数理解析研究所講究録
第116巻 1971年 88-115

モノイダル変換の逆問題について

京大 数理研　中野茂男

§1. Introduction

2次変換・モノイダル変換は，代数幾何学や多変数函数論(解析空间の理論)において，modification の最も基本的な例として，古くから著明なものである。今この論文で必要な場合について復習しておく。

X は n 次元複素多様体，M はその一つの部分多様体で次元は m，余次元 $r=n-m$ は2以上であるとする。(本論では，別に断らぬ限り，多様体とはパラコンパクトで連結なものを意味することにする。) 座標近傍 U_j, U'_k による X の被覆 $\{U_j, U'_k\}$ を，つぎのようにとる：
$U'_k \cap M = \phi$，$U_j \cap M \neq \phi$ で，U_j での局所座標系 $(z_j^1, \cdots, z_j^m, y_j^1, \cdots, y_j^r)$ は，$(y_j^1, \cdots, y_j^r)$ が U_j の各点で M のイデアルを生成する。(j, k ともある範囲で変る。)

今，一つの U_j に注目し，添字 j を略して書くことにする。$r-1$ 次元複素射影空间 $\mathbb{P}^{r-1}$ をとり，一組の斉次座標 $(\eta^1 : \cdots : \eta^r)$ をとる。直積 $U \times \mathbb{P}^{r-1}$ 内で

$$W = \{(p, \eta) \in U \times \mathbb{P} \mid (y^1(p) : \cdots : y^r(p)) = (\eta^1 : \cdots : \eta^r)\}$$

を考えると，W は $U\times\mathbb{P}^{r-1}$ の部分多様体で，射影 $U\times\mathbb{P}\to U$ の W への制限 π は W から U への正則な写像であり，$S=\pi^{-1}(M\cap U)$ は $\cong(M\cap U)\times\mathbb{P}$ 従って W 内で余次元1，$\pi: W-S\longrightarrow U-(M\cap U)$ は双正則同型対応である。$U-(M\cap U)$ から $\mathbb{P}$ への正則写像 $p\to(y^1(p):\cdots:y^r(p))$ のグラフを W' とすれば，W は $U\times\mathbb{P}$ における W' の閉包でもある。

以上の構成を各 U_j について行う。$U_i\cap U_j\neq\phi$ であるときは，対応する W_i と W_j とは $U_i\cap U_j$ の上に来る部分どうしうまくつながることがわかる。$U_i\cap U_j\cap M$ の上に来る部分すなわち S_i と S_j との，つながるところが問題であるが，$(y_i^1,\cdots,y_i^r)$ と $(y_j^1,\cdots,y_j^r)$ とがともに $U_i\cap U_j$ の各点で M の定義イデアルを生成することから，$y_i^\alpha=\sum a^\alpha_\beta\, y_j^\beta$ （a^α_β は $U_i\cap U_j$ で正則）という関係があることを利用して，これが証明できる。a^α_β は一意的に定まる訳ではないが，a^α_β の M 上への制限は一意的に定まり，$(a^\alpha_\beta|S)=A_{ij}$ は X における M の normal bundle の transition function をなしている。

このようにして W_j や $W'_k(=U'_k)$ が貼り合わされて，

一つの複素多様体 $\tilde{X}$ ができ，$\tilde{X}$から X 上への正則な写像πができる。S_j はつながって余次元1の部分多様体Sをなすが，上に述べたことから，$\pi: S \to M$ は射影空間 $\mathbb{P}^{r-1}$をファイバーとする解析的なファイバー・バンドルをなし，それは *normal bundle* を"射影化"したもの（*normal bundle* のファイバー$\cong \mathbb{C}^r$ における線型座標を，斉次座標と考えてえられるもの）に他ならないことが，わかる。πが $\tilde{X}-S$ と $X-M$との間では双正則同型であることも当然である。この $\tilde{X}$ を，Mを中心とするXのモノイダル変換(像)というのであった。（Mが一点の場合が2次変換である。）

モノイダル変換に現れるSは特異な位置にある。$\tilde{X}$の因子Sの定める複素直線バンドル[S]を，$\pi: S \to M$における任意のファイバー$L_a = \pi^{-1}(a)$　$(\cong \mathbb{P}^{r-1}, a \in M)$に制限すると，$\mathbb{P}^{r-1}$ の超平面eの定める複素直線バンドルの逆 $[e]^{-1}$ となる。$\mathbb{P}^{r-1}$ が $\mathbb{P}^{r}$ 内の超平面として存在するとき，$[\mathbb{P}^{r-1}]$ の $\mathbb{P}^{r-1}$ への制限は [e] になっていることを考えると，L_aは云わば逆向きになって $\tilde{X}$に含まれているという感じである．逆に

<u>IPMT</u>　複素多様体 $\tilde{X}^n, S^{n-1}, M^m$ が与えられ，S は $\tilde{X}$ の部分多様体であり，また M を base $\mathbb{P}^{r-1}$ をファイバーとするバンドルの構造をもっており，その各ファイバー $L_a\,(a \in M)$ に対して $[S]_{L_a} = [e]^{-1}$ が成り立つとする。($[S]_{L_a}$ は $[S]$ の L_a への制限。) このとき M を含む複素多様体 X^n があって，$\tilde{X}$ は M を中心とする X のモノイダル変換となっているであろうか?

