

体心，面心立方格子グリーン函数と
複素数値の完全階円積分の計算

東北大工，*理 岸田徹，*堀口剛

体心立方格子系のグリーン函数の原点での値は

$$G(t) = \frac{1}{\pi^3} \int_0^\pi dx \int_0^\pi dy \int_0^\pi dz \frac{1}{t - \cos x \cos y \cos z}$$

で与えられる。この値は $t > 1$ においては第一種完全階円積分 $K(k)$ を用いて

$$G(t) = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{t} K(k)^2 \quad (1)$$

$$k = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (2)$$

と表わされることが知られている。¹⁾ $t > 1$ の複素数 t は $0 < k < 1$ の範囲での $K(k)$ は算術幾何平均法により計算することができる。²⁾ $t = s - i\epsilon$ ($\epsilon \geq 0$), $0 < s < 1$ とすると k の値は複素数値を取る。したがって、もし複素数値の k に対する $K(k)$ が計算されれば、体心立方格子グリ

一函数の原素の値は $0 < s < 1$ でも上式により計算できることになる。

筆者等は算術幾何平均法が複素母数の場合にも使えることを確かめた。すなわち、 π 一種完全階円積分の場合

$$K(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2a_N} \quad (3)$$

ただし a_N は

$$a_0 = 1 \quad b_0 = k' = (1 - k^2)^{1/2} \quad (4)$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = (a_{n-1} b_{n-1})^{1/2}$$

により与えられる。ただし平方根の偏角は常に $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間を取るものとする。収束は、 $K(k)$ と $\pi/(2a_N)$ の差を 10^{-12} におさえるためには N を

$$10^{-1} < |k'| < 10 \quad \text{なら} \quad N = 4$$

$$10^{-10} < |k'| < 10^{10} \quad \text{なら} \quad N = 7 \quad (5)$$

$$10^{-100} < |k'| < 10^{100} \quad \text{なら} \quad N = 10$$

と取ればよいことが確かめられている。 N を 1 増すとき誤差は 2 乗になる。

面心立方格子についてこの格子グリーン函数の原素の値を第一種完全階円積分の積で表わす表式が $s > 3$ および $s < -1$ で与えられている。³⁾ この場合には階円積分の適当な解析接続が必要となるが、 $-1 < s < 3$ の値は算術幾何平均法により計算できることが示される。⁴⁾

筆者達は立方格子グリーン函数の原素の値の数表⁵⁾の作成に当り、体心、面心立方格子については上記の方法を用いた。単純立方格子については昨年の報告⁶⁾に与えた積分を用いた。

最後に注、堀口⁷⁾は体心立方格子グリーン函数に対する上記 Maradudin の表式(1), (2)を解析接続することにより $0 < s < 1$ の値の虚部、虚部と幾何函数により表わしていること附記しておく。

文献

- 1) A.A. Maradudin et al., Acad. Roy. Belg., Classe Sci., IX, No. 7 (1960).
- 2) M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (New York, Dover, 1965).
- 3) G. Iwata, Natural Science Rep., Ochanomizu Univ., 20 (1969) 13.
- 4) T. Morita and T. Horiguchi, J. Math. Phys. (1971) to appear.
- 5) T. Morita and T. Horiguchi, Table of the Lattice Green's Function for the Cubic Lattices (Values at the Origin) (1971) to appear.
この表に関する箇所は東北大学工学部応用理学教室, 応用数学研究 7 11-70 に書かれたり。
- 6) 舟田, 堀口, 数理解析研究所講究録 91 (1970) 199.
T. Morita and T. Horiguchi, J. Phys. Soc. Japan (1971) to appear
- 7) S. Katsura and T. Horiguchi, J. Math. Phys. (1971) to appear.