数理解析研究所講究録
第117巻 1971年 16-26

準周期系について

東北大 理　中島文雄

まえがき

準周期系における準周期解の存在を示すためには、二つの立場がある。一つは~~概~~周期解の特別なものとして見る立場，他の一つは不変周期曲面との関連から見る立場である。著者の修士論文においては，これらの各々による存在定理が述べられている。しかしそのどちらの立場に立っても、条件として、"Hullの解の初期値に関するuniqueness"を仮定している。そこで，もしこの条件を仮定しない場合には、その結論はどう変るであろうか。これに答えるため、特に後者の立場に立つならば、ある意味で準周期解に近い解の存在が示される。本稿の目的はこれを示すことである。そして同時にそこに二つの立場の違いがあると思われる。

記号、

R^n ; n 次元ユークリッド空間、 以下、主に R^n の元を y, R^k の元を x で表わす。

$R = (-\infty, \infty)$.

$R^n \ni y = (y^1, \cdots, y^n)$ に対して、ノルム $\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y^i|^2}$ を定義する。

$e_j = (0 \cdots 0 \overset{j}{1} 0 \cdots 0) \in R^k$. $\tilde{t} = (t, t, \cdots t) \in R^k$

$C(A; B)$ は A を定義域、B を値域とする連続関数の全体である。

定義 1

$(\frac{1}{\omega_1}, \cdots, \frac{1}{\omega_k})$ が一次独立とは、

$\frac{n_1}{\omega_1} + \cdots + \frac{n_k}{\omega_k} = 0$ なる整数の組 $(n_1, \cdots, n_k)$ は $(0, \cdots 0)$ に限る。

以下、$\{\omega_1, \cdots \omega_k\}$ を固定して考え、$(\frac{1}{\omega_1} \cdots \frac{1}{\omega_k})$ が一次独立の関係にあるとする。

$$G(R^k) = \{ g(x) \in C(R^k; R^n) \mid g(x + \omega_j e_j) = g(x) \text{ for } j = 1, 2 \cdots n \}$$

このとき $G(R^k)$ は sup-norm で完備空間となる。

定義 2

$g_0(t) \in C(R; R^n)$ が準周期関数 (quasi-periodic function) であるとは、$g(x) \in G(R^k)$ が存在して

$g_0(t) = g(t, \cdots t) = g(\tilde{t})$ とかける。

$K=1$ のとき、準周期関数は周期関数となる。

定義3.

系 (1) $\frac{dy}{dt} = Y_0(t,y)$; $Y_0(t,y) \in C(R \times R^n ; R^n)$ が準周期的であるとは、ある関数 $Y(x,y) \in C(R^k \times R^n ; R^n)$ が存在して、

$Y(x+\omega_j e_j, y) = Y(x, y)$ for $j=1.2 \cdots K$, そして

$Y_0(t,y) = Y(\tilde{t}, y)$ とかけている。

次に R^k の部分集合 Θ_1 を定義する。

$\Theta_1 \ni x=(x^1, \cdots, x^k) \Longleftrightarrow \xi \in R$ と整数の組 $(n^1, \cdots, n^k)$ が存在して

$x^1 = \xi + n^1\omega_1, \cdots, x^k = \xi + n^k\omega_k$ とかけている。

即ち $x = \tilde{\xi} + (n^1\omega_1, \cdots, n^k\omega_k)$ である。

補題1

Θ_1 は R^k で dense である。

証明は略す。

Θ_1 の上の関数空間を定義する。

$$F(\Theta_1) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha(\theta) \in C(\Theta_1 ; R^n) ; \alpha(\theta + \omega_j e_j) = \alpha(\theta) \text{ for } j=1.2 \cdots K \\ \sup_{\theta \in \Theta_1} \|\alpha(\theta)\| < \infty \end{array} \right\}$$

