントは大変複雑なシステムである。

原子力発電プラントは、複雑な形状のものが複雑に組合わされているシステムであり、他の方法で応力、振動解析をやる場合は、大きな仮定なしには解析不能である。

③ 複雑な温度分布がある。

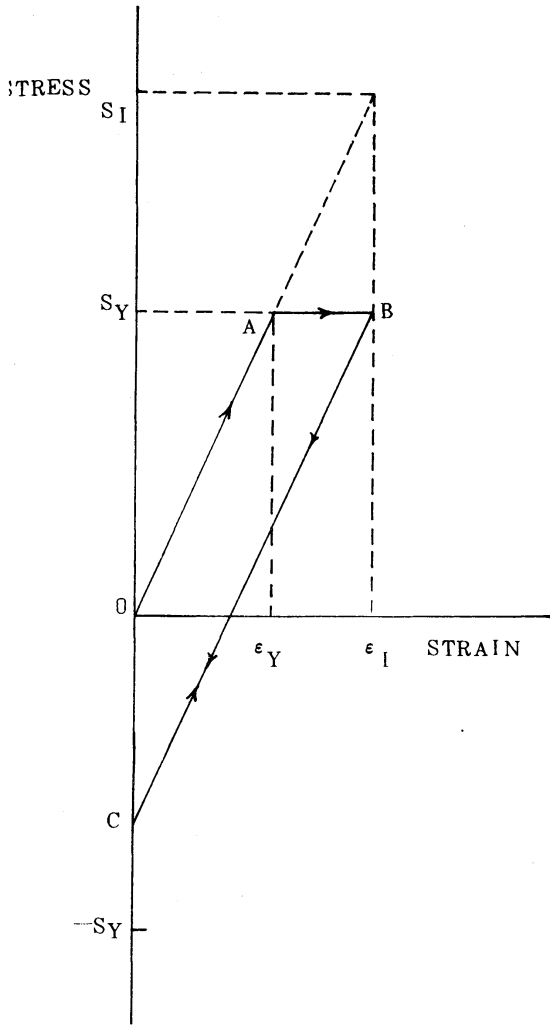
複雑な形状に伴い複雑な温度分布となる。

特に非常停止時などは温度の急激な変化がある。このような場合、温度分布の計算ならびに熱応力解析には有限要素法の独壇場である。

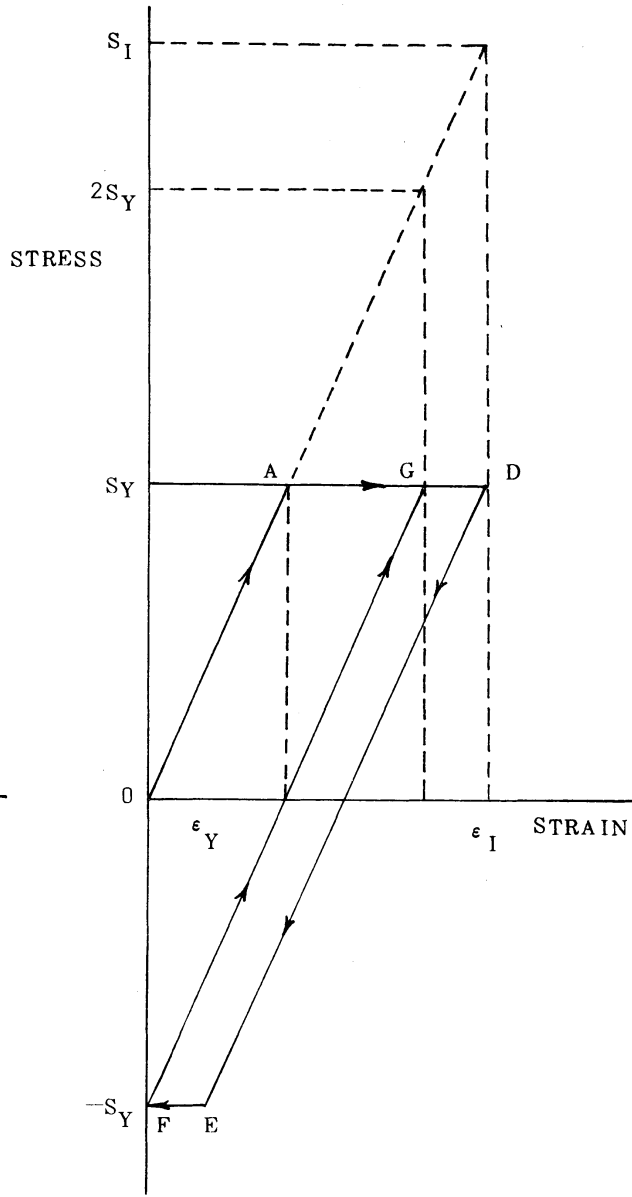
④ 塑性解析が楽である。

弾塑性解析が一度に計算される為、便利である。特に原子炉の設計基準となる ASME Boiler and Pressure Vessel Code の Section III

"Nuclear Vessels" では、shakedown をおこす範囲（つまり 2 倍の Yield Stress をこえない範囲）で塑性設計を許している。



$S_Y < S_I < 2S_Y$
SHAKE — DOWN



$S_I > 2S_Y$
HYSTERESIS CURVE

A. S. M. E. BOILER AND PRESSURE VESSEL CODE
(SECTION-III)
"NUCLEAR VESSELS"

4. 有限要素法のプログラミング上の問題点

① Input の増加

Automatic Cartesian (or Cylindrical) Co - ordinate Generator
により解決している。Irreglnlar なところだけインプットする。インプ
ットミスは Plotter によりチェックする。

② Output の処理

Plotter によって図示する。

Display System の利用。

③ 大次元行列の処理

④ 計算機容量の不足

⑤ 演算時間の問題

⑥ 膨大な計算量による誤差の問題

⑦ 収束性の問題 (反復法の場合等)

⑧ 経済性の問題

5. 原子炉の固有値問題

原子炉を設計する際の基本となる方程式は拡散方程式である。これはある空間(γ)において、あるエネルギーレベルEをもつ中性子の保存の方程式である。

① Diffusion Equation

$$-\text{div} (D^g(\gamma) \text{grad } \phi^g(\gamma)) + \Sigma^g(\gamma) \phi^g(\gamma) = S^g(\gamma), \quad g = 1 \sim G$$

最初の項は、中性子の拡散項である。気体運動論と同様に、中性子は密度の高い領域から低い領域に拡散していく現象がある。マイナスはその領域からのもれをあらわす。

第2項は、他の原子に吸収されたり、他のものと衝突してエネルギーを失ない(またはもらい)、そのエネルギーレベルからはずれてしまう中性子を表わす。右辺は発生する中性子を表わす。その内わけは、核分裂により発生する中性子のうち、 g 群のエネルギーをもって生れた中性子、媒質との衝突により g 群に減速して入ってきた中性子、そして中性子発生源(アンチモン・ベリリウム等。起動時以外ないので考えなくともよい)からの中性子である。

g は各エネルギーレベルの group を表わす。

G . エネルギー群の数(3群, 5群等)

$$\Sigma = \Sigma_a + \Sigma_{\gamma e}$$

$\Sigma_a = \sigma_a N$. 巨視的吸収断面積 (Macro Absorption Cross Section)

σ_a : 核種固有の量 : 微視的吸収断面積 (Micro Absorption Cross Section)

$$\sigma_a = \sigma_c (\text{capture}) + \sigma_f (\text{fission})$$

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_c} : U^{235} \text{ 非常に大, } U^{238} \text{ は非常に小さい。}$$

$$U^{235} \sim 700 \text{ barns}$$

$$U^{238} \sim 20 \text{ barns}$$

Σ_a, σ_a : 吸収 (absorption)

$\Sigma f, \sigma f$: 分裂 (fission)

$\Sigma \gamma_e$: 減速断面積 ($\Sigma g \rightarrow g+1 + \Sigma g \rightarrow g+2 + \dots + \Sigma g \rightarrow G$)

Σ : cm^{-1}

σ : $cm^2 / \text{nucleus}$, 1 barn = $10^{-24} cm^2 / \text{nucleus}$

N: 数密度 nucleus / cm^3

低濃縮ウランでは, U^{235} が 2 ~ 4 % で U^{238} が 98 ~ 96% である。

ϕ : 中性子束 (Neutron Flux) neutron / $cm^2 \cdot sec$

$\phi = n \times v$ 普通多群理論では $\phi^g = \int_{\phi_{low}^g}^{\phi_{up}^g} \phi(E) dE$

n: 中性子密度

v: 中性子速度

D: 拡散係数 (Diffusion Coefficient)

