数理解析研究所講究録
第116巻 1971年 68-87

Very Ample Vector Bundles

京大 理数 隅広秀康

§1. 序

R. Hartshorne [10] によって，line bundles の ampleness の定義及び性質は，一般の vector bundles に迄拡張されました。その後，多くの人々によって（例えば，Hartshorne [11]，Kleiman [8]，Hironaka-Matsumura [12]，Gieseker [5]）ampleness の幾何学的意味付けがいろいろな角度からなされています．例えば，

(1) ample vector bundles の chern classes の numerical positivity.

(2) normal vector bundles が ample のときの closed subscheme の入り方

ここでは，別の幾何学的意味付けとして，

(3) Grassmann variety への埋め込み

という観点から ample vector bundles をみてみることにします．そして，その観点から Hartshorne の問題を考えてみよう

ものです．

<u>Hartshorne の問題</u>：　E を non-singular projective algebraic variety X 上の ample vector bundles とするとき，各 i 次の Chern class $c_i(E)$ $(1 \leq i \leq \min(\dim X, \operatorname{rank} E))$ は numerically positive か？

以後，考える schemes はすべて代数的閉体 k 上の algebraic schemes とし，vector bundles は constant rank な locally free sheaves を意味するものとする．

§2　<u>Very ample vector bundles.</u>

X を k-algebraic scheme．E を X 上の global sections で生成された $\operatorname{rank} E = r$，$\dim H^0(E) = t$ の vector bundles とする．次の自然な exact sequence：　$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus t} \xrightarrow{\varphi} E \longrightarrow 0$　より次の morphism $\bar{\varphi} : X \longrightarrow G_{t,r}$ が得られる．

$$\bar{\varphi} : X \ni x \longmapsto \bar{\varphi}(x) = \operatorname{Ker}\varphi(x) \in G_{t,r}$$

$$G_{t,r} = \{\, t \text{ 次元 vector space の codim} = r \text{ の subspaces} \,\}$$

<u>定義</u> 2.1　上の条件の下で，$\bar{\varphi}$ が immersion のとき，E を <u>very-G-ample</u> といい，一般の vector bundle E に対して，適当な正整数 N が存在し，$\forall n \geq N$ に対して，$S^n(E)$ が very G-ample のとき，E を <u>G-ample</u> という．但し $S^n(E)$ は E の n 次の symmetric

tensor product.

例4. 次の例は very G-ample vector bundles の例.

(1) $X = G_{t,r}$, $E = E_{t,r}$: classifying vector bundles.

(2) $X = \mathbb{P}^1$, $E = \mathcal{O}_X(m) \oplus \mathcal{O}_X(n)$ m, n は共には零でない負でない整数.

<u>定義</u> 2.2 (Gieseker [5]) E を X 上の vector bundle. X の任意の closed point x に対して, $m_{x,X}$ を x の defining ideal とする. 任意の closed point x に対して, $E \otimes m_{x,X}$ が global sections で生成されているとき, E を <u>strongly ample</u> という

<u>注意</u> (1) X が complete variety のとき, strongly ample vector bundle は ample vector bundle である. (2) strongly ample vector bundles の chern classes は非常に良い性質を持っている.

<u>定義</u> 2.3 E を X 上の vector bundle とし, L_E を E の tautological line bundle とする. ($f : P(E) \longrightarrow X$ L_E は $P(E)$ 上の line bundle.) L_E が very ample line bundle のとき, E を <u>very ample</u> vector bundle という

この §2 では, 次の 3 つの定理と, very ample vector bundle の諸性質を示す.

<u>定理</u> 2.1 Very ample vector bundle は very G-ample vector bundle である.

<u>定理</u> 2.2　E を ample vector bundle とする. 適当な正整数 N が存在し, $\forall n \geq N$ に対して, $S^n(E)$ は very ample vector bundle となる.

<u>定理</u> 2.3　Very ample vector bundle は strongly ample vector bundle である.

順を追って証明しよう.

<u>補題</u> 2.1　E を X 上の vector bundle. 次の条件は同値である.

(1) E が global sections で生成されている.

(2) L_E が global sections で生成されている.

(証明) 明らか.

