数理解析研究所講究録
第117巻 1971年 39-58

Characteristic 0^+ の流れについて

神戸大 理学部 浦 太郎

§1. 序。

本講演の主目的は新しく得られた結果を報告することではない。実際，新しい結果は最後に述べる定理だけである。局所力学系（local dynamical system，local system と略称）における characteristic 0^+ の概念は著者によって導入されたが，この概念はそのままで局所半力学系（local semi-dynamical system，local semi-system と略称）にも適用される。力学系（(global) dynamical system，global system と略称）に対しては［1］，local semi-system に対しては［5］等の研究がある。特に［1］では R^2 を相空間とする，characteristic 0^+ の global system に対して，完全な分類が与えられている。（本研究所講究録 87 に解説がある。）［1］では条件の必要性のみを強調している

が，得られた條件は十分でもある。本講演の目的は，最後の定理を除き，characteristic 0^+ の local system の研究が，local system の研究上，どんな立場にあるか，どんな意味を持つかを解説することである。

以下の解説はほとんどその儘で，local system, local semi-system にもあてはめられるが，説明を簡単にするために，global system について述べる。

§2. Global Dynamical Systems と Isomorphism.

2.1 以下 R，R^+ で実数全体，負でない実数全体の集合を表わす。これらにおいて，位相，代数は常に通常のものを考える。（R^- は正でない実数全体の集合を表わす。以下 $+$ について説明したものは，$-$ については説明しない。Symmetry で容易に理解されよう。）

2.2 X を topological space とする。π が $X \times R \to X$ の写像で

(1) $\pi(x, 0) = x$

(2) $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t+s)$

(3) π は $X \times R$ で連続

なる3條件をみたすとき，(X, π) は力学系（(global) dynamical system），または π は phase space

X の上の力学系または流れ（(continuous) flow）であるという。

この定義の motivation，応用等は既知と考え，説明を加えない。

以下 phase space X の上の一つの flow π が与えられているものとする。

2.21　一般に写像 $f: A \times B \to C$ が与えられているとき，$a \in A$ に対して $f_a: B \to C$ は $f_a(b) = f(a, b)$ で定義される写像を表わすものとする。特にたとえば $x \in X$ に対しては，π_x は $\pi_x(t) = \pi(x, t)$ で定義される写像 $\pi_x: R \to X$ である。π_x による R の像，すなわち $\pi_x(R)$ を x を通る(全)軌道（(total) orbit）という。$\pi_x(R^+)$ を正半軌道（positive semi-orbit，+ semi-orbit と略記）と呼ぶ。$\pi_x(R) = C(x)$，$\pi_x(R^+) = C^+(x)$ で表わす。$\overline{C(x)}$，$\overline{C^+(x)}$ を軌道閉包（orbit closure），正半軌道閉包と呼んで $K(x)$，$K^+(x)$ で表わす。

$$x \longmapsto C(x),\ C^+(x),\ K(x),\ K^+(x)$$

によって四つの写像 $X \to 2^X$ が定義される。たとえば $C: X \to 2^X$ であるが，常に行なわれる通

り，$M\subset X$ に対して

$$C(M)=\bigcup_{x\in M} C(x)$$

と定義することによって，写像 $C:\ 2^X \to 2^X$ が得られる。

2.22 $x\in X$ の中，π_x が constant map になるような x を特異点 (singular point)，または危点 (critical point) と呼ぶ。Singular points 全体の集合を $\mathcal{S}$ または $\mathcal{S}_\pi$ で表わすことにする。そうすれば

$$\begin{aligned} x\in\mathcal{S} &\iff \forall t\in R,\ \ \pi_x(t)=x \\ &\iff C(x)=\{x\} \\ &\iff C^+(x)=\{x\}. \end{aligned}$$