すると $F(\Theta_1)$ は sup-norm $|||\alpha||| = \sup_{\theta \in \Theta_1} \|\alpha(\theta)\|$ で完備空間となる。

$G(R^k)$ との関係は

$G(R^k) \subset F(\Theta_1)$ である。

次に3種の連続関数を考える。

(a) 概周期関数 (almost periodic function)

(b) 準周期関数 (quasi-periodic function)

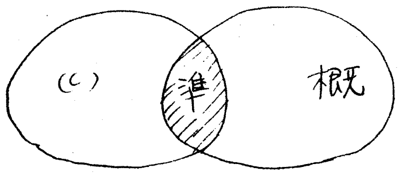
(c) $f(t) = \alpha(\bar{t})$ for some $\alpha(\theta) \in F(\Theta,)$

これらについて次の関係が成立する。

命題1.

(c)型の関数が更に概周期関数ならば、それは準周期関数である。

これを図示すると



命題1により、(c)型の解は準周期解に近いものと見なす。以下、定理1において、まえがきに述べた"近い解"として(c)型の解の存在定理を述べる。

o 不変周期曲面との関連.

定義3の系(1)に対応して、そこに現れる $Y(x, y)$ を用いて、

系(2)
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Y(x, y) & y \in R^n,\ x \in R^k \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = I \ \updownarrow k \end{cases}$$

を考える。

系(2)の解で，$t=t_0$ で $x=\theta_0$，$y=y_0$ を通る解を

$$\begin{cases} y(t,t_0,\theta_0,y_0) \\ x(t,t_0,\theta_0,y_0) \end{cases}$$ とおく． $\theta_0\in\Theta_1$，

すると x に関する方程式より

$x(t,t_0,\theta_0,y_0)=t-t_0+\theta_0$ となる。

定義4

$y=S(t,\theta)\in C(R\times\Theta_1;R^n)$ が系(2)に対する不変周期曲面

であるとは、

① $S(t,\theta+\omega_j e_j)=S(t,\theta)$ for $j=1,2,\cdots K$.

② ある $\omega_0>0$ が存在して $S(t+\omega_0,\theta)=S(t,\theta)$

③ 系(2)の解で，$y_0=S(t_0,\theta_0)$ なるものは，

$y(t,t_0,\theta_0,y_0)=S(t,x(t,t_0,\theta_0,y_0))$ for $t\geq t_0$

となる。

ここで，③は，集合 $\{(t,\theta,y)\in R\times\Theta_1\times R^n \mid y=S(t,\theta)\}$ から出る解は，この集合に留っていることを示している。即ち不変である。

補題2.

もし系(2)が不変周期曲面 $y=S(t,\theta)$ for $t\in R$, & $\theta\in\Theta_1$ を持ち，更に $\omega_0\in\{\omega_1\cdots\omega_K\}$ ならば，系(1)は(C)型の解を持つ。

証明は略す。

定義5. 系(2)のy解を用いて$F(\Theta_1)$からそれ自身への作用素を定義する。

$F(\Theta_1) \ni \alpha(\cdot)$に対して,

$$(T\alpha)(\theta) = y(\omega_0, 0, \theta - \overline{\omega}_0, \alpha(\theta - \overline{\omega}_0)) \quad \text{for } \theta \in \Theta_1.$$

補題3.

$(T\alpha)(\theta) = \alpha(\theta)$ on Θ_1 なる $\alpha(\cdot) \in F(\Theta_1)$ が存在することと、系(2)が不変周期曲面を持つこととは同値である。

証明は略す.

以上より系(1)が(C)型の解を持つためには,

$$(T\alpha)(\theta) = \alpha(\theta) \text{ on } \Theta_1, \quad \text{かつ } \omega_0 \in \{\omega_1 \cdots \omega_k\}$$

なる $\alpha(\cdot) \in F(\Theta_1)$ の存在を示せばよい。

定義6.