<u>定理 2.1 の証明</u>:　E を X 上の $\mathrm{rank}\, E = r$, $\dim H^0(E) = t$, very ample vector bundle とする. $\{s_1, \dots, s_t\}$ を $H^0(E)$ の basis とし, $\{s_1', \dots, s_t'\}$ をそれらに対応する $H^0(L_E)$ の basis とする. (cf. $\forall n \geq 0$ に対して, $R^i f_*(f^*(F) \otimes L_E^n)$

$$= \begin{cases} 0 & i > 0 \\ F \otimes S^n(E) & i = 0 \end{cases}$$

但し, F は X 上の coherent sheaf.)

補題 2.1 より, $\{s_i\}$ (X, $\{s_i'\}$) は E (X, L_E) を生成する. $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ を X の open covering s.t. $E|U_\alpha \simeq \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus r}$ とする. $s_i | U_\alpha = (s_i^1, \dots, s_i^r)$　$(s_i^j \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_{U_\alpha}))$. U_α の各

closed point x に対して，r個の vector : $v_1, \dots, v_r$ を次の様に定義する。 $v_1 = \sum_{i=1}^{t} s_1^i(x) e_i, \ \dots, \ v_r = \sum_{i=1}^{t} s_r^i(x) e_i$

$\{v_1, \dots, v_r\}$ は t 次元 vector space ($= \{e_1, \dots, e_t\}$ を basis とする k 上の t 次元 vector space) の r 次元 vector space : $[v_1, v_2, \dots, v_r]$ を生成する。

$$\bar{\varphi}^* : X \ni x \longrightarrow \bar{\varphi}^*(x) = [v_1, \dots, v_r] \in G_{t,t-r}$$

と $\bar{\varphi}^*$ を定義すれば，$\bar{\varphi}^*$ は X から $G_{t,t-r}$ への morphism である。($H^0(E)$ の basis の取り方，又は (U_α) の取り方には無関係。)

$\bar{\varphi}^*$ が immersion であることを示せば良い。($\bar{\varphi}^*$ は定義 2.1 の morphism $\bar{\varphi}$ の dual morphism である。) L_E が $P(E)$ 上 very ample より，$\{s^i\}$ によって定まる morphism $\bar{\psi}^* : P(E) \longrightarrow \mathbb{P}^{t-1}$ は immersion. 即ち，$f : P(E) \longrightarrow X$ を自然写像とするとき，$f^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{P}^{r-1} \ni (x, \xi) = (x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \longrightarrow \bar{\psi}^*(x, \xi) = \left(\sum_{j=1}^{r} s_j^1(x)\xi^j : \dots : \sum_{j=1}^{r} s_j^t(x)\xi^j \right) \in \mathbb{P}^{t-1}$ が immersion である。一方 $\{ \bar{\psi}^*(x, \xi) \mid \xi \in \mathbb{P}^{r-1} \}$

$$\begin{tikzcd} P(E) \arrow[r, "\bar{\psi}^*"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{P}^{t-1} \arrow[d, dashed, leftrightarrow] \\ X \arrow[r, "\bar{\varphi}^*"] & G_{t,t-r} \end{tikzcd}$$

によって張られる t 次元 vector space の subspace は丁度 r 次元 vector space $\bar{\varphi}^*(x)$ である。故に $\bar{\varphi}^*$ は X 上 injective. 又 $\bar{\psi}^*$ が immersion であることより，各 U_α 上 $\bar{\varphi}^*$ は immersion である。故に，$\bar{\varphi}^*$ は X 上 immersion である。　　q.e.d.

<u>補題</u> 2.2 L を very ample line bundle とする．任意の正整数 n に対して，$L^{\oplus n}$ は very ample vector bundle である．

(証明) $E = L^{\oplus n}$ とする．$E = (\mathcal{O}_X^{\oplus n}) \otimes L$．故に適当な isomorphism $\sigma : P(\mathcal{O}_X^{\oplus n}) \xrightarrow{\sim} P(E)$ s.t. $\sigma^*(L_E) \simeq p_1^*(L) \otimes p_2^*(\mathcal{O}_P(1))$．但し，$p_1 : X \times \mathbb{P}^{n-1} \to X$，$p_2 : X \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$．$p_1^*(L) \otimes p_2^*(\mathcal{O}_P(1))$ は very ample であることより，L_E は very ample q.e.d.