$\epsilon = \frac{\text{全発生中性子数 (熱領域 + 熱領域以上)}}{\text{熱領域で発生する中性子数}}$

≈ 1.03

ν : 核分裂当り発生する中性子数

≈ 2.43 (普通 2 個か 3 個であり, ν はその平均値)

$U-235, Pu-239, U-233$ で若干の差異がある。

DB^2 : もれ (B: バックリング)

(二次元平板の場合高さ方向のもれ)

χ : 分裂スペクトル $\sum_{g=1}^G \chi^g = 1$

(中性子が新しく発生した時のエネルギーレベルの分布)

$\Sigma^{g' \rightarrow g}$: エネルギーレベル g' から g への散乱断面積

$$S^g(\gamma) = \frac{1}{\lambda^g} \chi^g \phi(\gamma) + \sum_{g' \neq g}^G (\Sigma^{g' \rightarrow g}(\gamma) \phi^{g'}(\gamma))$$

$$\phi(\gamma) = \sum_{g=1}^G (\nu \Sigma_f(\gamma)^{g'} \phi^{g'}(\gamma))$$

② Eigenvalue for Atomic Reactor

原子力発電プラントは核分裂時に発生するエネルギーを熱に変えて発電するものである。核分裂はウラン235に遅い熱中性子(0.625 eV以下)がぶつかって起きる。その時エネルギーと同時に新しい中性子も発生する。この中性子が次のウラン235に当たれば次々と連鎖反応がおこる。こうして中性子がふえていく状態が超臨界である。新しく発生する中性子は普通2個か3個で平均2.4前後である。この新しい中性子がウラン238に吸収されたり、もれたりしてなくなってしまうと連鎖反応がおこらない。これが未臨界で、普通中性子源を入れて中性子数を一定にする。新しく発生する中性子と吸収される中性子の比が1のところを臨界となる。

$$\lambda = \frac{\text{中性子発生}}{\text{中性子吸収}} = \frac{\int \nu \Sigma_f \phi d\gamma dE}{\int \Sigma_a \phi d\gamma dE + DB^2}$$

原子炉の運転は、この固有値 λ が常に1.0になるように制御している。ここで固有値 λ を知ることが重要な問題となる。

③ Peaking Factor

固有値 λ と共に、Neutron Flux(ϕ)も重要である。これは、原子炉の中で核分裂する数をなるべく一様にしたいことによる。つまり $\int \Sigma_f \phi(\gamma) dE$ をなるべく一様にしたいのである。

$$P_{\max} = (\Sigma_f \phi)_{\max} / \overline{\Sigma_f \phi}$$

$\overline{\Sigma_f \phi}$ は炉心全体の平均を表わす。

Pはピーキング係数 (Peaking Factor) である。

沸騰水型原子炉の炉心では普通

ウラン燃料棒内で	P = 1.2
炉心の半径方向で	P = 1.405
炉心の高さ方向で	P = 1.5

程度である。

④ Eigenvalue Equation

拡散方程式を解く際，理論解を入れて解いていく方法や，差分によって解く方法等がある。

今差分によりマトリクスで表わすと，

$$\text{拡散方程式の核分裂以外の項} = \mathbb{M} \{ \phi \}$$

$$\text{拡散方程式の核分裂の項} = \mathbb{S} = \lambda \mathbb{F} \{ \phi \}$$

という形に表わせる。

$$\mathbb{M} \{ \phi \} = \lambda \mathbb{F} \{ \phi \}$$

or

$$[\mathbb{M} - \lambda \mathbb{F}] \{ \phi \} = \{ 0 \}$$

ここで \mathbb{F} は対角行列

\mathbb{M} は 1 次元で対角を含み 3 行の対角行列

2 次元で " 5 "

3 次元で " 7 "

以上原子炉の固有値問題では，物理的な内容はちがっているが，結局同じ固有値方程式となる。したがって有限要素法による振動方程式の解と同様に解くことができるのである。

⑤ 解 法

原子炉の固有値解析の Eigenvalue Eqn. は，物理的内容はちがっていても，振動解析のものと同じである。したがって解法も同じようにすることができる。解法は Iteration で Successive Over Relaxation を用いていて，加速係数は Chebyshev Polynomial の根としている。

6. 解析法

(1) Band Width Method

Gauss の方法を使っている為、時間は少々かかるが安定した解が得られる。

37,750 元の行列 (バンド幅 70) まで解いている。

(2) Direct Method From Element Matrices by using Conjugate Gradient Method

Element Stiffness Matrices からそのまま解く方法で、Large Sparse Matrix をつくらないですむ。Non-Linear Iteration Method の Conjugate Gradient Method で解く。

これは Case Western Reserve Univ. (U.S.A.) の Dr. R.L. Fox の論文によるものである。(文献②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑩参照)

この方法の Original は Eigenvalue Analysis である。一次固有値については Energy Method で解き、高次については Lagrange - Rayleigh Function を導入して解いている。

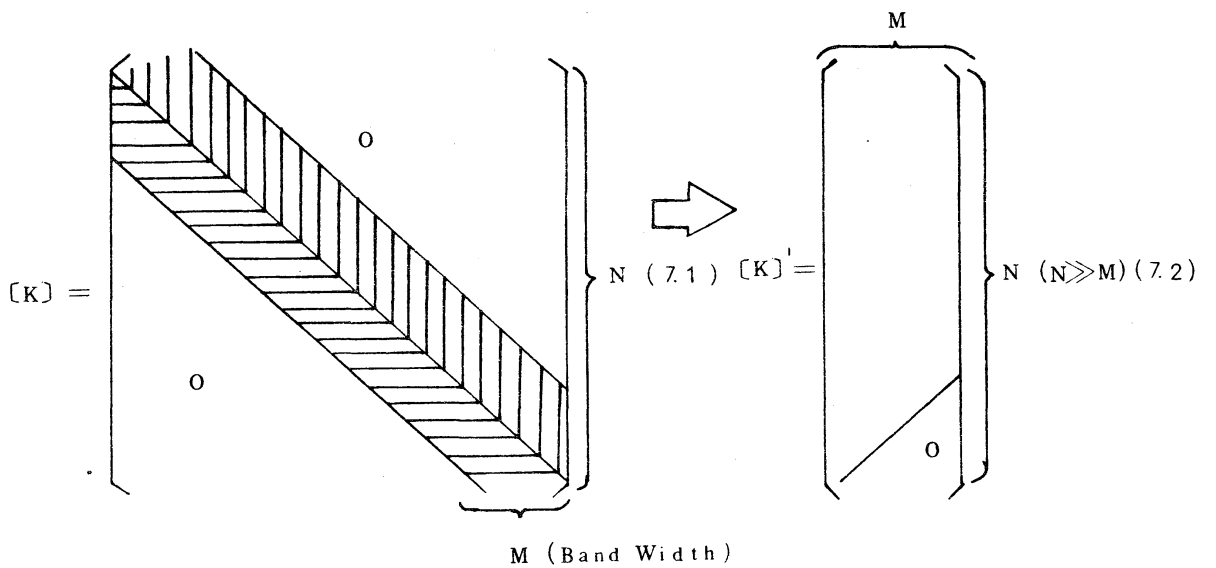
10,000 元で計算時間 15 分程度である。

7. Band Width Method

(1) 応力解析

一つの要素内の Nodal Number を、ある数以内におさえるように番号を振り分ける。このようにすると剛性マトリクスの Non-Zero Element はある幅の内だけにかたまる。