$x\in X$ に対して

$$\mathcal{T}_x = \{T\in R \mid \pi(x,T)=x\}$$

とおく。$\mathcal{T}_x \ni 0$ は 2.2 の公理 (1) より明らかである。$\mathcal{T}_x\neq\{0\}$ のとき，x は周期的 (periodic) であるという。Periodic points 全体の集合を $\mathcal{P}$ または $\mathcal{P}_\pi$ とかくことにする。$\mathcal{P}\supset\mathcal{S}$ は明らかである。$\mathcal{T}_x\ni T\neq 0$ ならば

$$\forall t\in R,\quad \pi(x,t+T)=\pi(x,t)$$

が得られ，π_x は普通の意味で周期関数 $R\to X$ であ

る。

X が T_0-space ならば，$x \in P-\mathcal{S}$ に対しては，$\mathcal{C}_x$ は discrete (cyclic) subgroup of R になる。そのとき $\mathcal{C}_x$ の最小の正の要素，したがって $\mathcal{C}_x$ の generator，を x の基本周期 (fundamental period, elementary period, prime period) と呼ぶ。(X が T_0-space でないと，$\mathcal{C}_x$ が R の中で dense，しかも $\neq R$ でありうる。)

2.3 抽象的な構造が定義された場合，何を研究するかを明確にするためには，その構造の isomorphism を決定しなければならない。如何に決定するかは，その抽象化の母体と，その研究目標に拘束される。力学系の場合に，isomorphism を如何に定めるかは，論議の分れる所であろう。ここでは，天下りに 2 種類の isomorphism について述べる ([11] 参照)。以下 (X, π)，(Y, ρ) を二つの力学系とする。

定義． 一つの homeomorphism $h: X \to Y$ に対して

(α)　$\forall x \in X \quad h \circ C_\pi(x) = C_\rho(h(x))$

が成り立つとき，h は $\pi \to \rho$ の N.S-isomorphism であるという。条件 (α) は次の diagram が commute することと同値である。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "C_\pi"'] & Y \arrow[d, "C_\rho"] \\ 2^X \arrow[r, "h"] & 2^Y \end{tikzcd}$$

<u>定義</u>. $h: X \to Y$ を homeomorphism とする。写像 $\varphi: X \times R \to R$ に対して、$\varphi_x: R \to R$ が homeomorphism で、かつ $\varphi_x(0)=0$ がみたされるとする。

(β) $\forall (x,t) \in X \times R$, $h(\pi(x,t)) = \rho(h(x), \varphi(x,t))$ が成り立つとき、(h, φ) は $\pi \to \rho$ の GH-isomorphism であるという。φ を reparametrization map という。φ がある範囲 $A \times R (\subset X \times R)$ で連続であるとき、(h,φ) は A で continuous といい、$\forall x \in B \subset X$, $\varphi_x: R \to R$ が increasing であるとき、(h,φ) は B で increasing であるといおう。$A = X$, $(B = X)$ のときには A で continuous, (B で increasing) という代りに、単に continuous (increasing) といってよいであろう。

$\varphi_x: R \to R$ は homeomorphism であるから、φ_x は strictly increasing か strictly decreasing である。もし X が connected (これは essential

には常に仮定してよい）であるならば，φ が continuous の場合には，φ_x が increasing か decreasing かは x によらない。

$$\chi(x,t)=(h(x),\varphi(x,t))$$

とおいて，写像

$$\chi:\ X\times R\longrightarrow X\times R$$

を定義すると，条件（β）は次の diagram が commute することと同値である

$$\begin{array}{ccc} X\times R & \xrightarrow{\ \chi\ } & Y\times R \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ X & \xrightarrow{\ h\ } & Y \end{array}$$

2．31． (h,φ) が $\pi\to\rho$ の GH-iso. ならば h は $\pi\to\rho$ の NS-iso. である。しかし，h が $\pi\to\rho$ の NS-iso. であっても，(h,φ) が $\pi\to\rho$ の GH-iso. になるような reparametrization φ があるかどうかは，一般には分からない。ただ次の定理が証明されている。