<u>補題</u> 2.3 X を quasi-projective algebraic scheme．E を X 上の vector bundle．次の条件は同値．

(1) E は ample vector bundle.

(2) X 上の任意の line bundle H に対して，適当な正整数 N が存在し，$\forall n \geq N$ に対し，$f_n^*(H) \otimes L_{S^n(E)}$ が very ample．但し，$f_n : P(S^n(E)) \longrightarrow X$

(3) X 上の任意の line bundle H に対して，適当な正整数 N が存在し，$\forall n \geq N$ に対して，$L_{H \otimes S^n(E)}$ が very ample である．

(証明) (2) 又は (3) から (1) が示すことは良く知られている．(1) から (2) と (3) を示す．K を X 上の very ample line bundle とする．E が ample より，$\exists N$ s.t. $\forall n \geq N$ に対して，$H \otimes K^{-1} \otimes S^n(E)$ が global sections で生成されている．

$$K^{\oplus t} \longrightarrow H \otimes S^n(E) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

$$\begin{tikzcd} P(S^n(E)) \arrow[r, "\sim", "\sigma_n"'] \arrow[dr, "f_n"'] & P(H\otimes S^n(E)) \arrow[r, hook, "i_n"] \arrow[d, "f_n'"] & P(k^{\oplus r}) \\ & X & \end{tikzcd}$$

i_n : closed immersion.

M を $k^{\oplus r}$ の tautological line bundle とすると，補題 2.2 より，very ample で，$i_n^*(M) = L_{H\otimes S^n(E)}$．故に，$L_{H\otimes S^n(E)}$ は very ample．更に，$\sigma_n : P(S^n(E)) \xrightarrow{\sim} P(H\otimes S^n(E))$ は isomorphism で，$\sigma_n^*(L_{H\otimes S^n(E)}) = L_{S^n(E)} \otimes f_n^*(H)$．故に $f_n^*(H)\otimes L_{S^n(E)}$ は very ample． q.e.d.

故に，補題 2.3 より，<u>定理 2.2 は証明された</u>．

<u>補題</u> 2.4 E を X 上の vector bundle，$r = \operatorname{rank} E$ とする．次の条件は同値である．

(1) E は strongly ample vector bundle

(2) X の任意の相異なる 2 つの closed point x, y に対して $H^0(E)$ の元で x で零になるものが，y 上で r 次元の vector space を生成する．

(証明) (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\quad 0 \to m_{X,x} \to \mathcal{O}_X \to k(x) \to 0$

$$0 \to E\otimes m_{X,x} \to E \to E\otimes k(x) \to 0$$

$$0 \to H^0(E\otimes m_{X,x}) \to H^0(E) \to H^0(E\otimes k(x)) \to \cdots \quad \text{(exact)}$$

$E\otimes m_{x,X}$ が global sections で生成されることと，$\forall y\in X$ に対して，

$$(E\otimes m_{x,X})_y \underset{\mathcal{O}_y}{\otimes} \mathcal{O}_y/m_y = \begin{cases} 0 & y=x \\ k(y)^{\oplus r} & y\neq x \end{cases}$$

が $E\otimes m_{x,X}$ の global sections で生成されることは同値.

（中山の補題）　　　　　　　　　　　　q.e.d.

<u>定理 2.3 の証明</u>　$r=\mathrm{rank}\,E$，$t=\dim H^0(E)$. $\{s_1,\dots,s_t\}$ を $H^0(E)$ の basis. それに対応する $H^0(L_E)$ の basis を $\{s_1',\dots,s_t'\}$ とする. x, y を X の相異なる 2つの closed point とする.

$V_x=\{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_t)\mid \sum\alpha_i s_i'(x)=0\}$

$V_y=\{\beta=(\beta_1,\dots,\beta_t)\mid \sum\beta_i s_i'(y)=0\}$ とおく.

L_E が very ample より，$V_x^*=\overline{W}_x$，$V_y^*=\overline{W}_y$（但し，$*$ は dual space を取ることを意味する.）とすると，$\dim(\overline{W}_x\cap\overline{W}_y)=0$. 故に，$\dim(V_x\cap V_y)=\dim V_x-r$. 補題 2.4 により，$E$ は strongly ample である.

　　　　　　　　　　　　q.e.d.