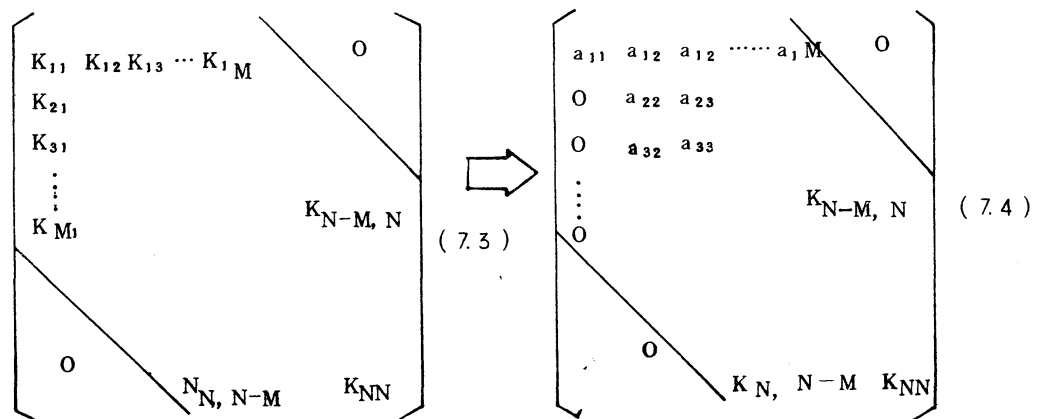
これを計算機に記憶させて容量を少なくする方法である。



(2) 固有値解析

これも同様に剛性マトリクスを Band で記憶させておく。

演算方法は



この同じ操作をくりかえして対角のみに値が残るようにする。このマトリクスは結局、固有値 λ の N 次方程式となる。

$$F(\lambda) = C_0 + \sum_{i=1}^N C_i \lambda^i \quad (7.5)$$

このグラフを描くと

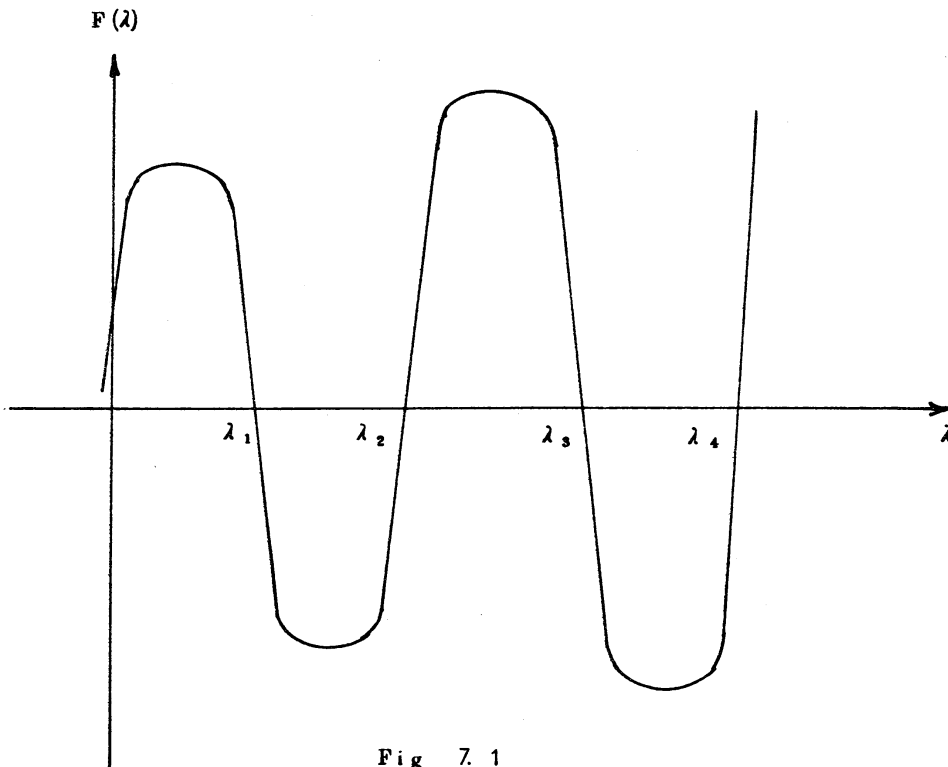


Fig 7.1

この $F(\lambda)$ の根が固有値である。

連続体の振動方程式

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho A} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left(EI \frac{\partial^2 X}{\partial Z^2} \right) \quad (7.6)$$

などの理論解では

$$X = (A \sin \zeta t + B \cos \zeta t) (C \sin \xi Z + D \cos \xi Z + E \cosh \xi Z + F \sinh \xi Z) \quad (7.7)$$

この場合のように Hyperbolic Function が入ってくると、 $F(\lambda)$ は Fig

7.1 のようにはならず, Fig 7.2 のように発散する可能性もある。

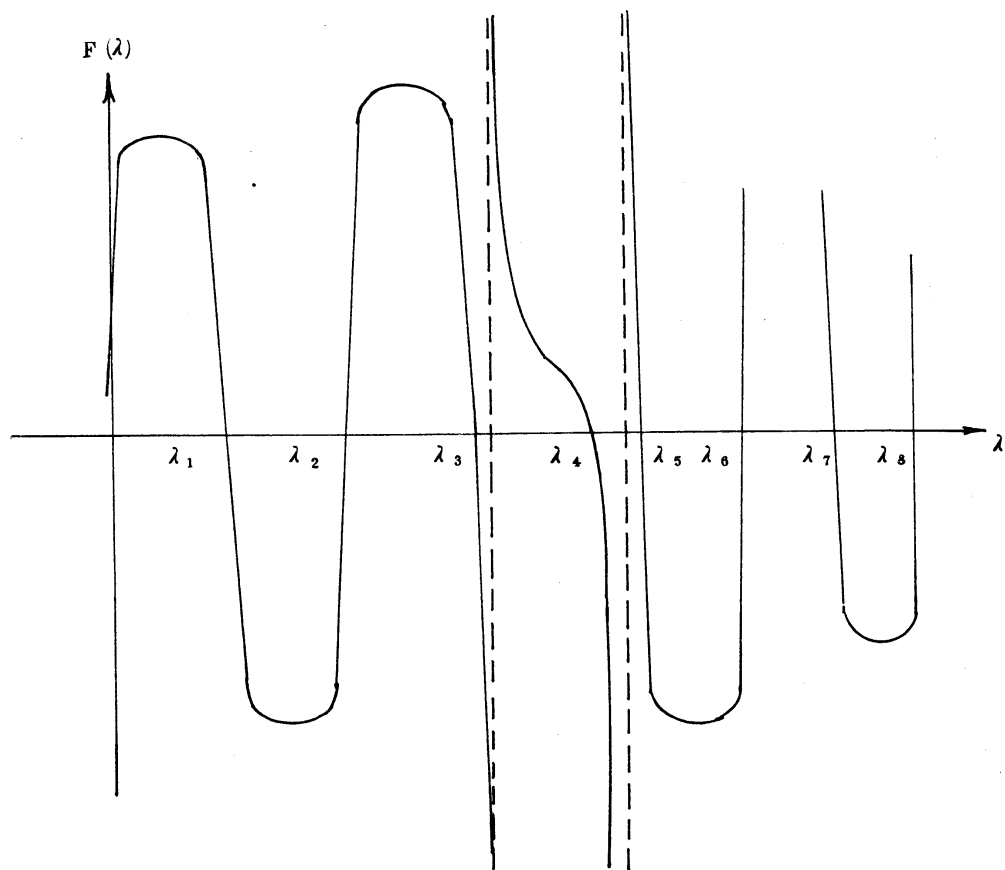


Fig 7.2

このような場合, 根をはさんで近づけていくと $F(\lambda)$ が発散していく為
固有値はその間にないことがわかる。

8. Direct Method by Element Matrix

(1) 固有値問題

① Energy Method

固有値は Rayleigh Quotient より

$$\lambda = \frac{\{\chi\}^T \mathbf{K} \{\chi\}}{\{\chi\}^T \mathbf{M} \{\chi\}} \quad (8.1)$$

この固有値の式をみると，計算上 Stiffness Matrix と Mass Matrix はわかれている。

$$\left(\begin{array}{l} \text{一般の固有値方程式はそれらは独立でない。} \\ [\mathbf{K} - \mathbf{M}\lambda] \{\chi\} = \{0\} \end{array} \right) \quad (8.2)$$

したがってこの Rayleigh Quotient を使えば，全体の Stiffness and Mass Matrix をつくる必要はない。

即ち，

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^N \{\chi\}_k^T \mathbf{K}_k \{\chi\}_k}{\sum_{k=1}^N \{\chi\}_k^T \mathbf{M}_k \{\chi\}_k} \quad (8.3)$$

k : 要素番号

N : 全要素数

② Application of Conjugate Gradient Method

$$R(\chi) = \frac{\{\chi\}^T \mathbf{K} \{\chi\}}{\{\chi\}^T \mathbf{M} \{\chi\}} \quad (8.4)$$

$R(\chi)$ を最小にするベクトル $\{\chi\}$ をみつければ，それが Eigenvector であり，それを代入して得られる $R\{\chi\}$ が Eigenvalue となる。