代数幾何学ではこのことは Castelnuovo の定理として知られているが，近代的な意味での証明があるとは云えない。M = 一点，$S = \mathbb{P}^{n-1}$ のときは，$\tilde{X}$ が射影空間内の代数的多様体の場合小平によって肯定的に解かれ，その後小平，Grauert，Mumford などによる研究がある。$m > 0$ のとき Moishezon，Lascu による研究などがあるが，本稿では一般的な條件のもとにこの問題がとけることを示す。すなわち

<u>主定理</u>　IPMT は肯定的にとける。

§2. 証明のプログラム

主定理の証明はつぎの三段階から成る：

定理１．Vは複素多様体で，その上に実数値 C^∞-函数 Φ と複素直線バンドル $\mathcal{B}$ とがあって，つぎの条件が満されるとする：

(a) Φ は多重劣調和である．すなわち V の任意の点に対しその近傍での正則局所座標系 $x^1, \cdots, x^n$ をとるとき

$$(2.1) \qquad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial \bar{x}^k}\right) \geqq 0 \qquad (\text{半正定値}).$$

(b) 任意の実数Aに対し，$\{p \mid \Phi(p) \leqq A\}$ は空であるかコンパクトである。

(c) Vの *canonical bundle* を $\mathcal{K}$ で表わすとき，$\mathcal{K} \otimes \mathcal{B}$ は *negative* である，すなわち $\mathcal{K} \otimes \mathcal{B}$ が V の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ に関して *transition function* の系 $\{e_{\alpha\beta}\}$ で定義されているとし，U_α における正値 C^∞-函数 a_α があって，

$$(2.2) \qquad \begin{cases} U_\alpha \cap U_\beta \text{ で} & a_\alpha / a_\beta = |e_{\alpha\beta}|^2, \\ U_\alpha \text{ の各点で} & \left(\dfrac{\partial^2 \log a_\alpha}{\partial x^j \partial \bar{x}^k}\right) < 0 \end{cases}$$

がなりたつ.

この場合には $H^q(V, \mathcal{O}(\mathcal{B}^{-1}))=0$ $(q=1,2,\cdots,n-1)$ がなりたつ。

<u>定理2</u>. $\tilde{X}, S, M$ が <u>IPMT</u> の條件をみたすときは, M の各点 a に対し,（$S\to M$ における）その上のファイバー L_a の, $\tilde{X}$ における近傍 V があって, $S\to M$ のファイバー L_b に対して $V\cap L_b \neq \phi$ ならば必ず $L_b\subset V$ であり, この V と $\mathcal{B}=[S]_V^k$ $(k=1,2,3\cdots)$ とに対し定理1の條件がなりたつ。

<u>補足</u>. <u>IPMT</u> の條件 $[S]_{L_a}=[e]^{-1}$ を, $[S]_{L_a}=[e]^{-k_0}$ $(k_0\geqq 1)$ でおきかえても, 定理2の結果は同じようになりたつ。

以上二つの定理（二つの段階）ができたとすれば, 主定理の証明はやさしい。M の任意の点 a に対し, L_a の開近傍（$\tilde{X}$ における近傍）V で, 定理2の條件をみたすものをとる。$S\cap V$ は $D\times\mathbb{P}^{r-1}$ と双正則同型であると考えて

よい。ここにDは$\mathbb{C}^m$における原点の近傍である。(DはMにおけるaの近傍で，Dにおける座標$\zeta^1,\cdots,\zeta^m$はM上の局所座標だと考えてもよい。) $[S]_{S\cap V}=[e]^{-1}$であることは容易にわかる。ここに右辺の$[e]$は$\mathbb{P}^{r-1}$上のそれを，射影$D\times\mathbb{P}\to\mathbb{P}$によって$D\times\mathbb{P}\cong S\cap V$上にひきもどしたものを表わす。

定理1. を$k=1,2$, $q=1$に対して適用すると，層の完全列

$$0\to\mathcal{O}([S]^{-1})\to\mathcal{O}_V\to\mathcal{O}_{V\cap S}\to 0$$

$$0\to\mathcal{O}([S]^{-2})\to\mathcal{O}([S]^{-1})\to\mathcal{O}_{V\cap S}([S]_S^{-1})\to 0$$

から，定義域の制限で定められる写像

$$\Gamma(V,\mathcal{O}_V)\longrightarrow\Gamma(V\cap S,\mathcal{O}_{V\cap S}),$$

$$\Gamma(V,\mathcal{O}([S]^{-1}))\longrightarrow\Gamma(V\cap S,\mathcal{O}([e]))$$

が全射であることが，わかる。それ故つぎのようにできる:

V上の正則函数$z^1,\cdots,z^m$があって$z^i|S=\zeta^i$,

V上での$[S]^{-1}$の正則切断面$f^1,\cdots,f^r$があって，それらの$S\cap V$への制限が$\mathbb{P}^r$の斉次座標$\xi^1,\cdots,\xi^r$に対応する。

後の方で述べたことの具体的内容は次のとおりである。$V=\bigcup_{\lambda} V'_{\lambda}$ と開集合で覆い，各の V'_{λ} で S の局所方程式が $y_{\lambda}=0$ で与えられるとする。$e_{\lambda\mu}=y_{\lambda}/y_{\mu}$ は $[S]$ の transition function を与える。（Vを小さくとり直すことは差支えないので，）$V'_{\lambda}\cap S=D\times U'_{\lambda}$ の形であり，$\mathbb{P}$の の被覆 $\{U'_{\lambda}\}$ は $\{U_{\alpha}\}_{\alpha=1,\cdots,r}$，$U_{\alpha}=\{\eta^{\alpha}\neq 0\}$ の細分になっていると考えてよい。細分関係を定める写像 $\lambda\rightarrow\alpha=\tau(\lambda)$ $(U'_{\lambda}\subset U_{\alpha})$ をきめておく。さらに $e_{\lambda\mu}|_S=\eta^{\tau(\mu)}/\eta^{\tau(\lambda)}$ となっていると考えてよい。この状態の下に切断面 f^{α} は $\{f^{\alpha}_{\lambda}\}$ （$V'_{\lambda}\cap V'_{\mu}$ では $f^{\alpha}_{\lambda}=e^{-1}_{\lambda\mu}f^{\alpha}_{\mu}$）と表わされる訳だが，その $S\cap V$ への制限が η^{α} に対応するとは，

$$f^{\alpha}_{\lambda}|_S=\eta^{\alpha}/\eta^{\tau(\lambda)}$$

がなりたつという意味である。

さて $y_{\lambda}f^{\alpha}_{\lambda}=y_{\mu}f^{\alpha}_{\mu}$ だから，これはV全体での正則函数を与える。これをまたf^{α}で表わす。f^{α} はS上で0になる。今n次元ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ をとり，その座標を$(Z^1,\cdots,Z^m,Y^1,\cdots,Y^r)$とする。$Y^1=\cdots=Y^r=0$で定義される$\mathbb{C}^m$を中心とする$\mathbb{C}^n$ のモノイダル変換$\widetilde{\mathbb{C}}$を考