次に very ample vector bundles の持っている――な性質を示そう.

<u>定理</u> 2.4　(1)　very ample vector bundle の quotient

vector bundle は very ample.

(2) very ample vector bundles の直和は very ample.

(証明) (1)は明らか. (2)は定理 2.1 で利用した方法により証明出来る. q.e.d.

<u>定理</u> 2.5 E を X 上の very ample vector bundle とする. $p = \mathrm{char}\, k$.

(1) $p = 0$ のとき: E の任意の positive tensor bundle (cf. Hartshorne [10]) は very ample.

(2) $p > 0$ のとき: 任意の正整数 n に対して, $E^{\otimes n}$, $S^n(E)$, $\bigwedge^n E$ (このときは, $1 \leq n \leq \mathrm{rank}\, E$) は very ample.

(証明) 定理 2.4 より (2) は明らか. $p = 0$ のとき. $GL(r)$ は完全可約群であるから, $GL(n)$ の表現の既約成分はすべて直和因子である. 一方, $GL(n)$ の任意の既約表現は, $S^{n_1}(E)\otimes\cdots\otimes S^{n_r}(E)$ の形の既約表現と同値. 故に $p = 0$ のときは, $S^n(E)$ が very ample, $E \otimes E'$ が very ample (E, E' が very ample として) より, 任意の positive tensor bundle は very ample である. q.e.d.

<u>系</u> 2.1 X を quasi-projective algebraic scheme. L を X 上の very ample invertible sheaf とする. E を X 上の任意の vector bundle とするとき, 適当な正整数 N が存在し, $\forall n \geq N$ に対して, $E \otimes L^n$ は very ample である.

(証明) 定理2.4 と Serre の定理　　q.e.d.

§2 を終わるにあたって，今迄良く解かっていない所を問題として提起しておきます．

<u>問題1</u> (中井の判定法) X を proper な algebraic scheme，E を X 上の vector bundle．次の条件は同値か？

(1) E が G-ample．

(2) X 上の $\dim \mathrm{Supp}\, F \geq 1$ である coherent sheaf F に対し，

$$\chi(F \otimes S^n(E)) = \sum (-1)^i \dim H^i(F \otimes S^n(E)) \to \infty$$
$(n \to \infty)$

<u>問題2</u> (西の定理) X を k 上の abelian scheme．E を rank $= r$ の ample vector bundle．適当な正整数 $N = N(r)$ が存在し，$\forall n \geq N$ に対して，$S^n(E)$ は very ample か？

<u>問題3</u> E を very ample vector bundle．k の標数に関係なく，E の positive tensor bundle は very ample か？

§3 <u>Chern classes</u> と <u>Schubert cycles.</u>

以後 X は k 上の non-singular quasi-projective algebraic variety とする．E を X 上の $\mathrm{rank}\, E = r$ の vector bundle とすれば，$1 \leq \forall i \leq \min(r, \dim X)$ に対して，$\mathfrak{c}^i(E)$ は Chern ring 係数の Chern classes $c_i(E)$ を対応させることが出来る.（cf. Grothendieck [6]） E が ample vector bundle のとき各 $\{c_i(E)\}$ は numerically positive か？（cf. Kleiman [9]）

<u>補題</u> 3.1　$Y_1, \ldots, Y_r$ を $\mathbb{Z}$（整数環）上の r 個の独立変数とし，各 i ($1 \le i \le r$) に対して，$s_i(Y)$ を i 次の基本対称式とする．このとき，各 k ($1 \le k \le r$) に対して，

$$L_k - s_1 L_{k-1} + \cdots\cdots + (-1)^k s_k = 0$$

を満足する $Y_1, \ldots, Y_r$ に関して対称な多項式の組 $(L_0, L_1, \ldots, L_r)$ が唯一つ存在する．但し $L_0 = 1$ とする．

（証明）　r についての帰納法．

故に，各 L_k は $Y_1, \ldots, Y_r$ の基本対称式 $(s_i(Y))$ の多項式 Φ_k で示せる．即ち，$L_k(Y) = \Phi_k(s_i(Y))$.

