数理解析研究所講究録
第117巻 1971年 1-7

ある特殊な2階非線形常微分方程式に関する問題

京大数解研　　占部　実

東工大の大槻教授から，幾何学上のある重要な問題がある特殊な2階非線形常微分方程式の周期解の周期の評価にかかっているので，研究に協力して貰えまいか，との話しがあり，本年度の数解研短期共同研究で協力してその研究に当ることになった。

問題の微分方程式は

$$(1)\qquad nx(1-x^2)\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+(1-x^2)(nx^2-1)=0$$

である。ここで n は2より小さくない整数である。(1)は

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{nx(x^2-1)}\left[y^2-n(x^2-1)\left(x^2-\dfrac{1}{n}\right)\right] \end{cases}$$

と書直せるから，これから

$$(3)\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-n(x^2-1)(x^2-\frac{1}{n})}{nxy(x^2-1)}$$

を得る．便宜上 $\alpha=1/n$ (<1) とおいて，(3)を

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha y^2-(1-x^2)(\alpha-x^2)}{-x(1-x^2)}$$

と書直すと，これは y^2 に関する線形微分方程式になるから，求積法で解かれ，

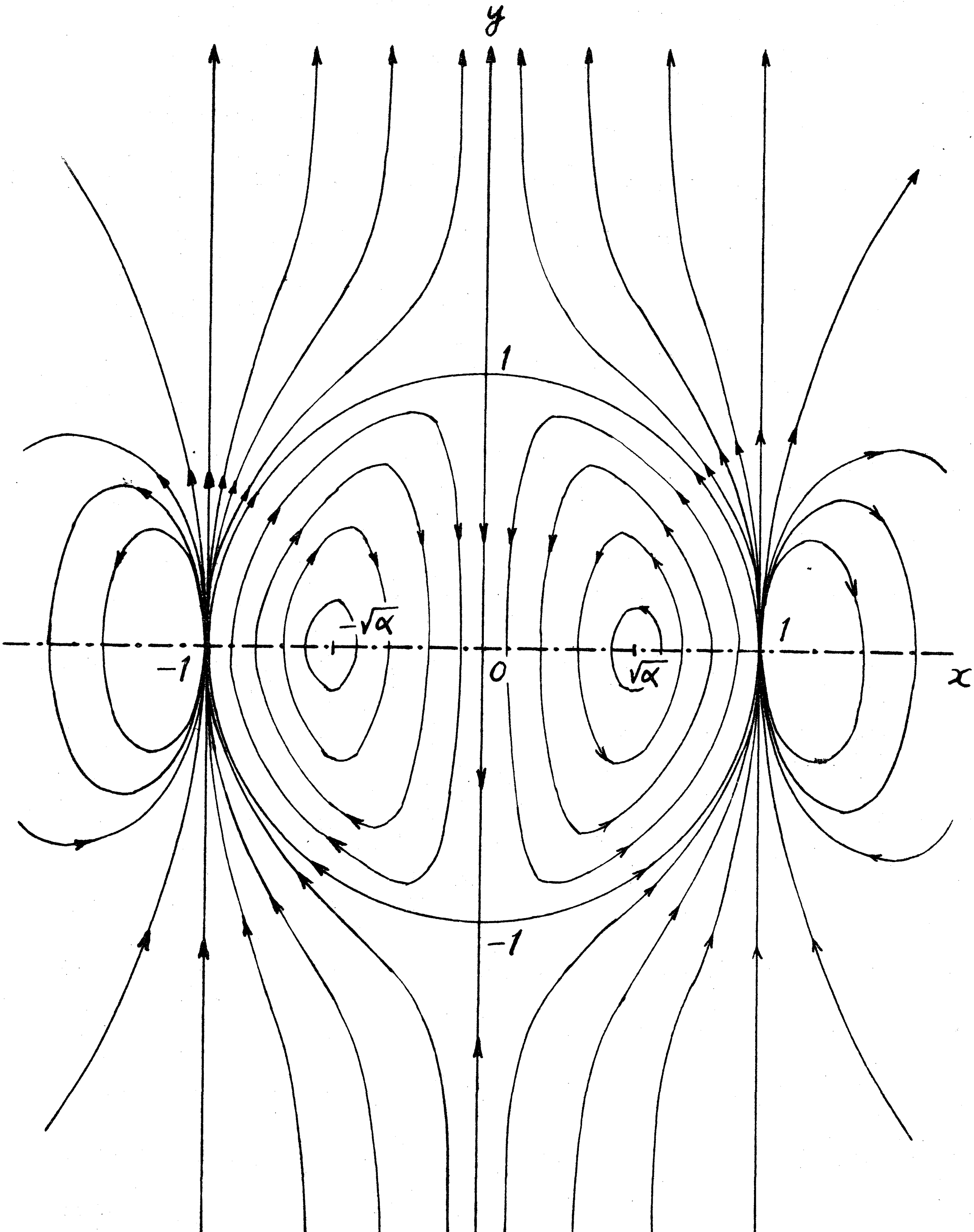
$$(4)\quad y^2=(1-x^2)-c\left[\frac{|1-x^2|}{x^2}\right]^{\alpha}$$