え，Vから$\widetilde{\mathbb{C}}$内への写像Φをつぎのように定める：

$$V \ni p \longrightarrow \Phi(p) = ((Z^1(p), \cdots, Z^m(p), f^1(p), \cdots, f^r(p)), (f^1(p) : \cdots : f^r(p)))$$

上に見てきた考察，とくにS上では$f^\alpha : f^\beta = \zeta^\alpha : \zeta^\beta$となっていることから，$\Phi_a$は$L_a$の各点で正則な写像で，（$n$次元の）ヤコビアンが$0$にならず，$L_a$を$(0) \times \mathbb{P}^{r-1}$の上に双正則に写すことがわかる。従って$L_a$の近傍$W$，$\mathbb{C}^m$における$0$の近傍$\Delta$が存在して，$\Phi$は$W$を$\Delta$のモノイダル変換$\widetilde{\Delta}$（変換の中心は$\Gamma = \Delta \cap \mathbb{C}^m$）に，双正則に写像する。言いかえれば$W$はモノイダル変換である。

Mの点aごとに上のようなWを作ると，それらの全体が$\widetilde{X}$におけるSの近傍をなすこと，対応するΔやΓがうまくつながって複素多様体X'とその一つの部分多様体$(\cong M)$をなすことは，容易にわかる．これで主定理の証明ができた。

§3. 定理１の略証

層係数コホモロジーに関する Serre の双対定理によって，$H^q(V, \mathcal{O}(B^{-1})) = 0$を示すには$H_K^{n-q}(V, \Omega^n(B)) = 0$を

示せばよい。ここに H_K は compact support のコホモロジー群を示す。$\Omega^n(\mathcal{B}) = \mathcal{O}(\mathcal{K}\otimes\mathcal{B}) = \mathcal{O}(\mathcal{B}')$ ($\mathcal{K}\otimes\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}'$ とおいた) であることと de Rham の定理(Dolbeault の定理)とから，つぎの命題SVが云えればよい。$\mathcal{B}'$-valued で型 (p,q) かつコンパクトな台をもつ C^∞ 微分型式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{D}^{p,q}(\mathcal{B}')$ で表わす，特に $\mathcal{D}^{0,q}$ を $\mathcal{D}^q$ で表わすとき

命題 SV. $\varphi \in \mathcal{D}^q(\mathcal{B}')$, $\bar\partial\varphi = 0$, $1 \leqq q \leqq n-1$ ならば，$\exists\psi \in \mathcal{D}^{q-1}(\mathcal{B}')$ で $\varphi = \bar\partial\psi$.

この命題を証明するために調和微分式の理論を使い，特に Andreotti-Vesentini による Carleman estimate の方法を使う。まず V に complete な エルミット計量を入れる。一般的な場合にこれは可能であるが，特に目下の場合は complete なケーラー計量を入れることができる。それは才一に (2.2) を見ると

$$(3.1) \qquad ds^2 = -\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \log a_\alpha}{\partial x^j \partial \bar{x}^k}(dx^j, d\bar{x}^k)$$

がケーラー計量を与えている。さらにこの a_α を $e^{-\mu(\Phi)}\cdot a_\alpha$

でおきかえると，実数値 C^∞-函数 $\mu(\tau)$ が $\mu(\tau)\geqq 0$，$\mu'(\tau)\geqq 0$，$\mu''(\tau)\geqq 0$，$\int_0^\infty\sqrt{\mu''(\tau)}\,d\tau=\infty$ を満すようにとってある限り，新らしい a_α に対して (2.2) は成り立ち，(3.1) は complete になることが，示される。

そこで以下 $\{a_\alpha\}$ はこのようにとってあるものとする。つぎに B' のファイバー上におけるエルミット計量を導入する。すなわち U_α における正値 C^∞-函数 b_α で，

(3.2) $\qquad U_\alpha\cap U_\beta$ で $\qquad b_\alpha/b_\beta=|e_{\alpha\beta}|^2$

を満すものを考える。(上の $\{a_\alpha\}$ はこんな計量の一例だが，我々はファイバー上の計量としては別のものをも考えねばならない。) (3.1)，(3.2) を使うと，$\mathcal{D}^{p,q}(B')\ni\varphi,\psi$ (φ は組 $\{\varphi_\alpha\}$ で，φ_α は U_α で型 (p,q) の C^∞-微分式，$U_\alpha\cap U_\beta$ では $\varphi_\alpha=e_{\alpha\beta}\cdot\varphi_\beta$) に対して内積

(3.3) $\qquad (\varphi,\psi)=\int_V\frac{1}{b_\alpha}\varphi_\alpha\wedge *\overline{\psi_\alpha}$

を定めることができる。さらに

(3.4) $\qquad \begin{cases}\rho_\alpha=-\partial\log b_\alpha\\ \chi=\sqrt{-1}\,\bar\partial\rho_\alpha=\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial\log b_\alpha\end{cases}$

によって，B' における (metric) connection とその曲率形式とを導入し，

$$(3.5)\quad \begin{cases} D = D' + \bar\partial, \\ \mathcal{D}^{p,q}(B') \ni \varphi = \{\varphi_\alpha\} \longmapsto D\varphi = \{\partial\varphi_\alpha + \beta_\alpha \wedge \varphi_\alpha\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \longmapsto \bar\partial\varphi = \{\bar\partial\varphi_\alpha\} \end{cases}$$