<u>定義</u> 3.1　E を X 上の vector bundle.

(1)　$\Phi_k(E) = \Phi_k(c_1(E), \ldots, c_r(E))$　$(1 \le k \le r)$

と定義する．

(2)　$I = (i_1, \ldots, i_r)$ を r 個の負でない整数とするとき，

$c^I(E) = c_1^{i_1}(E) \cdots c_r^{i_r}(E)$ で定義する．

今迄に得られた結果の中で最も良いものは次の結果である．

<u>定理</u> 3.1 (Gieseker [5])

(1) E が X 上の ample vector bundle ならば、任意の k $(1 \leq k \leq \min(r, \dim X))$ に対して、$c_k(E)$ は numerically positive である。

(2) E が X 上の strongly ample vector bundle ならば、$c^I(E)$ $(I=(i_1,\dots,i_r)$ 各 i_j は負でない整数$)$ は numerically positive である。

<u>注意</u> Analytic case においては、P.A. Griffiths の一連の仕事が有り、定理3.1よりも詳しい結果が得られている。

E を X 上の very ample vector bundle とする。$r=\operatorname{rank} E$, $t=\dim H^0(E)$. このとき、§2 で定義した様に、$\exists\, \varphi : X \longrightarrow G_{t,r}$ morphism が存在する。$E_{t,r}$ で $G_{t,r}$ の classifying vector bundle を表わせば、$E=\varphi^{-1}(E_{t,r})$. 各 chern classes は、$c_i(E)=\varphi^{-1}(c_i(E_{t,r}))$. 故に $c_i(E)$ が numerically positive かどうかを知るには、まず $c_i(E_{t,r})$ を調べる必要が有る。Fogarty and Rim [4] の Serre sequence の理論を応用することにより、classifying vector bundle の chern classes は <u>Schubert cycles</u>: $\underline{\Omega_{a_1,\dots,a_{t-r}}}$ で書き表わされる。(cf. Hodge and Pedoe [13]) 但し、Schubert cycle $\Omega_{a_1,\dots,a_{t-r}}$ は

Schubert condition : $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{t-r} \le t$

によって決まる次元 $= \sum_{i=1}^{t-r} a_i - \frac{(t-r)(t-r+1)}{2}$ の $G_{t,r}$ の closed irreducible subvariety である.

<u>定理</u> 3.2 Grassmann variety $G = G_{t,r}$ の classifying vector bundle $E = E_{t,r}$ の Chern classes は次の通りである.

(1) $r = t-1$ $\quad c_i(E) = \Omega_{t-i} \quad (1 \le i \le t-1)$

(2) $1 \le r \le t-2$ $\quad c_i(E) = \Omega_{r-i+1,\, r+2,\, \ldots,\, t} \quad (1 \le i \le r)$

(証明) Fogarty and Rim [4] を応用して, 実際に, 計算をして行けば良い. ただし, 計算がはん雑になるので省略することにします. (cf. S. Chern [3])

<u>定理</u> 3.3 定理 3.2 の条件の下で, $\Phi_k(E)$ を求めると次の様になる.

(1) $r = t-1$ $\quad \Phi_1 = c_1 = \Omega_1$, $\quad \Phi_k = 0 \quad (2 \le k \le t-1)$

(2) (i) $k \ge t-r+1$ $\quad \Phi_k = 0$

(ii) $k = t-r$ $\quad \Phi_k = \Omega_{r,\, r+1,\, \ldots,\, t-1}$

(iii) $k \le t-r-1$ $\quad \Phi_k = \Omega_{r,\, r+1,\, \ldots,\, \underset{k\text{番目}}{r+(k-1)},\, \underset{(k+1)\text{番目}}{r+(k+1)},\, \ldots,\, t}$

(証明) (i) は明らか. (2) の (iii) について: k についての帰納法と Pieri の公式を利用. (2) の (i) について,

$k = t-r+i$ $(i \geq 1)$ として，i についての帰納法と Pieri の公式を利用する． q.e.d.

