

ある発展方程式の解の構成について

神大 理 南 池 紀 夫

$\Omega$  は  $m$ 次元ユークリッド空間  $R^m$  の有界な開集合とし、 $E$  は  $\Omega$  で定義され値と  $R^m$  にとる二乗可積分関数全体の集合  $L^2(\Omega)$  のヒルベルト部分空間とする。つぎの (1), (2) を仮定する。

(1) つぎの性質をもつ  $\{\lambda_n\} \subset R, \{g_n\} \subset E (n=1, 2, \dots)$  が存在する。

1)  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty),$

2)  $g_n(x)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \{g_n(x)\}$  は  $\Omega$  の上の連続関数数列で、 $E$  の完全正規直交系である。

線型閉作用素  $A$  をつぎのように定義する。

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in E; u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 a_n^2 < +\infty \right\},$$
$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n g_n, \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n \in \mathcal{D}(A).$$

(2)  $C > 0, 0 < \alpha < 1$  が存在して

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|Au\| |x - y|^\alpha, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

がなりたつ。ただし、 $\|u\|$  は  $u$  の  $L^2(\Omega)$  ノルムである。

$E$  上の発展方程式のコーシー問題

$$d u(t) / dt = -A u(t) + f(t), \quad t \in I = [0, T],$$

$$u(0) = 0$$

の解の構成を考える。ただし、 $f(t) \in \mathcal{D}(A)$  は  $t$  の連続関数とする。

$f(t)$  が  $t$  に関係しないときを最初考える。  $I$  を  $N$  等分する。

$$D: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

$$h = \delta(D) = T/N.$$

$\{u_k\}$  ( $k=0, 1, \dots, N$ ) を帰納的につぎのように定める。

$$u_0 = 0,$$

$$(u_k - u_{k-1}) / h = -A u_k + f,$$

$$\therefore (1 + hA) u_k = u_{k-1} + h f.$$

このような  $u_k \in \mathcal{D}(A)$  があるものとすれば、仮定(1)により

$$u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} g_n$$

とあらわされるから

$$\alpha_n^{(k)} = \{(1 + h\lambda_n)^k - 1\} f_n / h\lambda_n(1 + h\lambda_n)^k$$

となり、 $A$  が閉作用素であることに注意すれば、この  $u_k$  が上の方程式とみたすものである。また、評価

$$\|A u_k\| \leq \|f\|, \quad \|A u_{k+1} - A u_k\| \leq h \|f\|$$

が成り立つ。分割  $D$  に対応して、関数  $\varphi_D(t, x)$ ,  $\psi_D(t, x)$  を

$$\begin{aligned} f_D(t, x) &= \frac{t_{k+1} - t}{h} u_k(x) + \frac{t - t_k}{h} u_{k+1}(x), \\ \psi_D(t, x) &= u_{k+1}(x), \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \end{aligned}$$

と定義し、 $E$  の元と考えるときには、 $f_D(t), \psi_D(t)$  と書く。

さて、解の構成を試みる。 $\{D_n\}$  は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(D_n) = 0$$

なる分割列とし、 $f_{D_n}(t, x), \psi_{D_n}(t, x)$  と簡単に、 $f_n(t, x), \psi_n(t, x)$  と書くことにする。また、 $\{f_n(t)\}$  が  $E$  で正規族になることをみる。仮定(2)により

$$|u_k(x) - u_k(y)| \leq C \|A u_k\| \cdot |x - y|^\alpha$$

がなりにつから

$$|f_n(t, x) - f_n(t, y)| \leq C \|f\| \cdot |x - y|^\alpha$$

となり、 $t \in I$  と固定したとき、 $\{f_n(t)\}$  は  $E$  のコンパクト集合に属し

$$\|D_t^+ f_n(t)\| \leq 2 \|f\|$$

であるから、 $\{f_n(t)\}$  は  $E$  で正規族になる。同じように考えて  $\{D_t^+ f_n(t)\}$  も  $E$  で正規族になっている。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = f(t),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_t^+ f_n(t) = d f(t) / dt, \quad t \in I$$

と仮定できる。作り方から

$$D_t^+ f_n(t) = -A \psi_n(t) + f, \quad t \in I$$

であり、 $A$  が閉作用素であるから

$$d\varphi(t)/dt = -A\varphi(t) + f, \quad t \in I$$

$$\varphi(0) = 0$$

が成り立つ。 $f(t)$  が  $t$  の連続関数のときは、 $f(t)$  と階段関数で近似可能により、解を構成可能となる。