によって共変(外)微分を導入する。内積(3.3)に関する D', $\bar\partial$ の同伴作用素はそれぞれ

$$(3.6)\qquad \delta' = -*\bar\partial*, \qquad \vartheta = -*D'*$$

である。これらの用意をした上で *Laplace-Beltrami* 作用素を定義する,

$$\Box = \bar\partial\vartheta + \vartheta\bar\partial.$$

$\mathcal{D}^{p,q}(B')$ に2種のノルムを考える:

$$\|\varphi\|^2 = (\varphi, \varphi),$$

$$n(\varphi)^2 = (\varphi, \varphi) + (\bar\partial\varphi, \bar\partial\varphi) + (\vartheta\varphi, \vartheta\varphi).$$

この両者に関する $\mathcal{D}^{p,q}(B')$ の完備化をそれぞれ $\mathcal{L}^{p,q}(B')$, $W^{p,q}(B')$ で表わす。V の計量の *Completeness* を基礎として, つぎの事実が証明される.(*Andreotti-Vesentini* [1] より。)

<u>補題1.</u> $W^{p,q}(B') = \{\varphi \in \mathcal{L}^{p,q}(B') \mid \bar\partial\varphi \in \mathcal{L}^{p,q+1}(B'), \vartheta\varphi \in \mathcal{L}^{p,q-1}(B')\}$.

と考えてよい。ここに $\bar\partial\varphi$, $\vartheta\varphi$ は *distribution* の意味で

考える.

<u>補題2.</u> φが$\mathcal{L}^{p,q}(B')$の元でかつC^∞であり, $\square\varphi\in\mathcal{L}^{p,q}(B')$ならば, $\varphi\in W^{p,q}(B')$である。特に$\square\varphi=0$ならば$\bar\partial\varphi=0$, $\vartheta\varphi=0$である。

<u>補題3.</u> 正の定数cがあって, $\mathcal{D}^{p,q}(B')$の任意のφに対し

(3.7) $$(\bar\partial\varphi,\bar\partial\varphi)+(\vartheta\varphi,\vartheta\varphi)\geqq c(\varphi,\varphi)$$

がなりたつならば, $^\forall\alpha\in\mathcal{L}^{p,q}(B')$に対し唯一つの$\chi\in W^{p,q}(B)$があって, $\square\chi=\alpha$がなりたつ。

<u>補題4.</u> 上の補題3の場合, αがC^∞で$\bar\partial\alpha=0$をみたせば, $\beta=\vartheta\chi$は$\bar\partial\beta=\alpha$, $\vartheta\beta=0$をみたす(唯一つの)C^∞微分式$\in\mathcal{L}^{p,q-1}(B')$である。このとき

(3.8) $$(\beta,\beta)\leqq 4/c\ (\alpha,\alpha)$$

がなりたつ。

(3.8)の証明には,(これもやはり計量の Completeness

からえられる）Stampacchia の不等式というのが使われること，補題 3 のように α に x を対応させる写像は Green の作用素とよばれ，G で表わされることをつけ加えておく。

以上に言ってきた一般論は，複素直線バンドルが negative であるということを直接使わずに言えることである。これからさき，B' が negative で，(3.2) にいう $\{b_\alpha\}$ として V の complete Kähler metric (3.1) を与える $\{a_\alpha\}$ をとりうることを，利用する。こうとってあると曲率形式 χ はケーラー計量の基本形式の (-1) 倍にほかならない，従って

$$e(\chi) = -L$$

となる。ケーラー計量に関する公式

$$L\delta' - \delta' L = \sqrt{-1}\,\bar{\partial}, \quad \Lambda\bar{\partial} - \bar{\partial}\Lambda = -\sqrt{-1}\,\delta'$$

（これらは line bundle valued の微分式に対しても使える）を使って

$$\begin{aligned} e(\chi)\Lambda - \Lambda e(\chi) &= \sqrt{-1}\,\{(D'\bar{\partial} + \bar{\partial}D')\Lambda - \Lambda(D'\bar{\partial} + \bar{\partial}D')\} \\ &= (\bar{\partial}\vartheta + \vartheta\bar{\partial}) - (D'\delta' + \delta' D') \end{aligned}$$

がえられる。それ故

$$(3.9)\qquad \square = (\Lambda L - L\Lambda) + *^{-1}\square *.$$

q 次の微分式 φ に対しては $(\Lambda L - L\Lambda)\varphi = (n-q)\varphi$ であるから, $\mathcal{D}^q(\mathcal{B}') \ni \varphi$ に対し

$$\begin{aligned}(\bar\partial\varphi, \bar\partial\varphi) + (\vartheta\varphi, \vartheta\varphi) &= (\square\varphi, \varphi)\\ &= (n-q)(\varphi, \varphi) + (\square *\varphi, *\varphi)\\ &\geqq (n-q)\cdot(\varphi, \varphi)\end{aligned}$$

がえられる。すなわち

<u>補題5</u>. 我々の $\mathcal{D}^q(\mathcal{B}')$ $(1 \leqq q < n)$ に対しては, $c = (n-q)$ ととれば補題3の條件(3.7)がなりたつ。

従って補題4により,

<u>命題WV</u>. 我々の $\mathcal{B}'$ に対しては, $\varphi \in \mathcal{D}^q(\mathcal{B}')$ で $\bar\partial\varphi = 0$ を満す φ に対して, 型 $(0, q-1)$ の $\mathcal{B}'$-valued C^∞ 微分式 $\psi \in \mathcal{L}^{q-1}(\mathcal{B}')$ で, $\bar\partial\psi = \varphi$, $\vartheta\varphi = 0$, $(\psi, \psi) \leqq \frac{4}{n-q}(\varphi, \varphi)$ をみたすものが, 存在する。

$\bar\partial\psi = \varphi$ をみたす ψ が $\mathcal{D}^{q-1}(\mathcal{B}')$ 内に(台がコンパクト