系 3.1　X を non-singular projective variety, $L = \mathcal{O}_X(1)$ を X 上の very ample line bundle とする．E を X 上の任意の vector bundle とし，$E \otimes L^n = E(n)$ が very ample となる様な n を取る．このとき，$1 \leq \forall k \leq \min(\dim X, \operatorname{rank} E)$ に対して，

$$c_k(E) = X \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} c_{k-i}(E_{(c,r)}) \cdot \xi^{ni} \right)$$

但し，　$c = \dim H^0(E(n))$

ξ : L の first chern class

$\cdot$: intersection product

$r = \operatorname{rank} E$.

つまり，X 上の任意の vector bundle の chern classes は Schubert cycles Ω_a, ξ 等で書き表わされる．

系 3.2　E を X 上の ample かつ，very G-ample な vector bundle とすれば，$\dim H^0(X, E) \geq \operatorname{rank} E + \dim X$.

（証明）定理 3.1 と定理 3.3 を利用する． q.e.d.

定理 3.2，定理 3.3 を利用して，Hartshorne の問題への近似をはかるには，次の一連の問題が解けなければならない．これらは，それだけで興味有る問題である．

問題4　Xをs次元の $G_{t,r}$ の closed irreducible subvariety. 次の条件は同値か?

(1)　$E_{t,r}|X$ が ample vector bundle.

(2)　$X \sim \lambda \Omega_{12\cdots t-r-1, t-r+s, \cdots} + \cdots\cdots$　但し $\lambda \neq 0$
と X が書き表わせる　但し ~ は rationally equivalence.

問題5　Xをn次元 non-singular projective variety, T_X をXの tangent vector bundle とする. YをXの closed irreducible subvariety. もし, $T_X|Y$ がY上の ample な vector bundle ならば, YはXの中にどの様な形で入っていますか? (勿論, Hironaka–Matsumura [12] での G2 type で入っていることは明らか.) 更に T_X 自身が ample のとき, Xは P^n と同型か?

問題4が解ければ, 最初に述べた Hartshorne の問題に対して, E が ample であり, かつ very G-ample のときには, 肯定的な答が与えられる. しかし, 今の所, 問題4と関連している問題5の様な物でも解かれていない.

§4 Non-singular complete curves 上の ample vector bundles (p = char k > 0)

R. Hartshorne が東大での講演で述べていた様に、$p = \mathrm{char}\, k > 0$ のとき、complete non-singular curve X 上の ample vector bundles の判定法は無いか？

X を genus g の non-singular complete curve，E を X 上の vector bundle とする。

<u>定義</u> 4.1 (Barton [2])

$$d_0(E) = \min_{L} \{ \deg L \mid L \text{ は } E \text{ の quotient line bundle} \}$$

$d_0(E)$ が有限で有ることは，Atiyah [1] の maximal splitting の理論を利用すれば良い。

<u>定理</u> 4.2 E を X 上の vector bundle. 次の条件は同値である

(1) E が ample.

(2) 適当な正整数 N が存在し，$\forall n \geq N$ に対して，

$$d_0(E^{(p^n)}) > \min\{0,\ 2(g-1)\}$$

但し，$E^{(p^n)}$ は E の n 次の Frobenius endomorphism の inverse image.

<u>注意</u> $g = 0$ のときは，明らかに，$d_0(E) > 0$ で E は ample になる。$g = 1$ のときは，小田 [14] により，$d_0(E) > 0$ で E は ample になる。

<u>補題</u> 4.1 $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_r = E$，$E_i / E_{i-1} = L_i$

$(L_1, \ldots, L_r)$ を E の maximal splitting とする

このとき、　$\dfrac{\deg E_{r-1}}{r-1} + rg \geq \deg L_r$　$(r \geq 2)$

(証明)　Atiyah [1] を利用.　　　　q.e.d.