$H(Y_0(t,y)) \ni g(t,y) \Leftrightarrow$ ある数列 $\{\tau_\ell\}_{\ell=1}^{\infty}$ が存在して,

$\lim_{\ell\to\infty} Y_0(t+\tau_\ell, y) = g(t,y)$ uniformly on $R \times S$ (S: R^nの任意のコンパクト集合)

$$\text{系(3)} \quad \frac{dy}{dt} = g(t,y) \quad ; \; g(t,y) \in H(Y_0(t,y)).$$

定義7.

系(1)の解 $y_0(t)$ が quasi-uniform-asymptotically stable in the large on $[0,\infty)$ であるとは,

$^\forall M>0$, $^\forall \varepsilon>0$ に対して, $T(\varepsilon, M)>0$ が存在して.

$\|z_0 - y_0(t_0)\| < M$ ならば

$$\|y(t, t_0, z_0) - y_0(t)\| < \varepsilon \quad for \ t \geq t_0 + T(\varepsilon, M) \ ; t_0 \geq 0.$$

ここで $y(t, t_0, z_0)$ は系(1)の解で $t = t_0$ で z_0 を通るものである。

以下簡単のため、$y_0(t)$ は g-u-a-s-l on $[0, \infty)$ であると書く。

定理1.

系(1)及び系(3)において、

条件(1) 系(1)の解は初期値に関して唯一つ定まる。

条件(2) 各系(3)において 全ての解は $t = \infty$ まで定義されている。

条件(3) 有界な解 $y_0(t)$ (for $t \geq 0$) が存在して

g-u-a-s-l on $[0, \infty)$ である。

このとき、系(1)は唯一つの(C)型の解をもち、それは

g-u-a-s-l on R である。

証明.

補題4 定理の条件がみたされているとき、系(1)は R 上で定義された解 $\psi(t)$ を持ち、

$$\sup_{t \in R} \|\psi(t)\| \leq \sup_{t \geq 0} \|y_0(t)\|$$

かつ $\psi(t)$ は g-u-a-s-l on R である。

証明は Kamke's lemma を用いればよい。

さて定理の証明に入る。

$\sup_{t\geq 0}\|y_0(t)\| \leq B$ $(<\infty)$ とすると、補題4より、

$$\|\psi(t)\| \leq B \quad \text{on } R \quad \text{となる。}$$

定義5において $\omega_0 \in \{\omega_1 \cdots \omega_k\}$ なる T を定義すると、証明は、$(T\alpha)(\theta) = \alpha(\theta)$ on Θ_1 なる $\alpha(\cdot) \in F(\Theta_1)$ の存在を示せばよい。

条件(1)と(2)より、作用素 T が $F(\Theta_1)$ 上で定義され、又それが $F(\Theta_1)$ に写すことが判る。

$$\therefore \; T : F(\Theta_1) \longrightarrow F(\Theta_1).$$

従って、$\alpha(\cdot) \in F(\Theta_1)$ を固定して、$\{T^l\alpha(\cdot)\}_{l=1}^{\infty}$ を考えると、

$$\{(T^l\alpha)(\cdot)\}_{l=1}^{\infty} \subset F(\Theta_1) \text{ である。}$$

I. この関数列が一様有界であることを示す。

$(T^l\alpha)(\theta) = y(l\omega_0, 0, \theta - \overline{l\omega_0}, \alpha(\theta - \overline{l\omega_0}))$ とおける。

$y(t, 0, \theta - \overline{l\omega_0}, \alpha(\theta - \overline{l\omega_0})) = y(t, l, \alpha)$ とおくと、

$$(T^l\alpha)(\theta) = y(t, l, \alpha)\big|_{t = l\omega_0} \text{ である。}$$

$y(t, l, \alpha)$ は $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Y(\bar{t} + \theta - \overline{l\omega_0}, y) \\ y(0, l, \alpha) = \alpha(\theta - \overline{l\omega_0}) \end{cases}$ の解である。