なように）とれることを示すのが，次の段階であって，そこに Carleman 評価の方法が使われる。

$\lambda(t)$を，実変数tのC^∞函数で

$$\begin{cases} \lambda(t),\ \lambda'(t),\ \lambda''(t) \geqq 0 \\ t<0 \text{ では } \lambda(t)=\lambda'(t)=\lambda''(t)=0 \\ t>0 \text{ では } \lambda'(t)>0 \\ 0<t<1 \text{ では } \lambda''(t)>0,\ t<1 \text{ では } \lambda''(t)=0 \end{cases}$$

を満すものとする。Aを正の定数とし，(3.2)にいうb_αとして

(3.10) $\quad b_{\alpha,\nu} = e^{-\nu\cdot\lambda(\Psi-A)}\, a_\alpha \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$

をとる。(Vのケーラー計量はかえない。) これに対応して内積(,), $\mathcal{L}^{p,q}$, ϑ, □ ……にも添字νをつけて区別する。$\nu = 0$に対応するものは，既に考えたのと同じだから添字はつけない。

χの変化についてみると，

(3.11) $\quad \begin{cases} \chi_\nu = \chi - \nu\cdot\omega, \\ \omega = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\lambda(\Psi - A) \end{cases}$

がわかる。(3.9)は

$$\square_\nu = (\Lambda L - L\Lambda) + *^{-1}\square * + \nu(\Lambda e(\omega) - e(\omega)\Lambda)$$

となる。Φが多重劣調和であったこと，$\lambda'(t),\ \lambda''(t)\geqq 0$ であることを使うと，$\mathcal{D}^{p,q}(B')\ni\varphi$ に対して $((\Lambda e(\omega)-e(\omega)\Lambda)\varphi,\varphi)_\nu\geqq 0$がなりたつことが，計算により示されるので，結局

補題 6. ファイバー上の計量（3.10）をとった場合にも，νに無関係な定数 $c=n-q$ を使って，$\mathcal{D}^q(B')\ni\varphi$ $(1\leq q\leqq n-1)$ に対し

$$(\bar\partial\varphi,\bar\partial\varphi)_\nu+(\vartheta_\nu\varphi,\vartheta_\nu\varphi)_\nu\geqq c\cdot(\varphi,\varphi)_\nu$$

がなりたつ。従ってさらに$\bar\partial\varphi=0$ならば，型$(0,q-1)$の C^∞ 微分式 $\psi_\nu\in\mathcal{L}^q_\nu(B')$ があって

$$\bar\partial\psi_\nu=\varphi,\quad \vartheta_\nu\psi_\nu=0,\qquad (\psi_\nu,\psi_\nu)_\nu\leqq\frac{4}{n-q}(\varphi,\varphi)_\nu.$$

さて $\varphi\in\mathcal{D}^q(B')$，$\bar\partial\varphi=0$ が与えられたとし，$K=\mathrm{supp}\,\varphi$，$A=\max_{p\in K}\Phi(p)$ とおく。このAを使って（3.10）の$b_{\alpha,\nu}$を定める。そして補題6を適用すると，$\psi_\nu\ (\nu=1,2,\cdots)$ がえられる。内積を積分の形に書き下してみれば，$(\psi_\nu,\psi_\nu)_\nu\geqq(\psi_\nu,\psi_\nu)$，および（K上で $b_{\alpha,\nu}=a_\alpha$ であることを使って） $(\varphi,\varphi)_\nu=(\varphi,\varphi)$ がわかる。故に

$$(\psi_\nu, \psi_\nu) \leqq (\psi_\nu, \psi_\nu)_\nu \leqq \frac{4}{n-q}(\varphi, \varphi)_\nu = \frac{4}{n-q}(\varphi, \varphi).$$

これは $\{\psi_\nu ; \nu = 1, 2, 3 \cdots\}$ が $\mathcal{L}^{q-1}(B')$ 内で有界な集合をなすことを示す。従って必要ならばその部分列をとると，弱収束の意味で $\mathcal{L}^{q-1}(B')$ 内に極限 ψ をもち，*distribution* の意味で $\bar{\partial}\psi = \varphi$ がなりたつ。

$M = \{p \mid \Phi(p) > A+1\}$ とおくと，

$$\int_M e^{\nu\lambda(\Phi - A)} a_\alpha^{-1} (\psi_\nu)_\alpha \wedge * \overline{(\psi_\nu)_\alpha} \leqq (\psi_\nu, \psi_\nu)_\nu \leqq \frac{4}{n-q}(\varphi, \varphi).$$

一方M上では $\lambda(\Phi - A) \geqq c > 0$ となる定数 c がある。それ故上式の左辺 $\geqq e^{\nu c} \int_M a_\alpha^{-1} (\psi_\nu)_\alpha \wedge * \overline{(\psi_\nu)_\alpha}$. 従って $\nu \to \infty$ のとき $\int_M a_\alpha^{-1} (\psi_\nu)_\alpha \wedge * \overline{(\psi_\nu)_\alpha} \longrightarrow 0$. これから，*distribution* としての ψ の *support* がコンパクト集合 $V-M$ 内に含まれることがわかる。

最後に Andreotti-Vesentini [1] の Lemma 12 にいう *regularization* を行って，台がもう少し大きくなることを許せば，$\exists \psi_0 \in \mathcal{D}^{q-1}(B')$, $\bar{\partial}\psi_0 = \varphi$ がわかる。

§4. 定理2の証明

$\tilde{X} \supset S \xrightarrow{\pi} M$ という状態にあるとき，Mの一点 a に対

し，M上における局所座標 $\zeta^1, \cdots, \zeta^m$ を，$\zeta^j(a)=0$ で，$D=\{(\zeta) \mid \sum|\zeta^j|^2<1\}$ が a の十分小さい近傍になるように，とる。$\pi^{-1}(D) \cong D\times\mathbb{P}^{r-1}$ である。$\mathbb{P}^{r-1}$ 上の斉次座標 $(\eta^1, \cdots, \eta^r)$ をとっておく。$U_\alpha=\{\eta^\alpha \neq 0\}$ とおけば，$\{\xi_\alpha^\gamma = \eta^\gamma/\eta^\alpha \mid \gamma=1, \cdots, \hat{\alpha}, \cdots, r\}$ は U_α 上での局所座標系をなす。$\{U_\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,r}$ は $\mathbb{P}^{r-1}$ の開被覆であり，超平面 e の定める複素直線バンドル[e] はこの被覆に関して *transition functions*

$$(4.1) \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = \eta^\beta/\eta^\alpha = \xi_\alpha^\beta$$