<u>定理4.2の証明</u>：(1) → (2) は明らかであるから、(2) → (1) を示せば良い。$r = \mathrm{rank}\, E$ とし、r についての帰納法で示す。$r=1$ ならば明らか。もし適当な正整数 n で $E^{(p^n)}$ が decomposable ならば、帰納法の仮定で、$E^{(p^n)}$ が ample. 故に E は ample である。どの様な n に対しても、$E^{(p^n)}$ は indecomposable とする。

$$0 = E_0(n) \subset E_1(n) \subset \cdots\cdots \subset E_r(n) = E^{(p^n)}$$

$$E_i(n)/E_{i-1}(n) = L_i(n)$$

$(L_1(n), \ldots, L_r(n))$: $E^{(p^n)}$ の maximal splitting とする。
もし、適当な正整数 n で、$\deg L_r(n) > 2rg$ ならば、$\deg L_i(n) > 0$　$(1 \leq {}^\forall i \leq r)$　となり、$E^{(p^n)}$ は ample.
故に、すべての n に対して、$\deg L_r(n) \leq 2rg$ とする。

$$\frac{\deg E_{r-1}(n)}{r-1} + rg \geq \deg L_r(n)$$

$$\deg E_{r-1}(n) + \deg L_r(n) = p^n \cdot \deg E$$

$$0 < \deg L_r(n) \leq 2rg$$

より、$\deg E \geq 0$.　もし $\deg E > 0$ ならば、$\deg E^{(p^n)} = p^n \cdot \deg E$ より、$\deg E^{(p^n)} \gg 0$　$(n \gg 0)$.　故に Atiyah [1]

n より; $\mathfrak{E}^{(p^n)}$ は ample. $\deg \mathfrak{E} = 0$ と仮定して矛盾を示す.

$\deg \mathfrak{E} = 0$ より, $g \geq 2$. (Atiyah [1]) $\mathfrak{E}^{(p^n)}/L_1(n) = \mathfrak{E}'(n)$ とすると, 帰納法の仮定より, $\mathfrak{E}'(n)$ は ample. 故に $\deg L_1(n) < 0$. $L_1(n)$ は $\mathfrak{E}^{(p^n)}$ の maximal degree の subline bundle より, すべての n に対して, $H^0(X, \mathfrak{E}^{(p^n)}) = 0$. 故に, R-R 定理より, $\dim H^1(X, \mathfrak{E}^{(p^n)}) = r(g-1)$. $\dim H^0(X, \check{\mathfrak{E}}^{(p^n)} \otimes K_X) > 0$. K_X は X 上の canonical line bundle. 故に適当な $\check{\mathfrak{E}}^{(p^n)} \otimes K_X$ の subline bundle H で, $\deg H \geq 0$ が存在する. $\mathfrak{E}' = \check{\mathfrak{E}}^{(p^n)} \otimes K_X / H$ とすると,

$$0 \longrightarrow \check{\mathfrak{E}}' \otimes K_X \longrightarrow \mathfrak{E}^{(p^n)} \longrightarrow \check{H} \otimes K_X \longrightarrow 0$$

故に, $d_0(\mathfrak{E}^{(p^n)}) \leq \deg K_X - \deg H \leq 2(g-1)$. 矛盾.

q.e.d.

Bibliography.

[1] F. Atiyah ; Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. Vol 7. 1957

(2) C. Barton ; Contributions to the theory of ample vector bundles, Thesis (Columbia)

[3] S. Chern ; Characteristic classes of hermitian manifold, Annals of Math. Vol 47 1946

[4] J. Fogarty and D. Rim ; Serre sequences and Chern classes , Journal of Algebra 10. 1968.

(5) D. Gieseker ; Contributions to the theory of positive embeddings in algebraic geometry , Thesis (Harvard.)

[6] A. Grothendieck ; La théorie des classes de Chern , Bull. Soc. Math. France 86. 1958

[7] A. Grothendieck ; E.G.A. I. II. IV.

[8] S. Kleiman ; Ample vector bundles on algebraic surfaces , Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 20 - II. 1969.

(9) S. Kleiman ; Toward a numerical theory of ampleness , Annals of Math, Vol 84 1966.

[10] R. Hartshorne ; Ample Vector bundles , I.H.E.S. No 29.

[11] R. Hartshorne ; Cohomological dimension of algebraic varieties , Annals of Math. Vol 88 1968.

[12] H. Hironaka and H. Matsumura ; Formal functions and Formal imbeddings. , Jour. of

Jap. Math. Soc. Vol 20. 1968

[13] W. Hodge and D. Pedoe ; Methods of Algebraic geometry I, II, Cambridge Univ. press. 1952.

[14] T. Oda ; Vector bundles on an elliptic curve (to appear.)