__定理.__ h を $\pi\to\rho$ の NS-iso. とする。X したがって Y も Hausdorff ならば，(h,φ) が $X-S_\pi$ で continuous ~~であるよ~~ GH-iso であるような，reparametrization φ がある（[7]参照）。

§3. Immobile flows と parallel flows。

3.1. Global systems の中で最も簡単なものを考えよう。簡単という言葉には主観性が入りうるが，$X = \mathcal{S}_\pi$ であるものが，最も簡単であることに異論はないであろう。

$X = \mathcal{S}_\pi$ であるような π を immobile flow という。これは微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

に対応するものである。

<u>定理</u>　(X, π)，(Y, ρ) を二つの immobile flows とする。これらが isomorphic であるための必十條件は，X と Y とが homeomorphic であることである。

単に isomorphic と書いたが，NS-iso. と考えても GH-iso. と考えても，この場合は同じである。しかも GH-iso. の條件に $\forall x \in X$，φ_x : identity : $R \to R$ の條件を加えても変わりはない。かくて，この最も簡単な流れである immobile flows は，phase space X の位相的性質によって完全に定まってしまって，力学の問題として考える余地はない。まさにつまらない flow

である。

3.2 そこで immobile flows をのぞいて，最も簡単な流れを考えるのが順序であろう。それがどんな流れであるかは色々と議論が出よう。とりあえず $X = S_\pi$ に対照的な条件として，$S_\pi = \phi$ を考えてみる。みかけの条件は簡単であるが，実際には複雑な様相を呈することがある。$X = R^2$ の場合に対しては，このような流れの isomorphism に関する完全な分類ができている [8]。一方 2次元の compact manifolds の上の流れでは，$S_\pi = \phi$ となりうるのは torus の場合にかぎることが知られている（Poincaré）。この場合の研究は完全ではないが，可成りよくできている（たとえば [9] 参照）。R^2 の場合をみても，わかるように，相当に複雑であって，一般の phase space に対しては非常に難しい問題である。

3.3 そこで次の段階として $S_\pi = \phi$ よりもう少し条件を強くした流れを考える。微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \text{const.} \neq 0$$

の抽象化である。(X, π) に対して，位相空間 Y が存在して，位相空間として $X = Y \times R$ とかけ，$x = (y, s) \in Y \times R$ と表わすとき

$$\pi((y,s),t) = (y, s+t)$$

と表わされるならば，π は parallel flow であるという。直ちにわかるように

$$\text{parallel} \Rightarrow \mathcal{S}_\pi = \phi.$$

後にもう少し詳しく述べるが逆は真でない。$X = R^2$ の場合には上述通り $\mathcal{S}_\pi = \phi$ の流れは完全に分類されているから，それをみても逆が真でないことがわかる。また parallel flow があれば，その phase space は compact でありえない。（Torus では $\mathcal{S}_\pi = \phi$ の流れがあるが，parallel flow はない）。

上記のような Y の存在性（parallelizability）は Nemytskii [9] をはじめ，非常に多くの人によって研究されている。中でも，Antosiewicz と Dugundji [2] の條件は，きれいに整っていて，しかも基礎的であると思う。それを説明するために一つの概念を導入しよう。

<u>定義</u>. $x \in X$ とする．$\mathcal{V}(x)$ で x の近傍の filter を表わす。また $\mathcal{L}^+$ で R の中の net $t \to \infty$ に対応する filter を表わす。$\mathcal{V}(x) \times \mathcal{L}^+$ に従った π の cluster set を $J^+(x)$ と書き，これを positive（+ と略記）prolongational limit set という。かくて $J^+ : X \to 2^X$ であり $J^+ : 2^X \to 2^X$

でもある。

<u>定理</u>. X を completely regular で Lindelöf の性質を持つ空間とする. X の上の流れ π が parallelizable であるための必十条件は $J^+(X)=\phi$ なることである。

(注意 $J^+(X)=\phi \Leftrightarrow J^-(X)=\phi \Leftrightarrow J(X)=\phi$).