によって与えられる。

$$(4.2) \qquad a_\alpha^{(0)} = \sum_\gamma |\eta^\gamma|^2/|\eta^\alpha|^2 = \sum_\gamma |\xi_\alpha^\gamma|^2$$

は，ファイバー上の計量を与える。（その曲率形式は標準的な $\mathbb{P}^{r-1}$ の Hodge 計量である。）$D\times\mathbb{P}$ 上における [e] の *pull back* をも [e] であらわすと，これは被覆 $\{D\times U_\alpha\}$ に関し（4.1）で定められる。計量としては

$$(4.3) \qquad \begin{cases} a_\alpha = e^{\phi(\zeta)} \cdot a_\alpha^{(0)}, \\ \phi(\zeta) = \sum_j |\zeta^j|^2 \end{cases}$$

をとる。その曲率形式は $D\times\mathbb{P}$ 上で正定値である。条件

$[S]_{La}=[e]^{-1}$ のため, $[S]_{D\times\mathbb{P}}=[e]^{-1}$ となる。

$\tilde{X}$ 上の座標近傍の有限集合 $\{V'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で, つぎのようなものがとれる:

$V'_\lambda\cap S=D\times U'_\lambda$, $\{U'_\lambda\}$ は $\mathbb{P}$ の被覆をなし $\{U_\alpha\}$ の細分である。(細分関係をあらわす写像を $\tau:\Lambda\to\{1,\cdots,r\}$ とする, $U'_\lambda\subset U_{\tau(\lambda)}$.) V'_λ 上に $\tilde{X}$ の局所座標系 $(z^1_\lambda,\cdots,z^m_\lambda, x^1_\lambda,\cdots,\hat{x}^{\tau(\lambda)}_\lambda,\cdots,x^r, y_\lambda)$ があって, y_λ は V'_λ における S のイデアルを生成し, $[S]$ の変換函数 $e_{\lambda\mu}=y_\lambda/y_\mu$ などについて,

$$(4.4)\qquad\left\{\begin{array}{l} e_{\lambda\mu}|S=\varepsilon^{-1}_{\lambda\mu},\\ z^j_\lambda|S=\zeta^j,\qquad x^\alpha_\lambda|S=\xi^\alpha_{\tau(\lambda)}\end{array}\right.$$

がなりたつ。(ここに $\varepsilon_{\tau(\lambda),\tau(\mu)}$ のことを $\varepsilon_{\lambda\mu}$ と書いている。また $x^{\tau(\lambda)}_\lambda\equiv 1$ とおいている。)

$V'=\bigcup_\lambda V'_\lambda$ とおくと, これは La の近傍である。V' の canonical bundle K を $S\cap V'$ 上に制限すると, adjunction formula により

$$K|S\cap V'=K(D\times\mathbb{P}^{r-1})\otimes[S]_S^{-1}=[e]^{-(r-1)}$$

となる. それ故 K の変換函数 $k_{\lambda\mu}$ も

$$k_{\lambda\mu}|S=\varepsilon_{\lambda\mu}^{-(r-1)}$$

をみたすと考えてよい。

今 i を一つきめ添字を略して z^i_λ を z_λ と書くことにする。$z_\lambda - z_\mu$ は S 上で 0 になるから

$$f_{\lambda\mu} = y_\lambda^{-1}(z_\lambda - z_\mu)$$

は $V'_\lambda \cap V'_\mu$ での正則函数である。容易にたしかめられるように $\{f_{\lambda\mu}\}\in Z^1(\mathfrak{P}, \mathcal{O}([S]^{-1}))$ である。($\mathfrak{P}$ は被覆 $\{V'_\lambda\}$ の, $\mathfrak{N}$ は $\{D\times U'_\lambda\}$ の Nerve をあらわす。) $f_{\lambda\mu}|S = \varphi_{\lambda\mu}$ とおくと, $\{\varphi_{\lambda\mu}\}\in Z^1(\mathfrak{N}, \mathcal{O}([e]))$ だが, $H^1(D\times\mathbb{P}, \mathcal{O}([e]))=0$ のため $D\times U'_\lambda$ での正則函数 φ_λ があって

$$\varphi_{\lambda\mu} = \varphi_\lambda - \varepsilon_{\lambda\mu}\varphi_\mu$$

となる。φ_λ の V'_λ への拡張を一つとって f_λ とし, $z'_\lambda = z_\lambda - y_\lambda f_\lambda$ とおけば, $z'_\lambda - z'_\mu \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ y_\lambda^2)$ $f'_{\lambda\mu} = y_\lambda^{-2}(z'_\lambda - z'_\mu)$ とおいて上同様の操作を行う。$H^1(D\times\mathbb{P}, \mathcal{O}([e]^2))=0$ を使って $z''_\lambda = z'_\lambda - (y_\lambda)^2 f'_\lambda$ を作り, $z''_\lambda - z''_\mu \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ (y_\lambda)^3)$ に到達する。以下同様に進むことができる。

$[e]$ の正則切断面 $\xi^\alpha = \{\xi^\alpha_\beta\}_{\beta=1,\dots,r}$ や, $[e]^{r-1}$ のそれ $\omega^\rho = \{\omega^\rho_\lambda\}$, $\omega^\rho_\lambda = M^\rho/(\eta^{\tau(\lambda)})^{r-1}$ (ここに M^ρ は (η)