を得る．ただし c は任意定数である．

さて(3)を

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\sigma}=nxy(x^2-1), \\ \dfrac{dy}{d\sigma}=y^2-n(x^2-1)(x^2-\dfrac{1}{n}) \end{cases}$$

と書直すと，これの critical point は $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$,


y
1
$-\sqrt{\alpha}$
-1
0
$\sqrt{\alpha}$
1
x
-1

および $(\pm n^{-1/2}, 0) = (\pm\sqrt{\alpha}, 0)$ で，$(0, \pm 1)$ は saddle で separatrix は $x=0$, $y=\pm 1$ であり，$(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$ は center である．前ページの図では実線で (5) の軌道の様子を示している．この図からわかるように，(4) で与えられる曲線は $c>0$, $0<x^2<1$ のとき，center $(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$ のまわりをまわる閉軌道 C を表わしている．したがって，方程式

$$(6)\qquad (1-x^2) - c\left[\frac{1-x^2}{x^2}\right]^{\alpha} = 0$$

の根を $(\pm x_1, \pm x_2)$ $(0<x_1<x_2)$ とすれば，(2) の第1式から，閉軌道Cに対応する (1) の周期解の周期 T はつぎの式で求められる：

$$(7)\qquad T = 2\int_{x_1}^{x_2}\left\{(1-x^2) - c\left[\frac{1-x^2}{x^2}\right]^{\alpha}\right\}^{-1/2} dx$$

われわれの問題は，$T=2\pi$ となるような (1) の周期解があるかどうか，ということである．いいかえると，(7) で $T=2\pi$ となるような c があるかどうか，ということである．これはしかし，中々簡単に解決しそうにない。

そこで筆者は数値計算を行うことも考慮に入れて，周期を

計算するのにもう少し便利な式を導いてみた。そのやり方はつぎの通りである。

軌道は x, y-軸に関して対称であるから、$(\sqrt{\alpha}, 0)$ のまわりをまわる閉軌道だけについて考え、$(\sqrt{\alpha}, 0)$ を中心にした極座標を導入して、

$$(8) \qquad x = \sqrt{\alpha} + r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

とおく。すると、(5) は両辺を r で割ってつぎのように書直すことができる:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{ds} = \sqrt{\alpha}\, r \sin\theta\cos\theta \left[1 - (\sqrt{\alpha} + r\cos\theta)^2\right] + \alpha r^2 \sin^3\theta \\[2ex] \dfrac{d\theta}{ds} = \left[(\sqrt{\alpha} + r\cos\theta) + \sqrt{\alpha}\cos^2\theta\right]\left[1 - (\sqrt{\alpha} + r\cos\theta)^2\right] \\ \qquad\qquad + \alpha r \sin^2\theta\cos\theta \end{cases}$$

ところが (9) の第2式の右辺はつねに正であることが容易に証明される。したがって閉軌道 C に対してはつぎの方程式が得られる:

$$(10) \qquad \frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\alpha}\, r \sin\theta \cdot \frac{R(r, \theta)}{(\sqrt{\alpha} + r\cos\theta) + \sqrt{\alpha}\cos\theta \cdot R(r, \theta)}$$

ただし

$$(11) \quad R(r,\theta) = \cos\theta + \frac{\sqrt{\alpha}\, r \sin^2\theta}{1-(\sqrt{\alpha}+r\cos\theta)^2}$$

さて，閉軌道 C に対応しては，方程式 $dx/dt = y$ に (8) を代入して，

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta\right)\frac{d\theta}{dt} = r\sin\theta$$

を得るから，C に対応する（1）の周期解の周期 T に対しては（10）を用いてつぎの式を得る：

$$(12) \quad T = 2\int_0^{\pi}\left[1+\frac{\sqrt{\alpha}\cos\theta}{\sqrt{\alpha}+r\cos\theta}\cdot R(r,\theta)\right]^{-1} d\theta$$

（10）の解 $r = r(\theta)$ は初期条件 $r(0) = a$ を与えると容易に計算される．したがって閉軌道 C の周期 T は，$r=r(\theta)$ を（12）に代入し数値積分を行うことによって求められる．周期を数値的に計算するのには，（7）によるより，この方がはるかに簡単である．

（12）から，$n\to\infty$ のときは $\alpha\to 0$ であるから，$T\to 2\pi$ となり，また center $(\sqrt{\alpha}, 0)$ の近くにある閉軌道に対しては $r \fallingdotseq 0$ であるから，$T \fallingdotseq \sqrt{2}\,\pi$ となることはすぐわかる．しかし，（12）から，$T=2\pi$ となるよ

うな周期解があるかどうかを解析的に調べることは，これも容易ではなさそうである.

興味を持たれる人々から教示が得られれば幸と思い，大槻教授の同意を得てここに問題の紹介をしたわけである.

参考文献

Otsuki, T.: Minimal hypersurfaces in a Riemanian manifold of constant curvature, Amer. J. Math., 92 (1970), 145-173.