これは [2] を改良 (Hajek による) したものを, J を使って表現しなおしたものである ([4]).

<u>定義</u>. Filter-base $V(x)\times R^+$ に従った π の cluster set を $D^+(x)$ と書いて, x の positive (十と略記) prolongation という。

<u>定理</u>. X を separable な metric space とする. X の上の流れ π が parallelizable であるための必十条件は

(1) $\forall x \in X \quad D^+(x)=K^+(x)$

かつ (2) $\mathcal{P}=\phi$

なることである。

$X=R^2$ の場合には $\mathcal{S}=\phi \Leftrightarrow \mathcal{P}=\phi$ であることに注意しよう, これは有名な Bendixson の定理である. したがって, この場合には, 条件 (2) は $\mathcal{S}=\phi$ でおきかえることができる。

一般に，特に $X=R^2$ の場合でも，(1) と (2) とは independent である。（例外は $X=R^1$，S^1 位であろう）。

3.3. π を X の上の immobile flow としよう． $\pi(x, R^+)=\{x\}$ だから，$D^+(x)$ は $V(x)$ の cluster set に他ならない。ゆえに，X が Hausdorff ならば $D^+(x)=\{x\}=K^+(x)$ である．かくて，X が metric, separable ならば

$$\begin{tikzcd}
 & \forall x\in X,\ D^+(x)=K^+(x) & \text{immobile}\ (\mathcal{S}=X) \arrow[l, Rightarrow] \\
\text{parallel} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
 & \mathcal{P}=\phi & \left(\overset{X=R^2\text{のとき}}{\Longleftrightarrow}\ \mathcal{S}=\phi\right)
\end{tikzcd}$$

なる diagram が得られる。

3.4 同じ phase space の上の immobile flow は，上述のような isomorphism を考えるかぎり，すべて同じものであると考えられることを述べた。それでは parallel flow において，このことはどうであろうか。$X=R^1$, R^2 においては答えは yes であるが，一般には no である。もう少し詳しい議論が近く発表されるであろう。

§4. Stability, D-stability, Characteristic 0^+。

4.1. π を phase space X の上の流れとする。

$\phi \neq M \subset X$ が $C^+(M) = M$ ($\Leftrightarrow$ $C^+(M) \subset M$) をみたすとき M は positively (+と略記) invariant であるという。主として考えるのは、closed + inv. set である。今後特に断わらないかぎり、M は常にそうであるとする。

<u>定義</u>. $\forall U \in \mathfrak{V}(M)$, $\exists V \in \mathfrak{V}(M)$, $C^+(V) \subset U$ が成り立つとき、M は + stable であるという。

<u>定義</u>. $D^+(M) = M$ が成り立つとき、M は + D-stable であるという。

X が regular な場合には(closed + inv sets に対して)

$$+\ \text{stability} \Rightarrow +\ \text{D-stability}$$

が得られるが、一般に逆は真でない。逆が成り立つための一つの十分条件は、X が locally compact で M が compact なことである。

(一方、M が closed であるという条件をはずすと、色々なことが起こる。たとえば M が open positively inv. なら、M は必ず + stable であるが、必ずしも + D-stable ではない。)

4.2 <u>定義:</u> $\forall x \in X,\ D^+(x) = K^+(x)$ が成り立つとき, π は characteristic O^+ をもつという.