に関する $(r-1)$ 次単項式全体にわたる)　や を，近似的に V' に拡張する問題についても同様のことができる．$\omega=\omega^{\rho}$ についてやってみると，ω_λ の V'_λ への延長の一つ w_λ から出発して，$w_\lambda - k_{\lambda\mu}^{-1} w_\mu = y_\lambda \cdot g_{\lambda\mu}$ で $\{g_{\lambda\mu}\}$ を定めると，これが $\in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}(K^{-1}\otimes[S]^{-1}))$。その S 上への制限を coboundary の形に書いて，現れる 0-コチェインの成分を V'_λ に延長し g_λ とおく。$(w_\lambda - y_\lambda g_\lambda) - k_{\lambda\mu}^{-1}(w_\mu - y_\mu g_\mu) = (y_\lambda)^2 \cdot g'_{\lambda\mu}$, $\{g'_{\lambda\mu}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}(K^{-1}\otimes[S]^{-2}))$ となる。以下同様。そこでつぎの補題をうる:

<u>補題7</u>. 整数 l を与えるとき，局所座標 z_λ^j, x_λ^r は，(4.4) のほかにつぎの (4.5) をもみたすようにとれる。また V'_λ における正則函数 w_λ^ρ を，(4.5) をみたすようにとれる。

$$(4.5)\quad \begin{cases} z_\lambda^j - z_\mu^j \equiv (y_\lambda)^l f_{\lambda\mu}^j, \\ x_\lambda^\alpha - e_{\lambda\mu}^{-1} x_\mu^\alpha = (y_\lambda)^l g_{\lambda\mu}^\alpha \\ w_\lambda^\rho - k_{\lambda\mu}^{-1} w_\mu^\rho = (y_\lambda)^l h_{\lambda\mu}^\rho , \end{cases}$$

ここに $f_{\lambda\mu}^j$, $g_{\lambda\mu}^\alpha$, $h_{\lambda\mu}^\rho$ は $V'_\lambda \cap V'_\mu$ における正則函数である。

（V' はもう少し小さいもので置き換えねばならないかも知れないが，それは差支ない。）$f^j=\{f^j_{\lambda\mu}\}$, $g^\alpha=\{g^\alpha_{\lambda\mu}\}$, $h^\rho=\{h^\rho_{\lambda\mu}\}$ は，それぞれ $Z^1(\mathfrak{W},\mathcal{O}([S]^{-l}))$, $Z^1(\mathfrak{W},\mathcal{O}([S]^{-l-1}))$, $Z^1(\mathfrak{W},\mathcal{O}(K^{-1}\otimes[S]^{-l}))$ の元である。これらを *differentiable sections* を使って *coboundary* に書くことは常に可能である。従って

補題8. V'_λ における C^∞-函数 φ^j_λ, ψ^α_λ, π^ρ_λ をうまくとって，$V'_\lambda\cap V'_\mu$ で

$$
(4.6)\quad \begin{cases} Z^j = z^j_\lambda-(y_\lambda)^l\varphi^j_\lambda = z^j_\mu-(y_\mu)^l\varphi^j_\mu \\ X^\alpha_\lambda = x^\alpha_\lambda-(y_\lambda)^l\psi^\alpha_\lambda \text{ に対し } X^\alpha_\lambda = e^{-1}_{\lambda\mu}X^\alpha_\mu \\ W^\rho_\lambda = w^\rho_\lambda-(y_\lambda)^l\pi^\rho_\lambda \text{ に対し } W^\rho_\lambda = k^{-1}_{\lambda\mu}W^\rho_\mu \end{cases}
$$

となるようにできる。

そこで

$$
(4.7)\quad \begin{cases} A_\lambda = e^{\sum|Z^j|^2}\left(\sum_\alpha|X^\alpha_\lambda|^2\right) \\ B_\lambda = \sum_\rho|W^\rho_\lambda|^2 \\ F \;= A_\lambda\cdot|y_\lambda|^2 = A_\mu\cdot|y_\mu|^2 \\ \psi \;= \sum_j|Z^j|^2+F \end{cases}
$$

とおく。$l \geqq 3$ととっておけば，つぎの二つの補題が成り立つ。

<u>補題9</u>．V'上Fが十分小さい範囲では，ψの Levi form は，$\frac{1}{2}\{\sum_j |dz^j|^2 + |dy|^2\}$と半正定値形式との和として表わされる。

<u>補題10</u>．V'_λ上Fが十分小さい範囲では

$$\left(\frac{\partial^2 \log A_\lambda}{\partial x_\lambda^\alpha \partial \bar{x}_\lambda^\beta}\right), \quad \left(\frac{\partial^2 \log B_\lambda}{\partial x_\lambda^\alpha \partial \bar{x}_\lambda^\beta}\right)$$

は正定値行列である。

この二つが云えたとすれば，定理2はつぎのように示される。$\delta > 0$を十分小さくとると，$V = \{p \in V' | \psi(p) < \delta\}$は$V'$内で relatively compact，かつ$V$では補題9,10が成り立つようになる。$\Psi = (1 - \psi/\delta)^{-1}$とおけば条件(a)，(b)は成り立つ。$B_\lambda^{-1} \cdot A_\lambda^{-k} e^{-m\psi}$が$\mathcal{K} \otimes [S]^k$に対するファイバー上の計量を与えるから，$m$を十分大にすれば条件(c)が$\mathcal{B} = [S]^k$に対して成り立つ。

補題10は，$y_\lambda=0$ に対して A_λ が a_λ に，B_λ が a_λ^{r-1} に，帰着することに注意すれば，直ちにわかる。補題9.については，($\tau(\lambda)=r$ であるような V_λ で考え，添字 λ を略して）直接の計算により