- Gradient of the function $\{\Delta R\}$

$$\begin{aligned} \{\Delta R\} &= \frac{\text{函数値の変化}}{\text{ベクトルの変化}} \\ &= \frac{2 \{K\} \{x\} - R(x) \{M\} \{x\}}{\{x\}^T \{M\} \{x\}} \end{aligned} \quad (8.5)$$

- Direction of Move $\{S\}$

$$\{G\} = \{\Delta R(x)\} \quad (8.6)$$

$$\{S\} = -\{G\} \quad (8.7)$$

- Step Length along the vector $\{S\}$

$$\alpha = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 - 4U \cdot W}}{2U} \quad (8.8)$$

ここで,

$$U = (\{S\}^T \{K\} \{S\}) (\{x\}^T \{M\} \{S\}) - (\{x\}^T \{K\} \{S\}) (\{S\}^T \{M\} \{x\}) \quad (8.9)$$

$$V = (\{S\}^T \{K\} \{S\}) (\{x\}^T \{M\} \{x\}) - (\{x\}^T \{K\} \{x\}) (\{S\}^T \{M\} \{S\})$$

$$W = (\{x\}^T \{K\} \{S\}) (\{x\}^T \{M\} \{x\}) - (\{x\}^T \{K\} \{x\}) (\{x\}^T \{M\} \{S\})$$

- Iteration

$$\{x_{i+1}\} = \{x_i\} + \alpha_i \{S_i\} \quad (8.10)$$

$$\{G_{i+1}\} = \{\Delta R(x_{i+1})\} \quad (8.11)$$

$$\beta = \frac{\{G_{i+1}\}^2}{\{G_i\}^2} \quad (8.12)$$

$$\{S_{i+1}\} = -\{G_{i+1}\} + \beta_i \{S_i\} \quad (8.13)$$

- Convergence Condition

$$\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^n (\{x_j\}_{i+1}^2 - \{x_j\}_i^2)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \{x_j\}_i^2}} < \epsilon \quad (8.14)$$

③ 高次振動固有値 (Higher Eigenvalue)

以上のような方法で、第一次の固有値は求められる。しかし、Energy Method では、第一次の固有値のみしか求められない。ここで第二次以上の固有値を、求めたい次数まで得る為に、Lagrange - Rayleigh Function を導入する。 ℓ 次の固有値を L_ℓ とする。

Lagrange - Rayleigh Function

$$L_\ell = R(x) - U_1 (\{x\}^T \{e\} - 1) - \sum_{i=2}^{\ell} U_i \{x\}_\ell^T M \{x\}_{(i-1)} \quad (8.15)$$

U は Lagrange Multiplier である。

$$\{U\} = ([NL]^T [NL])^{-1} [NL]^T \{G\} \quad (8.16)$$

$$[NL] = [\{e\}, \{M\{x\}_I\}, \{M\{x\}_{II}\}, \dots, \{M\{x\}_{\ell-1}\}]$$

高次固有値を求める為の Iteration を行なう場合、初期ベクトルとして任意のベクトルを仮定することはできない。例えば ℓ 次の固有ベクトルは、1次から $(\ell - 1)$ 次のベクトルまでのすべてと直交していなければならない。

つまり、

$$\{x\}_\ell^T \{e\} = 1 \quad (8.18)$$

直交条件は $(\ell - 1)$ 個の方程式となり

$$\{x\}_\ell^T M \{x\}_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, \ell-1) \quad (8.19)$$

Iteration を行なう場合、そこで仮定するベクトルは、必ず(8.18)(8.19)式を満足する $\{x\}_\ell$ でなければ、物理的にナンセンスとなる。つまり、(8.17)式で定義したマトリクス $[NL]$ と直交していなければならない。

$$[N]^T \{y\}_R = 0 \quad (8.20)$$

今任意のベクトルを $\{y\}$ とした。このベクトル $\{y\}$ から直交してい

ない要素を除いて, $[M]\{\chi\}_j, (j=1, 2, \dots, \ell-1)$ の各ベクトルに直交しているベクトル $\{y\}_R$ をつくればよいことになる。つまり,

$$\{y\}_R = \{y\} - [N] \{U\} \quad (8.21)$$

(8.21)式に $[N]^T$ を前からかけて, (8.20) 式を代入すれば

$$\begin{aligned} [N]^T \{y\}_R &= [N]^T \{y\} - ([N]^T [N]) \{U\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.22)$$

したがって

$$\{U\} = ([N]^T [N])^{-1} [N]^T \{y\} \quad (8.23)$$

となる。これを (8.21) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \{y\}_R &= \{y\} - [N] ([N]^T [N])^{-1} [N]^T \{y\} \\ &= ([I] - [N] ([N]^T [N])^{-1} [N]^T) \{y\} \end{aligned} \quad (8.24)$$

$[N]$ は各次数のベクトルから成っており, 各々が Linearly Independent であるから Non-Singular でつまり $([N]^T [N])$ の逆マトリクスは必ず存在する。第一次の固有値を求める際の勾配ベクトル $\{\Delta R(\chi)\}$, つまり $\{G\}$ から (8.18), (8.19) 式を満足する勾配ベクトル $\{G\}_R$ を求めるには (8.24) 式を用いればよい。

$$\{G\}_R = ([I] - [N] ([N]^T [N])^{-1} [N]^T) \{G\} \quad (8.25)$$

つまり第二次以上の高次の固有値を求めるには, (8.5), (8.6) 式の $\{G\}$ のかわりに, (8.25) 式の $\{G\}_R$ を使えばよい。(8.15) 式の "Lagrange-Rayleigh Function" が極値をとる時には

$$\begin{aligned} \{\Delta L_\ell\} &= \{\Delta R\} - U_1 \{e\} - \sum_{i=2}^{\ell} U_i [M]\{\chi\}_{i-1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.26)$$

これをマトリクスで表わせば

$$\{\Delta L_{\ell}\} = \{G\} - [N_{\ell}]\{U\} = 0 \quad (8.27)$$

これに (8.16) 式を代入すれば

$$\begin{aligned} \{\Delta L_{\ell}\} &= \{G\} - [N_{\ell}]([N_{\ell}]^T[N_{\ell}])^{-1}[N_{\ell}]^T\{G\} \\ &= (\{I\} - [N_{\ell}]([N_{\ell}]^T[N_{\ell}])^{-1}[N_{\ell}])\{G\} \end{aligned} \quad (8.28)$$

この右辺は (8.25) 式と全く同じである。したがって

$$\{\Delta L_{\ell}\} = \{G\}_R \quad (8.29)$$

ここで (8.15) 式に (8.18), (8.19) 両式を代入すれば

$$L_{\ell} = R(\chi) \quad (8.30)$$

つまり “Lagrange - Rayleigh Function” は Rayleigh Quotient と等しいことがいえた。また Iteration の際は (8.25) 式の $\{G\}_R$ を用いれば, “Lagrange - Rayleigh Function” の勾配ベクトルとなるのである。これらを使って第一次固有値と同じ操作を反復すれば, 高次固有値も求められる。

この方法によれば, Mass Matrix $[M]$ や Stiffness Matrix $[K]$ の大次元行列をつくる必要はなくなる。

これらのマトリクスは, (6×6) 又は (12×12) 又は (24×24) 等の要素のマトリクスでよいことになる。また Jacobi 法その他のように全部の固有値が求まるのでなく, 自分のほしい次数まで求めることができる。これらの点からこの方法は, 大次元行列の固有値解析には大変有効な方法であると考えられる。

(2) 応力解析

一般の Conjugate Gradient Method でやるが, これも Element Sti-

Stiffness Matrix のみから応力を求める。

$$\{F\} = [K] \{x\} \quad (8.31)$$

○ Iteration

$$\{x\} = \{x\} + \alpha \{S\} \quad (8.32)$$

$$\{G\} = \{\{F\} - [K] \{x\}\} \quad (8.33)$$

$$\alpha = \frac{\{S\}^T \{G\}}{\{S\}^T [K] \{S\}} \quad (8.34)$$

初期勾配ベクトル (Initial gradient Vector)

$$\{S_1\} = \{G_1\} \quad (8.35)$$

2 回目以降

$$\{S\}_{i+1} = \{G\}_{i+1} + \beta_i \{S\}_i \quad (8.36)$$

$$\beta_i = \frac{\{G\}_{i+1}^T \{G\}_{i+1}}{\{G\}_i^T \{G\}_i} \quad (8.37)$$

これにより求まる $\{G\}_i$ は $\{G\}_i$ から $\{G\}_{i-1}$ と直交していることが証明される。つまり

$$\{G_i\}^T (\{G\}_1, \{G\}_2, \dots, \{G\}_{i-1}) = 0 \quad (8.38)$$

N 次元空間で直交する $\{G\}$ は $\{G_1\}$ から $\{G_N\}$ の中に必ず存在する。つまり“まるめの誤差”がない限り，最大限 N 回の反復で必ず収束する。大次元行列では，この反復回数が N に比べ大変少ないので，計算時間は早いものである。