$\theta \in \Theta_1$ ならば、$\theta - \overline{l\omega_0} \in \Theta_1$、従って $\xi_l \in R$ と整数の組 $(n_l^1 \cdots n_l^k)$ が存在して、

$$\theta - \overline{l\omega_0} = \overline{\xi}_l + (n_l^1\omega_1, \cdots, n_l^k\omega_k)$$ とかける。これを代入すると、$\dfrac{dy}{dt} = Y(\bar{t} + \theta - \overline{l\omega_0}, y) = Y(\bar{t} + \overline{\xi}_l, y) = Y_0(t + \xi_l, y)$ となり、

$y(t, l, \alpha)$ は $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Y_0(t + \xi_l, y) \\ y(0, l, \alpha) = \alpha(\theta - \overline{l\omega_0}) \end{cases}$ の解である。

このとき補題4で述べた$\psi(t+\xi_l)$も前述の系の解で、かつ q-u-a-s-l on R である。そして $|||y(0,l,\alpha)|||=|||\alpha|||<\infty$ より $T(|||\alpha|||,1)$ が存在して，

$$\|y(t,l,\alpha)-\psi(t+\xi_l)\| < 1 \quad \text{for } t \geq T(|||\alpha|||,1) \text{ and } l=1,2,\cdots$$

$$\|y(t,l,\alpha)\| < 1+\|\psi(t+\xi_l)\| \leqq 1+B$$

上式は $t=l\omega_0$ $\left(l \geq \frac{1}{\omega_0}\cdot T(|||\alpha|||,1)\right)$ でも成立しているから，

$$\|y(l\omega_0, l, \alpha)\| < 1+B \quad \text{for } l \geq \frac{1}{\omega_0}\cdot T(|||\alpha|||,1).$$

$$\|(T^l\alpha)(\theta)\| < 1+B \quad \text{for } l \geq \frac{1}{\omega_0}\cdot T(|||\alpha|||,1)$$

この式はθに無関係に成立しているから

$$|||(T^l\alpha)||| < 1+B \quad \text{for } l \geq \frac{1}{\omega_0}\cdot T(|||\alpha|||,1)$$

又、$\{T^l\alpha\}_{l=1}^{\infty} \subset F(\Theta_1)$ より

$$\max_{0\leq l<l_0} |||T^l\alpha||| < \infty \quad \left(l_0 \geq \frac{1}{\omega_0}T(|||\alpha|||,1)\right).$$

$|||T^l\alpha||| < M_0$ $(<\infty)$ for $l=1,2,\cdots$ なる $M_0>0$ が存在する。

II

$\{T^l\alpha\}_{l=1}^{\infty}$ が基本列であることを示す。

任意の l_1, l_2 $(l_2 \geq l_1)$ に対して，

$$(T^{l_1}\alpha)(\theta)-(T^{l_2}\alpha)(\theta) = (T^{l_1}\alpha)(\theta)-(T^{l_1})(T^{l_2-l_1}\alpha)(\theta)$$

$= y(l_1\omega_0, 0, \theta-\overline{l_1\omega_0}, \alpha(\theta-\overline{l_1\omega_0})) - y(l_1\omega_0, 0, \theta-\overline{l_1\omega_0}, (T^{l_2-l_1}\alpha)(\theta-\overline{l_1\omega_0}))$

$\overset{def}{=} y(t, l_1, \alpha)|_{t=l_1\omega_0} - y(t, l_1, T^{l_2-l_1}\alpha)|_{t=l_1\omega_0}$ とかける。

$\theta-\overline{l_1\omega_0} \in \Theta_1$ より、 $\theta-\overline{l_1\omega_0} = \xi + (n^1\omega_1, \cdots, n^k\omega_k)$ とかける。