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^j\partial\bar z^k} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^j\partial\bar y} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^j\partial\bar x^\beta} \\ * & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial\bar y} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\partial\bar x^\beta} \\ * & * & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^\alpha\partial\bar x^\beta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_m+O(|y|) & e^{\sum|z^j|^2}(1+\sum|x^\alpha|^2)\{\bar z^k u+O(|y|^2)\} & O(|y|^2) \\ * & e^{\sum|z^j|^2}(1+\sum|x^\alpha|^2)+O(|y|) & e^{\sum|z^j|^2}\bar y(x^\beta+O(|y|)) \\ * & * & e^{\sum|z^j|^2}|y|^2(I_{r-1}+O(|y|)) \end{pmatrix}$$

となる。$y=0$ で（図の）対角線以外の項は 0 となるが，右下の所も 0 となるので気になる。$G>0$ を大きくとれば，$\sum|x_\alpha|^2\leqq G$ なる範囲で考えればよいから，$\eta>0$ を，$\eta G<\frac{1}{3}$ となるようにとっておくと，

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial\bar{y}}(dy,d\bar{y})+\sum_{\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial\bar{x}^{\beta}}(dy,d\bar{x}^{\beta})+\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{\alpha}\partial\bar{y}}(dx^{\alpha},d\bar{y})+\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^{\alpha}\partial\bar{x}^{\beta}}(dx^{\alpha},d\bar{x}^{\beta})$$

$$=e^{\sum|z^j|^2}\Big\{\sum_{\alpha=1}^{r-1}|(1+\eta)^{-\frac{1}{2}}y\,dx^{\alpha}+(1+\eta)^{\frac{1}{2}}x^{\alpha}dy|^2+(1-\eta\sum|x_{\alpha}|^2+O(|y|))(dy,d\bar{y})$$

$$+\sum\bar{y}a_{\beta}(dy,d\bar{x}^{\beta})+\sum y\bar{a}_{\alpha}(dx^{\alpha},d\bar{y})+|y|^2\sum\Big(\frac{\eta}{1+\eta}\delta_{\alpha\beta}+b_{\alpha\beta}\Big)(dx^{\alpha},d\bar{x}^{\beta})$$

$$\geqq e^{\sum|z^j|^2}\Big\{\frac{2}{3}(dy,d\bar{y})+\sum\bar{y}a_{\beta}(dy,d\bar{x}^{\beta})+\sum y\bar{a}_{\alpha}(dx^{\alpha},d\bar{y})$$

$$+|y|^2\sum\Big(\frac{\eta}{2}\delta_{\alpha\beta}+b_{\alpha\beta}\Big)(dx^{\alpha},d\bar{x}^{\beta})$$

となる，ここに $a_{\alpha}, b_{\alpha\beta}$ は $O(|y|)$ の量である。同じような方法で $\sum\frac{\partial^2\psi}{\partial z^i\partial\bar{x}^{\beta}}(dz^i,d\bar{x}^{\beta})$ の項から来る影響も処理して，補題9の成立が認められる。

§5. モノイダル変換の微小変形

複素多様体 W_0 が，複素多様体 V_0 のモノイダル変換（中心 M_0, M_0 の逆像 S_0）であるとする。W_0 を中心メンバーとする，複素多様体の解析的変形族があるとき，W_0 に十分近いメンバー W_t は，再びある V_t のモノイダル変換になっているであろうか？

この問題に対しては Kodaira[3] によって十分な準備

ができているので，我々の主定理が直ちに応用され，肯定的な解決が与えられる．Kodaira[3] の結果とはつぎのようなことである：

$\mathcal{W}$, Bは複素多様体，p は $\mathcal{W}$ からB上への正則な写像で，$\mathcal{W}$の各点でそのヤコビアンの階数が $\dim B$ だけあるものとする。そうすれば $t\in B$ に対し $W_t=p^{-1}(t)$ は（連結でないかも知れないが）$\mathcal{W}$ の複素部分多様体である。Bの点 0に対し W_0 がコンパクト,余次元1の部分多様体 S_0 をふくみ，S_0はある複素多様体 M_0 上の解析的 $\mathbb{P}^{r-1}$ バンドルになっているとする。さらに複素直線バンドル$[S_0]$を，$\pi: S_0\to M_0$ の任意のファイバー上に制限すると $[e]^{-1}$ となっているとする。この場合Bにおける 0の小近傍N，$\mathcal{W}'=\pi^{-1}(N)$ の余次元 1の部分多様体$\mathcal{S}$，コンパクト複素多様体の解析的変形族 $g: \mathcal{M}\to N$，正則写像 $\tilde{\pi}: \mathcal{S}\to\mathcal{M}$があって，

(a) $(\mathcal{S}, N, p)$ もコンパクト複素多様体の解析的変形族であり，$p^{-1}(0)=S_0$, $g^{-1}(0)=M_0$.

(b) $p=g\circ\tilde{\pi}$, $\tilde{\pi}: \mathcal{S}\to\mathcal{M}$ は $\mathbb{P}^{r-1}$をファイバーとする解析的バンドルであり，$\tilde{\pi}|S_0=\pi$（はじめの $\mathbb{P}^{r-1}$ バン

ドル $S_0 \to M_0$ での射影）である。

主定理を $\mathcal{W} \supset \mathcal{S}$ に適用すれば $\mathcal{V} \supset \mathcal{M}$ がえられる。$\mathcal{V} \to B$ が定まって，各 V_t のモノイダル変換が W_t になることは，見易い。

以上本稿は Nakano[4]，Fujiki - Nakano[2]の内容をまとめて述べたものである。それ故研究集会の記録ではないが，現実に時日の余裕があり，一方別の目的のためこれを書いたので，流用した。御諒承下さい。

参考文献

[1] A. Andreotti-E. Vesentini, Carleman estimate for the Laplace-Beltrami equations on complex manifolds, Publication Mathematiques IHES, 25(1965) pp.81-155.

[2] A. Fujiki-S. Nakano, Supplement to "On the inverse of monoidal transformation", to apper in Publications RIMS.

[3] K. Kodaira, On stability of compact submanifolds of complex manifolds, Amer. J. Math., vol.85(1963) pp.79-94.

[4] S. Nakano, On the inverse of monoidal transformation, Publications RIMS, vol.6.