これも固有値問題と同様，Stiffness Matrix $[K]$ は全体の合成したものでなく，要素のマトリクスである。(8.31)式から(8.37)式までの演算をみれば， $[K]\{x\}$ ， $[K]\{S\}$ または $\{S\}^T [K] \{S\}$ というベクトルとの

演算であり， $[K]$ のみの計算はない。この為全体のマトリクスをつくる必要はないのである。普通の方法では

$$\{F\} = \{[K]_1 + [K]_2 + \dots + [K]_n\} \{x\}$$

$$= \left[\begin{array}{c} K \\ \vdots \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} x \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (8.39)$$

(数万) × (数万)

という式になる。

我々の方法ではベクトルの側の操作により

$$\{F\} = [K]_1 \{x\} + [K]_2 \{x\} + \dots + [K]_n \{x\} \quad (8.40)$$

↑
24 × 24 (or 12 × 12)

ここでベクトル $\{x\}$ は数萬元である。この両者の容量的な差は数萬元の2乗の数萬元の1乗の差である。したがって，この Direct Method from Element Matrices using Conjugate Gradient Method は大次元行列の解法に大変有効な方法である。

9. 解 析 例

以上述べてきた方法により，実際に解析した結果をここに載せておく。
例は次のものである。

- ① 振動問題（理論解との比較）
- ② 光弾性実験との比較
- ③ Timoshenko 問題
- ④ Nozzle Box の応力解析
- ⑤ 原子力発電所の Concrete Vessel の応力解析
- ⑥ 原子炉圧力容器（Reactor Pressure Vessel）と原子炉格納容器（Drywell）の応力解析
- ⑦ 原子炉建家の熱応力解析

ELEMENT SHAPE

TWO DIMENSION

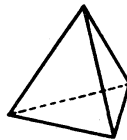


TRIANGLE

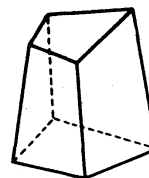


QUADRILATERAL

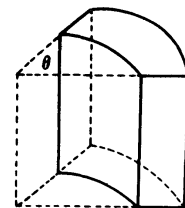
THREE DIMENSION



TETRAHEDRON

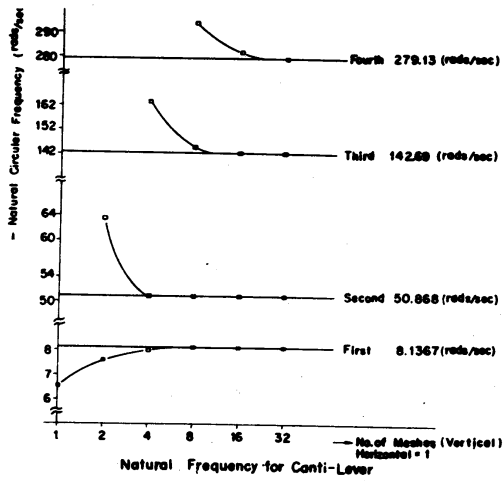
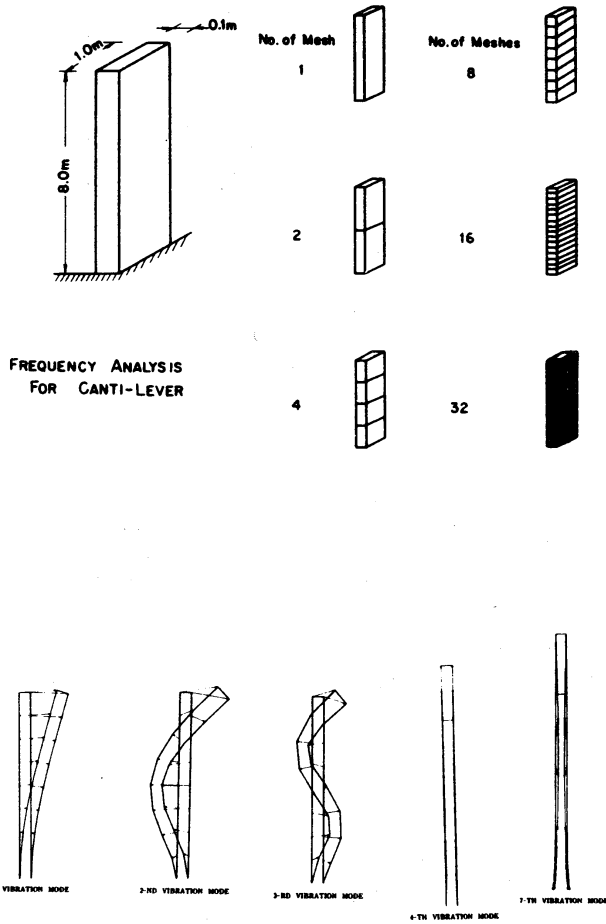


HEXAHEDRON

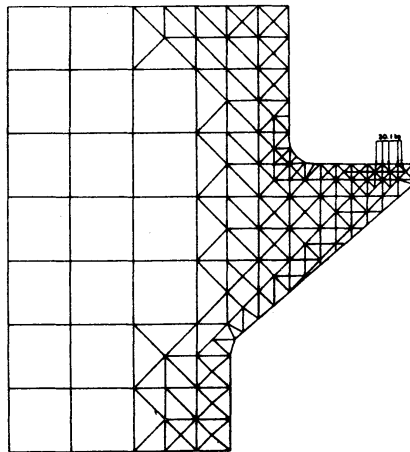
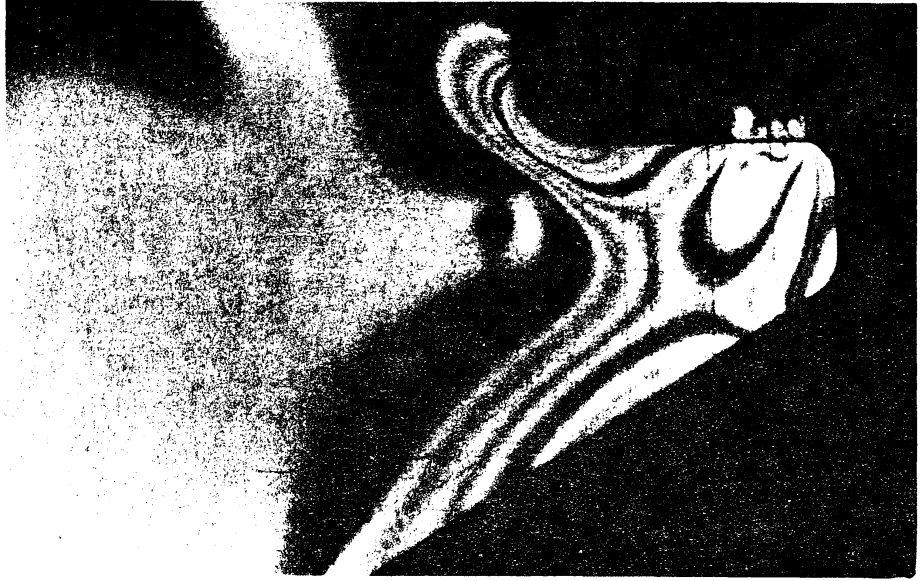


SECTOR PRISM

① 振動問題（理論解との比較）



② 光弾性実験との比較



ORIGINAL MESHES FOR
PHOTO ELASTICITY SAMPLE
(256 ELEMENTS, 172 NODAL POINTS)