K^+ や D^+ は increasing, continuous GH-iso. に対して invariant であるから, そのような iso. に対して, characteristic O^+ の概念は invariant である。

かくて標数の characteristic O^+ の定義ができた。これを使うと, 3.3 の diagram は次のように書きかえられる。（言葉だけの内容である。）

$$\begin{array}{ccl} & \Nearrow & \text{characteristic } O^+ \Leftarrow \text{immobile } (\mathcal{S} = X) \\ \text{parallel} & \Longleftarrow & \quad \| \\ & \Searrow & \mathcal{P} = \phi \ \left(\overset{X=R^2 \text{のとき}}{\Longleftrightarrow} \ \mathcal{S} = \phi \right) \end{array}$$

これで characteristic O^+ の位置づけが可成りはっきりしたと思う。

Characteristic O^+ の條件を stability の考えから見直してみよう。定義は $\forall x \in X,\ D^+(x) = K^+(x)$ であった。そこで $\phi \neq M \subset X$ を closed + inv. set としよう。$x \in M$ ならば, M が + inv. なことから, $C^+(x) \subset M$, ついで closed なことから, $K^+(x) \subset M$ が得られる。ゆえに characteristic O^+ ならば $D^+(x) \subset M$。これがすべての $x \in M$ について成り立つから,

$D^+(M)=M$ となる。 したがって M は $+D$-stable である。その結果 characteristic 0^+ の流れにおいては，すべての closed + inv. set は +D-stable であることがわかる。逆の証明の方はむしろ，やさしくて次の定理が得られる。

<u>定理</u>. 一つの流れが characteristic 0^+ を持つための必十條件は，すべての closed + inv. set が +D-stable なることである。

4.3. Phase space が regular ならば closed + inv. set において + stability ⇒ +D-stability が成り立つこと，逆は真でないことをのべた。この逆が真でないことを明らかに示してくれるのは parallel flow である。Metric space 上の parallel flow が characteristic 0^+ を持つことは既に述べ，したがって 4.2 によって，そのような parallel flow においては，すべての closed + inv. set は + D-stable である。しかし，大まかにいうと，metric space 上の parallel flow においては，どんな closed + inv. set も + stable ではない。もっと正確に述べよう。

定理. π を metric space X の上の parallel flow とする。したがって，位相空間 Y が存在して，

位相空間として $X = Y \times R$ であり, $X \ni x$ を (y, s) $(y \in Y,\ s \in R)$ で表わせば, $\pi((y,s),t) = (y, s+t)$ である。 $x_0 = (y_0, s_0) \in Y \times R$ に対して $K^+((y_0, s_0))$ が + stable であるための必十條件は y_0 が Y の孤立点であることである。

証明は難かしくないので省略するが, 條件が必要であることが, 大切である。

4.4 結論として, characteristic 0^+ という性質は, parallel と immobile との両方の, D-stability の見地からの拡張になっている。 しかし, stability の見地からではこのような拡張はできない。

§5. Absolute stability と characteristic 0^+。

5.1 $D^+(x)$ は $X \times R$ の上のフィルター基 $V(x) \times R^+$ に従った, π の cluster set であった。 $D^+(x) = D_1^+(x)$ とおいて, しかるべき方法で, 超限帰納法を使うと, すべての ordinal number α に対して, $D_\alpha^+(x)$ なる集合を定義することができる。 これを x の order α の + prolongation と呼ぶ。 実際, その定義には二通りの方法が与えられているが, ここでは, その詳細は述べない。 ([10], [3], Cf [6]).

ただし，どちらの方法を用いても，$\alpha < \beta \Rightarrow D_{\alpha}^{+}(x) < D_{\beta}^{+}(x)$ である。

X が濃度 $\aleph_n$ なる開集合の底をもつとしよう。ω_{n+1} で $\aleph_{n+1}$ の始数を表わすと，すべての $N \subset X$ に対して，すべての $\beta \geq \omega_{n+1}$ に対して

$$D_{\omega_{n+1}}^{+}(N) = D_{\beta}^{+}(N)$$

が成り立つ。したがって実際には ω_{n+1} より大きい order の prolongation を考える必要はない。そこで $x \in X$ を与えると

$$D_{\alpha}^{+}(x) = D_{\alpha+1}^{+}(x)$$

であるような，最小の ordinal α がある。この際 $K^{+}(x) = D_{0}^{+}(x)$ と定義して，prolongation の order を 0 まで拡張しておくことは，自然であり，便利でもある。この最小の α を x の $+$ characteristic と呼び，x は characteristic α^{+} を持つという。この最小の α は x に依存するから，$\alpha(x)$ と書くことにする。$0 \leq \alpha(x) \leq \omega_{n+1}$ が成り立つ。それで