従って、 $y(t, l_1, \alpha)$ と $y(t, l_1, T^{l_2-l_1}\alpha)$ は、

$$\frac{dy}{dt} = Y(t+\theta-\overline{l_1\omega_0}, y) = Y(t+\xi, y) = Y_0(t+\xi, y)$$

の解である。

従って補題4から、$\forall\varepsilon>0$ に対して、$T(M_0, \varepsilon/2)>0$ が存在して、

$$\|y(t, l_1, \alpha) - \psi(t+\xi)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for } t \geq T(M_0, \varepsilon/2),$$

$$\|y(t, l_1, T^{l_2-l_1}\alpha) - \psi(t+\xi)\| < \varepsilon/2 \quad \text{for 〃 〃},$$

ここで $y(t, l_1, \alpha)$, $y(t, l_1, T^{l_2-l_1}\alpha)$ の初期値は、各々 $\alpha(\theta-\overline{l_1\omega_0})$ $T^{l_2-l_1}\alpha(\theta-\overline{l_1\omega_0})$ でその sup-norm は M_0 より小さいことを用いた。

$$\therefore \|y(t, l_1, \alpha) - y(t, l_1, T^{l_2-l_1}\alpha)\| < \varepsilon \quad \text{for } t \geq T(M_0, \varepsilon/2)$$

そして上式は、$l_1=1, 2, \cdots$ に対して成立している。

$$\therefore \|y(l_1\omega_0, l_1, \alpha) - y(l_1\omega_0, l_1, T^{l_2-l_1}\alpha)\| < \varepsilon \quad \text{for } \forall l_1 \geq \frac{1}{\omega_0}\cdot T(M_0, \varepsilon/2)$$

即ち $\|(T^{l_1}\alpha)(\theta) - (T^{l_2}\alpha)(\theta)\| < \varepsilon \quad \text{for } l_2 \geq l_1 \geq \frac{1}{\omega_0}\cdot T(M_0, \varepsilon/2)$

ここで、上式は全ての θ について成立しているから、

$$|||(T^{l_1}\alpha) - (T^{l_2}\alpha)||| < \varepsilon \quad \text{for } l_2 \geq l_1 \geq \frac{1}{\omega_0} T(M_0, \varepsilon/2)$$

以上より $\{T^l\alpha\}_{l=1}^{\infty}$ は基本列である。

III

$\{T^l\alpha\}_{l=1}^{\infty} \subset F(\Theta_1)$，かつ $F(\Theta_1)$ は完備であるから、$\alpha_0(\theta) \in F(\Theta_1)$ が存在して、 $\lim_{l\to\infty} |||(T^l\alpha) - \alpha_0||| = 0$ となる。

さて，$y(t,0,\theta-\overline{w}_0,y_0)$ は，$\dfrac{dy}{dt}=Y(t+\theta-\overline{w}_0,y)$ の解で，$t=0$ で y_0 を通るものである．

条件(1)より上の系では，$\theta\in\Theta_1$ であるから，解は初期値に関して唯一つ定まり，従って y_0 の連続関数となる。

$$\therefore\quad \alpha_0(\theta)=\lim_{l\to\infty}T\cdot(T^l\alpha)(\theta)=\lim_{l\to\infty}y(w_0,0,\theta-\overline{w}_0,(T^l\alpha_0)(\theta-\overline{w}_0))$$
$$=y(w_0,0,\theta-\overline{w}_0,\alpha_0(\theta-\overline{w}_0))=(T\alpha_0)(\theta)$$
$$\therefore\quad \alpha_0(\theta)=(T\alpha_0)(\theta)\quad \text{for any } \theta\in\Theta_1.$$

以上より，(C)型の解が存在する。更に $\psi(t)$ の安定性を考慮すると，$\psi(t)$ とこの(C)型の解は一致して，唯一つしか存在しないことも判る。

証明は終る。

特に定理1において，条件1に加えて，更に，

"各系(3)の解が初期値に関して唯一つ定まる"

を仮定すれば，準周期解の存在定理が得られる。