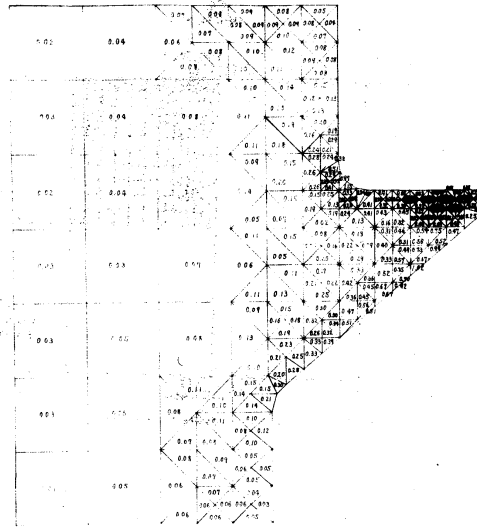
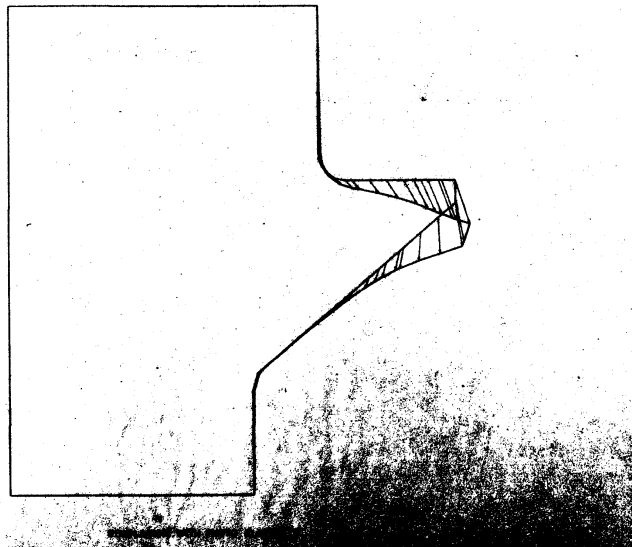
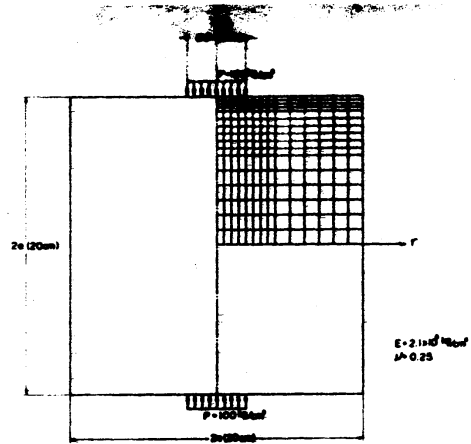


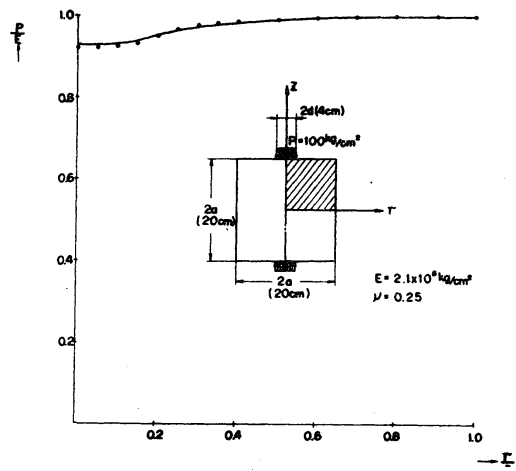
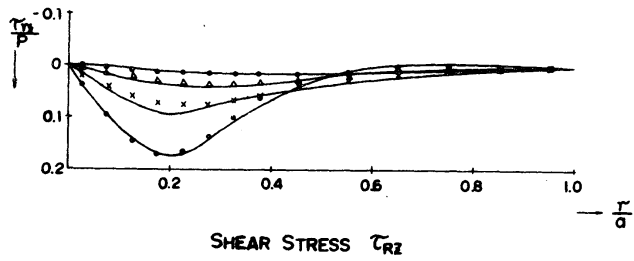
PHOTO ELASTICITY
STRESS ANALYSIS



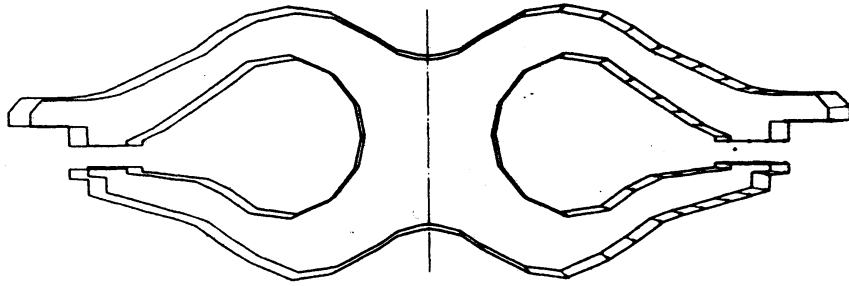
③ Timoshenko 問題



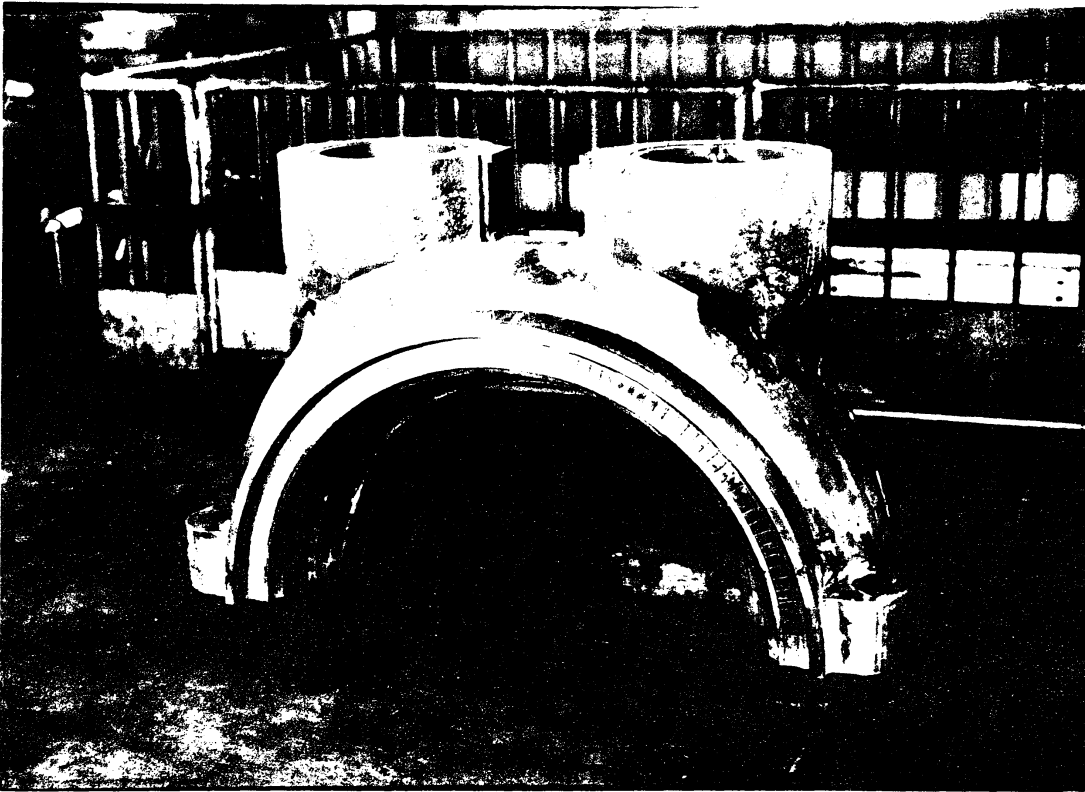
- -- $Z = 0.2a$
- △ -- $Z = 0.4a$
- × -- $Z = 0.6a$
- -- $Z = 0.8a$