$$\alpha_0 \equiv \sup_{x \in X} \alpha(x) \leq \omega_{n+1}$$

とおいて，α_0 をわれわれの流れの $+$ characteristic と呼び，われわれの流れは characteristic α_0^{+} を

持つという。明らかに，前に導入した characteristic O^+ は新しい定義の特別な場合となる。

Continuous, increasing GH-iso に対しては，$D^+_\alpha(x)$ は invariant であるから，characteristic も，それに対して invariant である。X が与えられると，上述の $\aleph_n$ の最小なものがある。かくて X 上の流れは，Continuous, increasing GH-iso. を法として，高々 $\aleph_{n+1}$ 個の級に，しかも well order を持って分類される。いいかえると各級には，ordinal numbers $0, 1, 2, \ldots, \omega_0, \omega_0+1, \ldots, \omega_{n+1}$ の丁度一つが対応する。しかし，これらの ordinal numbers すべてが実現されるかどうかは，わからない。特に，phase space が与えられた有限次元 (separable) manifold であるような流は $\aleph_1$ 個に分類される。

5.2 すべての ordinal number に対して $D^+_\alpha(x)$ が定義されることをのべた。今 M を closed + inv set とするとき，$\forall\alpha$ $D^+_\alpha(M)=M$ が成り立つとき，M は + absolutely stable であるという。X に対して 5.1 のようにして定まる $\aleph_n$ を与えると

$$M : + \text{absolutely stable} \Leftrightarrow D^+_{\omega_{n+1}}(M)=M$$

である。

定理． Characteristic O^+

$\Longleftrightarrow$ すべての closed + inv. set は + absolutely stable.

$\Leftarrow$ はあきらかである。 $\Rightarrow$ の証明は難しくはないが繁雑である。それには D^+_α の定義をよく理解しなければならないので，ここでは述べない。

References

[1] S. Ahmad : *Dynamical Systems of Characteristic* 0^+, Pacific J. Math., 32(1970), 561-574.

[2] H. Antosiewicz and J. Dugundji : *Parallelizable Flows and Liapunov's Second Method*, Ann. of Math. 73 (1961), 543-555.

[3] J. Auslander and P. Seibert : *Prolongations and Stability in Dynamical Systems*, Ann. Inst. Fourier(Grenoble), 14 (1964), 237-268.

[4] N. P. Bhatia : *Criteria for Dispersive Flows*, Math.Nachr. 32 (1966), 89-93.

[5] N. P. Bhatia and O. Hájek : Local Semi-Dynamical Systems, Lecture Notes in Mathematics, 90, Springer-Verlag, Berlin 1969.

[6] N. P. Bhatia and G. Szegő : Stability Theory of Dynamical Systems, Springer-Verlag, Berlin 1970

[7] I. Kimura : *Isomorphism of Local Dynamical Systems and Separation Axioms for Phase Spaces*, Funkc. Ekvac.13 (1970), 23-34.

[8] R. McCann : *Planar Dynamical Systems without Critical Points*, Funkc. Ekvac.,13 (1970), 67-95.

[9] v.v. Nemytskii and v.v. Stepanov : Qualitative Theory of Differential Equations, Princeton University Press Princeton, N. J. (1960).

[10] T. Ura : *Sur le courant extérieur,etc., l'ordre de stabilité et le complément*, Funkc. Ekvac. 2 (1959), 143-200, 9 (1966), 171-179.

[11] T. Ura : *Isomorphism and Local Characterization of Local Dynamical Systems*, Funkc. Ekvac., 12 (1969), 99-122.