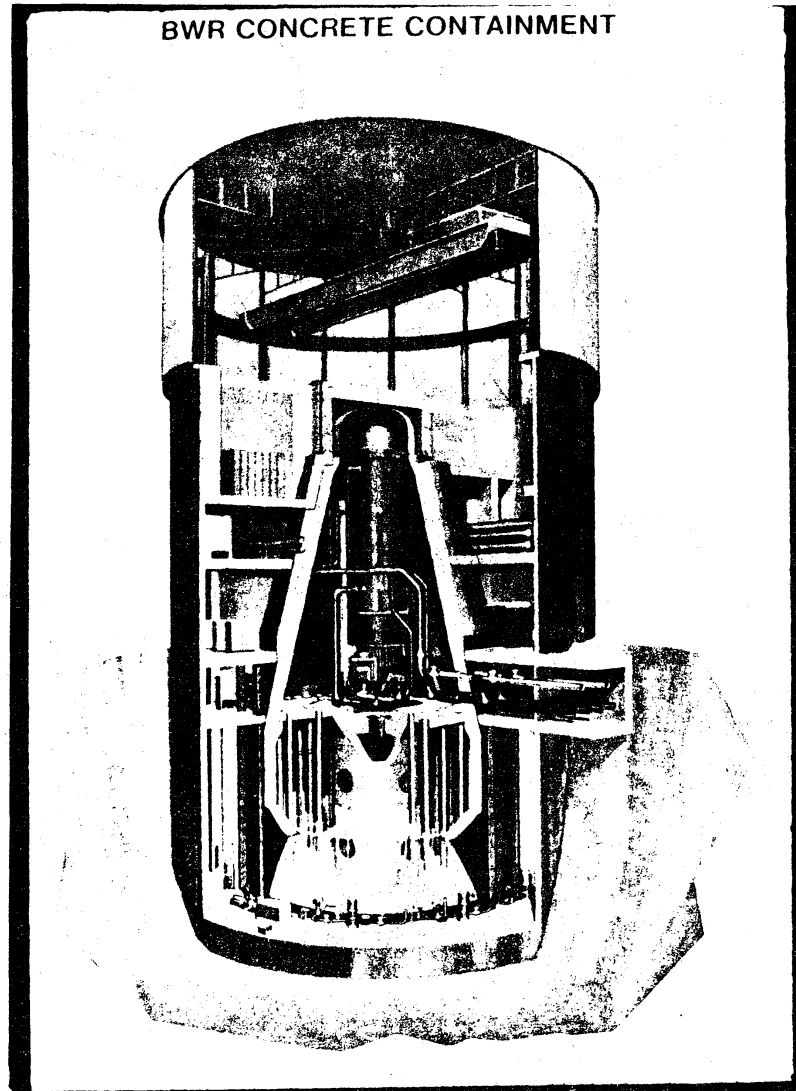
④ Nozzle Box の応力解析

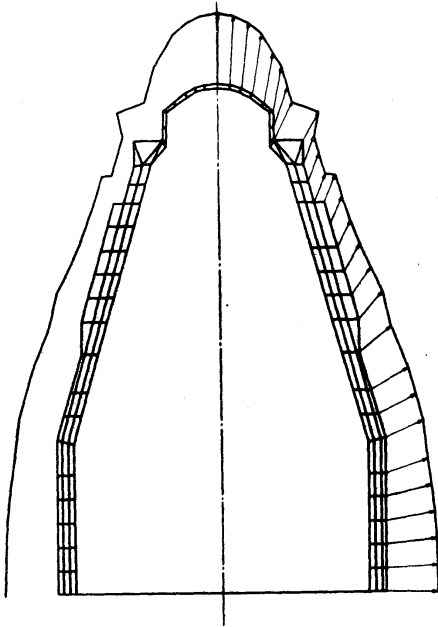


STRESS ANALYSIS
(PRESSURE;THERMAL)
TURBINE NOZZLE BOX

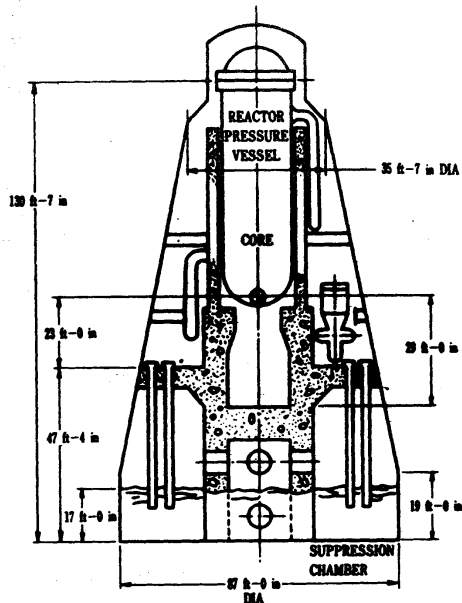


⑤ 原子力発電所の Concrete Vessel の応力解析



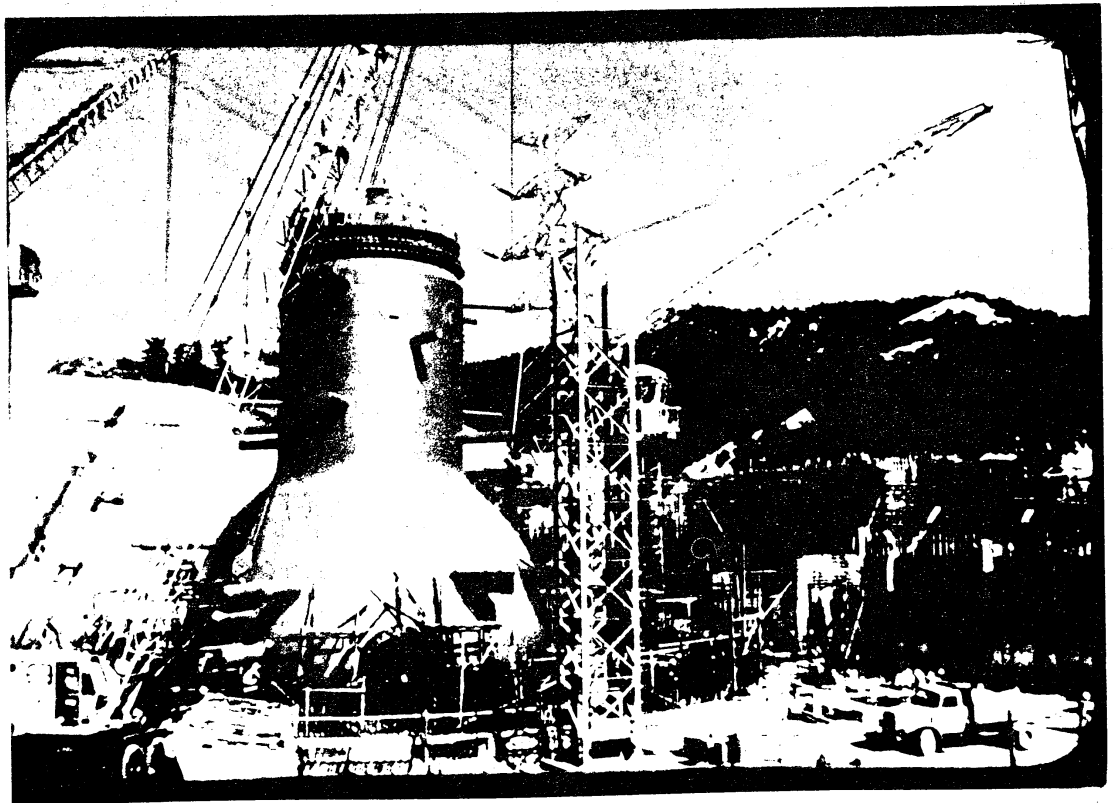
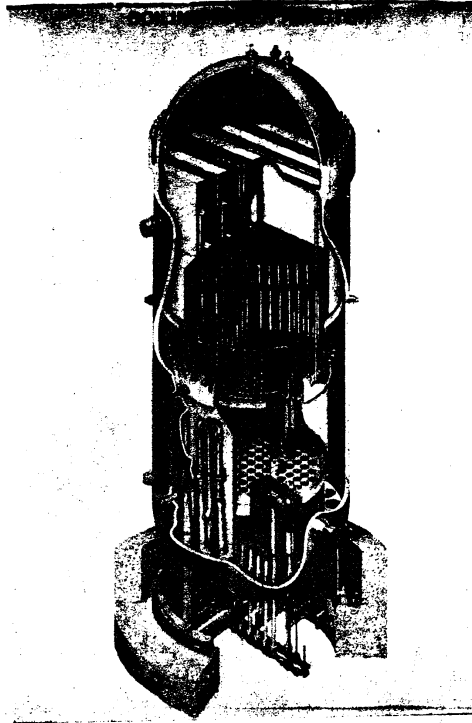


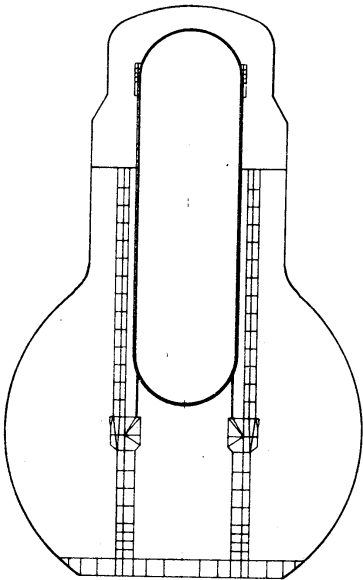
STRESS ANALYSIS
 (PRESSURE, THERMAL, GRAVITY)
 ATOMIC REACTOR CONCRETE CONTAINMENT



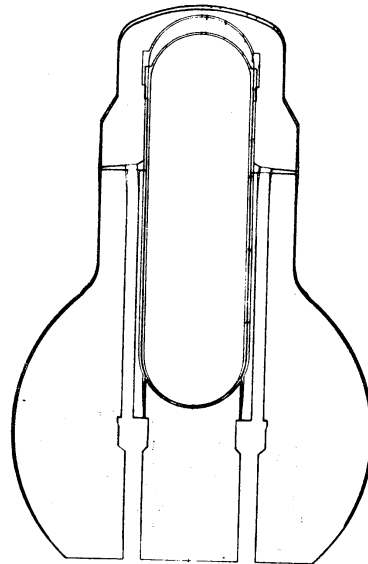
NEW TYPE ATOMIC REACTOR
 CONCRETE CONTAINMENT
 (780 MW)

⑥ 原子炉圧力容器と格納容器の応力解析（熱，圧力，自重）



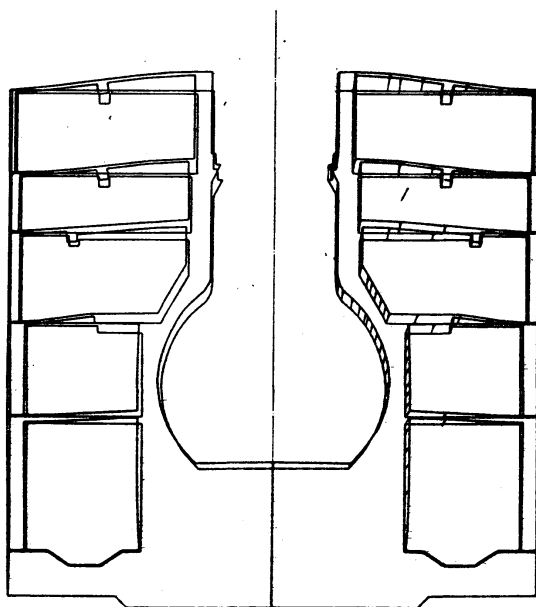


STRESS ANALYSIS
(THERMAL, PRESSURE, GRAVITY)
REACTOR PRESSURE VESSEL
PRIMARY CONTAINMENT VESSEL
SHIELD WALL PEDESTAL

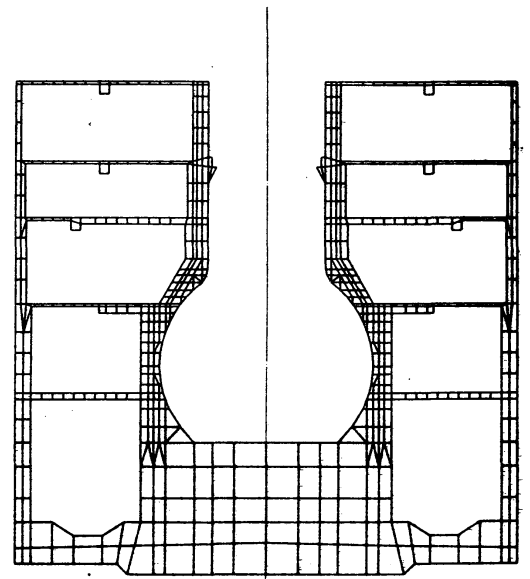


STRESS ANALYSIS
THERMAL, PRESSURE, GRAVITY
RPV PCV SHIELD WALL

⑦ 原子炉建家の熱応力解析



THERMAL STRESS ANALYSIS
ATOMIC REACTOR BUILDING



ORIGINAL MESHES FOR
ATOMIC REACTOR BUILDING
(500 ELEMENTS, 400 NODAL POINTS)

10. 結 論

有限要素法は航空機産業からはじまり，土木，建築，造船，電気，機械，原子力，そして医学の分野に至るまで急速に発達している。

一方有限要素法が誕生してからまだ日も浅く，多くの問題点のあることも事実である。

しかし電子計算機の大型高速化により，今後構造解析の分野等で主流をなすことはまちがいないといわれている。特に原子力発電プラントは，非常に複雑なシステムであり，荷重条件もむずかしい。この為有限要素法の出現により，その正確な解析が可能となった。

また，プログラムは大変汎用性があり，大変便利である。しかし有限要素法で，いろいろなものが解析できるからといって，簡単にモデル化でき，従来の方法で解けるものまでも，有限要素法で詳しく計算する必要はないと思われる。

この方法の創始者の一人である Martin 教授 (Univ of Washington) 自身，日米シンポジウムの席上次のように述べている。

" Don't use the elephant gun to shoot a rabbit. "

同様のことを NASA の研究所のヘッドである Dr. Fulton も述べていた。
" 我々は有限要素法を開発しているが，同時に Rayleigh - Ritz の方法や Newton 法なども充分に見直すべきである。 "

将来の方向としては，計算機の発達と共に，いよいよ複雑な系の解析が可能となるであろうが，Gallagher 教授 (Cornell Univ.) はその方向として4つあげている。

① 混 合 問 題

熱力学，熱伝達，粘性流体，非線型振動論等の組合せ問題

② 境界条件の多様化

③ 振 動 問 題

動的解析の簡素化

④ 非線型問題

Geometrical Non - Linearity

Material Non - Linearity

以上のような点が今後大いに発展していくと思われる。また、これ以外の分野でも大いに発展していくであろう。一例として、脳溢血の原因である血管中のコレステロールの解析などにも、この有限要素法がすでに応用されている。

有限要素法は以上のように大変有用な方法であるが、その最大の問題点は、大次元行列をいかに解くかという点にある。

筆者は3万7千元までの行列を解いているが（これをジャンボ級行列と称している）、それでも原子力発電プラントのような複雑なシステムを解析する場合、不足を感ずることも多いのである。それと共に計算機の容量、演算時間、誤差の問題がある。我々エンジニアとしては、経済性の問題も考えなければならない。しかし一番問題なことは精度の問題である。

現在超大型計算機の開発も進み、1億バイト、40ナノセカンドというような Computer も現われつつある。

今後その開発も進んでいくと考えられ、Computerの容量や時間はそれほどの Neck ではなくなるのではないかと考えている。したがって今後の最大の問題点は、大次元行列をいかに精度よく解くかという点にある。

筆者は数万元というオーダーの大次元行列を解く方法として、ここに述べたように Band Width Method と Direct Method From Element Matrix を使っている。両者共 Large Matrix の解法としては、すぐれている方法である。

これらの方法にも当然問題点もあるが、筆者は近いうちに、有限要素法による3次元応力解析コードで、5万元から10万元程度の行列を解いてみたいと思っている。

文 献

1. "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures"
Ray W. Clough (Univ. of California, Berkeley)
H.C. Martin (Univ. of Washington, Seattle)
Turner (Boeing Aircraft Co.)
2. "A Minimization Method for the Solution of the Eigenproblem
Arising in Structural Dynamics"
R.L. Fox (Case Western Reserve Univ.)
3. "Developments in Structural Analysis by Direct Energy Minimization"
R.L. Fox
E.L. Stanton (Case Western Reserve Univ.)
(AIAA Journal)
4. "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization"
R. Fletcher (Univ. of Leeds)
M.J.D. Powell
5. "New Iterative Methods for Solution of the Eigenproblem"
W.W. Bradbury (Rolls Royce Ltd.)
R. Fletcher
(Numerische Mathematik)
6. "Function Minimization by Conjugate Gradients"
R. Fletcher
C.M. Reeves (Univ. of Leeds)
7. "Theory of Elasticity"
S. Timoshenko (Univ. of Michigan, Stanford Univ.)

J.N. Goodier

(MC Grow Hill)

8. "Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics"
Ping Chun Wang (Polytechnic Institute of Brooklyn)
(John Wiley and Sons, Inc.)
9. "Japan U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis
and Design."
Ray W. Clough (Univ. of California, Berkeley)
T.H.H. Pian (M.I.T.)
H.C. Martin (Univ. of Washington)
J.S. Archer (TRW Systems)
R.H. Gallagher (Cornell Univ.)
and others
10. " F.E.M. 法の弾塑性論 "
宮 本 博 (東大)
三 好 俊 郎 (東大)
11. " 計算機の為の数値計算 "
宇 野 利 雄 (日大)
(朝倉書店)
12. " 3次元弾性論 "
宮 本 博
(裳華房)
13. " 大次元行列に関する研究会報文集 "
平 野 菅 保 (東芝) 他
東京大学大型計算機センター
14. " 殻構造の有限要素解析 " 川井忠彦 (東大)